Таблица 2

ξ	u		v		p	
	I	II	I	II	I	II
0	—1,644	—1,644	13,100	13,100	105	105
0,2	—1,610	—1,613	12,944	12,94	102,921	102,979
0,4	—1,581	—1,581	12,780	12,78	100,882	100,937
0,6	—1,550	—1,551	12,621	12,62	98,888	99,021
0,8	—1,519	—1,520	12,466	12,47	96,928	97,042
1,0	—1,490	—1,490	12,314	12,32	95,009	95,127

Примечание. I — численный метод характеристик, II — аналитический метод.

Результаты расчетов аналитического способа с учетом (8) при $\operatorname{tg} \alpha_0 = 0{,}1255$, $b = 0{,}86 \cdot 10^{-3}$ и метода характеристик, изложенного выше, представлены в табл. 1, 2, откуда видно, что результаты, полученные при помощи обоих методов, согласуются взаимно удовлетворительно, и найденный обратным методом профиль нагрузки $f(\xi)$ является монотонно убывающим вдоль ξ.

Авторы выражают благодарность Х. А. Рахматулину за обсуждение результатов работы.

Поступила 3 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Скобеев А. М., Флитман Л. М.** Подвижная нагрузка на неупругой полуплоскости.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.
2. **Капустянский С. М.** Распространение и отражение двумерных пластических волн.— «Изв. АН СССР. МТТ», 1973, № 1.
3. **Рахматулин Х. А., Мамадалиев Н.** Распространение нелинейных волн в грунтовом полупространстве, вызванных бегущей по его границе нагрузкой.— В кн.: Труды симпозиума. Нелинейные и тепловые эффекты при переходных волновых процессах. Горький — Таллин, 1973.
4. **Исследование** механических свойств грунтов в условиях трехосного сжатия при повышенном уровне напряжений. Отчет МИСИ им. В. В. Куйбышева № 320, 1972.
5. **Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А.** Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М., Физматгиз, 1961.

УДК 539.374

СМЕШАННАЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ СЫПУЧЕЙ АДДИТИВНО-СЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ

И. С. Дегтярев

(*Пермь*)

Среди большого количества работ, посвященных вопросам движения сыпучих сред, работы [1, 2] занимают особое положение. В [1] на основе концепции пластического потенциала сформулированы определяющие соотношения между напряжениями и скоростями деформаций, которые были использованы в [2] для постановки смешанных граничных задач и решения вопросов о вдавливании штампа и смазанного клина в грунтовую дилатирующую массу.

Данная работа является развитием работы [2] для модели тела [3], описывающей течение некомпактной среды, разрыхляющейся при сдвиге и объемно-сжимаемой от действия гидростатического давления.

1. Будем рассматривать сыпучую среду, в которой плоское необратимое формоизменение происходит при условии предельного состояния Кулона

$$\sigma \sin\varphi + \tau_* = c\cos\varphi, \quad \tau_* = \left\{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \sigma = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y),$$

где σ_x, σ_y, τ_{xy}— компоненты напряжений; c, φ — константы среды.

Предположим, что в процессе течения сыпучая среда допускает пластическое изменение объема частиц e_{ii} в зависимости от уровня гидростатической части напряженного состояния, согласно закону $e_{ii} = \psi(\sigma)$.

Связь между напряжениями и скоростями деформаций в сыпучем теле примем в форме обобщения закона течения [1], предложенного в [3] и основанного на принципе аддитивности приращений объемных пластических деформаций от сдвига и изменения гидростатического давления:

$$\begin{gathered}\varepsilon_x = \frac{\lambda}{2}\left(\sin\varphi + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_*}\right) + \frac{1}{2}\psi_{,\sigma}\dot{\sigma}, \qquad \lambda \geqslant 0,\\ \varepsilon_y = \frac{\lambda}{2}\left(\sin\varphi - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_*}\right) + \frac{1}{2}\psi_{,\sigma}\dot{\sigma}, \qquad \psi_{,\sigma} = d\psi/d\sigma,\\ \gamma_{xy} = \lambda\frac{\tau_{xy}}{\tau_*}, \quad \dot{\sigma} = d\sigma/dt,\end{gathered} \tag{1.1}$$

где ε_x, ε_y, γ_{xy} — скорости деформаций; t — время.

Из соотношений (1.1) следует выражение для скорости объемного изменения

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \lambda\sin\varphi + \psi_{,\sigma}\dot{\sigma}. \tag{1.2}$$

Первое слагаемое в правой части (1.2) имеет дилатансионное происхождение, второе — обусловлено изменением давления в точках тела.

2. В работе [3] для модели тела (1.1) в пространственном случае проводилось общее исследование системы уравнений пластического течения. При этом было установлено, что характеристические многообразия для полей напряжений и скоростей совпадают, причем пластическая сжимаемость $e_{ii} = \psi(\sigma)$ не оказывает влияния на поле характеристик, а приводит лишь к изменению характеристических соотношений.

Система (1.1), (1.2) принадлежит к гиперболическому типу и имеет два семейства характеристик

$$dy/dx = \operatorname{tg}\theta, \; dy/dx = -\operatorname{ctg}(\theta + \varphi), \tag{2.1}$$

где θ — угол наклона первой характеристики (линии скольжения), лежащей между направлениями главных напряжений ($\sigma_2 > \sigma_1$), к оси x.

Учитывая результаты работы [2], соотношения (1.1) перепишем в виде

$$\begin{gathered}\varepsilon_x = \frac{\lambda}{2}\{\sin\varphi - \sin(\theta + \varphi)\} + \frac{1}{2}\psi_{,\sigma}\dot{\sigma},\\ \varepsilon_y = \frac{\lambda}{2}\{\sin\varphi + \sin(\theta + \varphi)\} + \frac{1}{2}\psi_{,\sigma}\dot{\sigma},\\ \gamma_{xy} = \lambda\cos(\theta + \varphi).\end{gathered} \tag{2.2}$$

Ограничимся рассмотрением случая установившегося движения среды, в котором изменение давления в точках тела обусловлено трансляцией, т. е.

$$\dot{\sigma} = \sigma_{,x}\, u + \sigma_{,y} v. \tag{2.3}$$

Здесь u, v — скорости перемещений вдоль декартовых осей x, y.

Между ортогональными проекциями вектора скорости на направления первой и второй линий скольжения v_1, v_2 и компонентами u и v имеет место связь

$$\begin{aligned} u &= \{v_1 \cos(\theta + \varphi) - v_2 \sin\theta\}/\cos\varphi, \\ v &= \{v_1 \sin(\theta + \varphi) + v_2 \cos\theta\}/\cos\varphi. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Из соотношений (2.2) следуют равенства

$$\left(u_{,x} - \frac{1}{2}\psi_{,\sigma}\dot{\sigma}\right)_{\theta=0} = \left(u_{,x} - \frac{1}{2}\psi_{,\sigma}\dot{\sigma}\right)_{\theta=-\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)} = 0, \tag{2.5}$$

выражающие условия равенства нулю неполной скорости растяжения вдоль линий скольжения.

Пусть ds_1, ds_2 — элементы дуг первой и второй характеристических линий соответственно, тогда будем иметь

$$\begin{aligned} ds_1 &= dx \cos\theta + dy \sin\theta, \\ ds_2 &= -dx \sin(\theta + \varphi) + dy \cos(\theta + \varphi). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Используя соотношения (2.1), (2.3), (2.4), (2.6), из (2.5) получаем уравнения вдоль характеристических направлений

$$\begin{aligned} dv_1 - (v_1 \operatorname{tg}\varphi + v_2 \operatorname{sc}\varphi)d\theta + (1/2)\psi_{,\sigma} v_2 \csc\varphi\, d\sigma &= 0, \\ dv_2 + (v_1 \operatorname{sc}\varphi + v_2 \operatorname{tg}\varphi)d\theta + (1/2)\psi_{,\sigma} v_1 \csc\varphi\, d\sigma &= 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Вдоль характеристических линий выполняются дифференциальные соотношения Кеттера [2]

$$\begin{aligned} d\sigma - 2\operatorname{tg}\varphi\,(c \operatorname{ctg}\varphi - \sigma)d\theta &= 0, \\ d\sigma + 2\operatorname{tg}\varphi(c \operatorname{ctg}\varphi - \sigma)d\theta &= 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Воспользуемся условием совпадения характеристик для полей напряжений и скоростей. Тогда с учетом (2.8) соотношения (2.7) примут вид

$$\begin{aligned} dv_1 - \{v_1 \operatorname{tg}\varphi + v_2 \operatorname{sc}\varphi - \psi_{,\sigma} v_2 \operatorname{sc}\varphi(c \operatorname{ctg}\varphi - \sigma)\}d\theta &= 0, \\ dv_2 + \{v_1 \operatorname{sc}\varphi + v_2 \operatorname{tg}\varphi - \psi_{,\sigma} v_1 \operatorname{sc}\varphi(c \operatorname{ctg}\varphi - \sigma)\}d\theta &= 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Уравнения (2.9) представляют собой смешанные характеристические соотношения для дилатирующей и необратимо уплотняющейся от давления сыпучей среды. При $\psi_{,\sigma} = 0$ уравнения (2.9) совпадают с известными соотношениями [2] для неограниченно разрыхляющегося грунта.

Анализируя (1.2), (2.3), (2.5), (2.9), можно прийти к выводу: необратимое уплотнение от воздействия давления в сыпучей дилатирующей среде приводит к пластической сжимаемости тонких зон, прилегающих к непрямолинейным характеристикам.

Отметим, что в отличие от модели тела [1], рассматриваемой в [2], для аддитивно-сжимаемой среды уже не представляется возможным при известных линиях скольжения и заданных граничных условиях для скоростей решать характеристическую задачу, минуя этап определения пластического поля напряжений. Очевидно, что для интегрирования смешанных соотношений (2.9) нужно иметь заранее решение статически определимой системы (если граничные условия в напряжениях достаточны), т. е. иметь известной сетку линий скольжения и интегралы уравнений (2.8). В [4] дана общая формулировка задач течения сыпучей среды, допускающих статически определимые решения.

3. Рассмотрим случаи интегрируемости уравнений (2.9) (следуя [2]). Для прямолинейных линий скольжения, пересекающихся под углом $\pi/2 + \varphi$, соотношения (2.9) совпадают с исследованными характеристическими уравнениями [2]. Когда одно из семейств линий скольжения (первое семейство) является пучком прямых, а другое — системой логарифмических спиралей (зона радиального сдвига), из (2.9) при заданной сетке характеристических линий и известной функции $\sigma = \psi_0(\theta)$ вдоль второго семейства будем иметь $v_1 = f_1(\theta)$ вдоль первого семейства и

$$v_2 \exp(\theta \operatorname{tg} \varphi) = -\operatorname{sc} \varphi \int\limits_{\theta_0}^{\theta} f_1(\theta) \{1 - \psi_{,\sigma}(c \operatorname{ctg} \varphi - \psi_0)\} \exp(-\theta \operatorname{tg} \varphi)\, d\theta + f_2$$

вдоль второго семейства характеристик.

Функция f_2 определяется из граничных условий, причем на f_1 и f_2 накладывается условие положительности дилатансионной части скорости объемного изменения, т. е. $u_{,x} + v_{,y} - \psi_{,\sigma}(\sigma_{,x}\, u + \sigma_{,y}\, v) > 0$ во всей области пластического течения.

Для отыскания распределения плотности $\rho(x, y)$ в пластических областях тела запишем уравнение сплошности среды в случае стационарных движений

$$\rho_{,x} u + \rho_{,y} v + \rho(u_{,x} + v_{,y}) = 0 \tag{3.1}$$

вдоль характеристических линий.

С учетом (2.4)—(2.6) из (3.1) вдоль первого и второго семейств характеристик соответственно получаем соотношения

$$\begin{gathered} d\rho v_2 + \rho\{dv_1 \sin\varphi(1 - \cos\varphi) - dv_2 \cos\varphi - [v_2 \operatorname{tg}\varphi - \cos\varphi(1 - \\ - \cos\varphi)v_1]d\theta\} = 0, \\ d\rho v_1 + \rho\{dv_2 \sin\varphi(1 - \cos\varphi) - dv_1 \cos\varphi + \\ + [v_1 \operatorname{tg}\varphi - \cos\varphi(1 - \cos\varphi)v_2]d\theta\} = 0. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Последние уравнения могут быть проинтегрированы при известной геометрии линий скольжения и определенных из решения (2.9) компонентах скоростей v_1, v_2. Постоянные интегрирования находятся из граничных условий для плотности на каждой из характеристик.

Полученные из решения уравнений (2.8), (2.9), (3.2) при соответственно выбранной геометрии линий скольжения поля σ, v_1, v_2, ρ являются полным решением смешанной характеристической задачи плоского течения сыпучей сжимаемой среды.

Соотношения вдоль характеристик (2.9), (3.2) могут быть использованы при анализе течения гранулированных (порошкообразных) сред в режимах напряжений, допускающих необратимую деформацию составляющих их зерен, включая плавный процесс их дробления. Отмеченное обстоятельство принципиально для большинства технологических процессов пластической обработки давлением некомпактных сред: формовки, прокатки, гидроэкструзии и т. д.

4. В работах [1, 2] исследовалась возможность разрыва скоростей для модели тела [1] и рассматривалась структура переходного слоя интенсивных скоростей деформаций. При этом установлено, что переходный слой имеет конечную толщину, нормальная составляющая скорости изменяется скачком при переходе через линию разрыва (характеристику), причем изменение вектора скорости при переходе через слой разрыва составляет с последним угол φ.

Рассмотрим разрывы скоростей для соотношений (2.2). Пусть оси x, y направлены по касательной и нормали к срединной линии переходного слоя, тогда для выполнения условий $u_{,y}$, $v_{,y} \gg u_{,x}$, $v_{,x}$, как следует из (2.2), необходимо, чтобы переходный слой прилегал к характеристике ($dy/dx = 0$), вдоль которой неполная скорость деформации, согласно (2.5), равна нулю.

Из (2.2) в этом случае следует

$$u_{,x} = \frac{1}{2}\psi_{,\sigma}\dot{\sigma}, \quad v_{,y} = \lambda \sin\varphi + \frac{1}{2}\psi_{,\sigma}\dot{\sigma}, \quad u_{,y} = \lambda\cos\varphi. \tag{4.1}$$

На основании соотношений (4.1) при $dy/dx = 0$ на линии разрыва находим

$$\frac{[v]}{[u]} = \operatorname{tg}\varphi + \frac{\psi_{,\sigma}\dot{\sigma}}{\lambda\cos\varphi}, \quad [u] = u^{+} - u^{-}, \quad [v] = v^{+} - v^{-}. \tag{4.2}$$

Для данной модели среды переходный слой должен иметь конечную толщину δ ($\delta \neq 0$, так как $[v] \neq 0$). Действительно, при непрерывно возрастающей величине δ и конечных скачках $[u]$, $[v]$ функции ε_y, γ_{xy}, λ будут неограниченно убывать, в таком случае, как следует из (4.2), в материале слоя должно неограниченно увеличиваться сопротивление гидростатическому сжатию, что физически нереально.

В работе [1] были введены «простые разрывные» решения, основанные на выражении для скорости диссипации энергии на единичной площадке разрыва

$$W = c[u]. \tag{4.3}$$

На основании соотношения (4.2) и результатов работы [5] для аддитивно-сжимаемой среды формула (4.3) принимает вид

$$W = (c\cos\varphi - \sigma\sin\varphi)\{[u]^2 + [v]^2\}^{1/2} + \sigma[v].$$

Последнее выражение на основе использования экстремальных теорем [5] может быть использовано для отыскания верхних оценок предельных нагрузок в задачах движения сыпучих материалов, находящихся под воздействием высоких давлений.

Поступила 15 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. **Drucker D., Prager W.** Soil mechanics and plastic analysis or limit design.—«Quart. Appl. Math.», 1952, vol. 10, N 2.
2. **Shild R.** Mixed boundary value problems in soil mechanics.—«Quart. Appl. Math.», 1953, vol. 11, N 1.

3. **Ивлев Д. Д., Мартынова Т. Н.** К теории сжимаемых идеально пластических сред.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 3.
4. **Соколовский В. В.** Статика сыпучей среды. М., Физматгиз, 1960.
5. **Дегтярев И. С.** Об экстремальных теоремах и разрывных решениях для аддитивно-сжимаемого пластического тела.— В кн.: Механика деформируемого твердого тела. Вып. 1. Куйбышев, изд. Куйбышевск. ун-та, 1975.

УДК 539.38.384.2 + 539.38.386

ДИНАМИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАЩЕМЛЕННЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПРИ УЧЕТЕ ЭФФЕКТОВ СДВИГА И ИНЕРЦИИ ВРАЩЕНИЯ

Ю. В. Немировский, А. Р. Сковорода

(Новосибирск, Барнаул)

При воздействии кратковременных динамических нагрузок высокой интенсивности большая часть подводимой к конструкции внешней энергии может рассеяться в работу пластических деформаций прежде, чем конструкция разрушится или получит заведомо недопустимые остаточные деформации. Для решения соответствующих задач по оценке степени повреждения конструкций при воздействии «взрывных» нагрузок широкое применение нашли подходы, основанные на модели жестко-пластического тела. Подробный обзор советских и зарубежных работ, выполненных в этом направлении в последние годы, изложен в [1].

Выполненные в ряде работ [2—4] экспериментальные исследования обнаружили, что замеренные в экспериментах величины остаточных прогибов и углов поворота оказываются существенно меньше теоретических, составляя от них примерно 20—80%. Такое расхождение объясняется влиянием ряда факторов, не учитываемых в вышеуказанной теории. В частности, во всех известных на сегодня исследованиях не учитывается влияние инерции вращения и ограниченности сопротивления поперечным сдвигам.

В данной работе развивается теория динамического изгиба круглых пластин из жестко-пластического материала, учитывающая инерцию вращения и ослабленное сопротивление поперечному сдвигу. Показано, что характер динамического поведения и механизм рассеяния энергии при пластических деформациях в этом случае существенно иной, чем в вышеуказанных теориях.

1. Рассмотрим осесимметричную деформацию круглой пластинки из идеально жестко-пластического материала. Примем следующие кинематические гипотезы деформирования пластинки (в цилиндрической системе координат r, φ, z, связанной со срединной поверхностью):

$$u_r = zu(r, t), \quad u_\varphi \equiv 0, \quad u_z = W(r, t),$$

где u_r, u_φ, u_z— компоненты вектора перемещения; t — время. Пользуясь вариационным принципом Лагранжа в сочетании с принципом Даламбера, получим соответственно уравнения движения пластинки

$$(1.1)\qquad (1/3)\ddot{u} = m_1' + x^{-1}(m_1 - m_2) - ql + \varphi, \quad \ddot{w} = q' + x^{-1}q + p$$

и граничные условия на краю $x = x_j$

$$\left[\delta u\left(m_1 n_j - l^{-1}\int_{-1}^{1}\varphi_j\zeta d\zeta\right)\right]\Bigg|_{x=x_j} = 0, \quad \left[\delta w\left(qn_j - l^{-1}\int_{-1}^{1}p_j d\zeta\right)\right]\Bigg|_{x=x_j} = 0,$$