УДК 532.511+517.9

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ, ПОСТРОЕННЫЕ НА ОСНОВЕ ЧАСТИЧНО ИНВАРИАНТНЫХ

В. В. Пухначев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Предлагается эвристический подход к построению точных решений уравнений гидродинамики, основанный на специфике этих уравнений. Ряд систем уравнений гидродинамики обладает следующей структурой: они содержат "укороченную" систему из n уравнений и дополнительное уравнение для "лишней" функции w. При этом "укороченная" система, в которой полагается $w = 0$, допускает группу Ли G. Принимая в качестве "затравочного" некоторое частично инвариантное решение "укороченной" системы относительно этой группы, можно найти решение полной системы, в котором функциональная зависимость инвариантной части "затравочного" решения от инвариантов группы G имеет прежний вид. В качестве примеров реализации предложенного алгоритма строятся новые точные решения уравнений вращательно-симметричного движения идеальной несжимаемой жидкости, уравнений концентрационной конвекции в плоском пограничном слое и тепловой конвекции во вращающемся слое вязкой жидкости.

Ключевые слова: уравнения гидродинамики, частично инвариантные решения.

1. Расширение множества точных решений уравнений гидродинамики. Многие системы уравнений гидродинамики обладают следующей специфической структурой:

$$L_1(u_1,\ldots,u_n) + w = 0, \quad L_k(u_1,\ldots,u_n) = 0,\ k = 2,\ldots,n, \quad \Lambda(u_1,\ldots,u_n,w) = 0, \qquad (1.1)$$

причем $\Lambda(u_1,\ldots,u_n,0) = 0$ для любого $u = (u_1,\ldots,u_n) \in R^n$. Здесь $L_1,\ldots,L_n,\Lambda$ — дифференциальные операторы (вообще говоря, нелинейные), действующие по переменным $x = (x_1,\ldots,x_m) \in R^m$.

Наряду с (1.1) рассмотрим "укороченную" систему

$$L_j(u_1,\ldots,u_n) = 0, \qquad j = 1,\ldots,n. \qquad (1.2)$$

Предположим, что система (1.2) допускает локальную группу Ли G, действующую в пространстве R^{m+n}, и существует частично инвариантное решение системы (1.2) относительно группы G вида

$$u_i = \varphi_i(I_1,\ldots,I_l), \quad i = 1,\ldots,k < n, \qquad u_j = \psi_j(x_1,\ldots,x_m), \quad j = k+1,\ldots,n, \qquad (1.3)$$

где $I_1,\ldots,I_l$ $(l < m)$ — инварианты группы G, зависящие только от $x_1,\ldots,x_m$. (Определение и процедура построения частично инвариантных решений системы дифференциальных уравнений содержатся в [1].)

Подставим выражения $u_i = \Phi_i(I_1,\ldots,I_l)$, $u_j = \Psi_j(x_1,\ldots,x_m)$ (Φ_i, Ψ_j — новые априори неизвестные функции) в систему (1.1). Поскольку функция w явно выражается из первого уравнения этой системы через Φ_i, Ψ_j, то фактически получаем n уравнений, связывающих новые искомые функции. Их следует дополнить дифференциальными соотношениями, выражающими инвариантность функций Φ_i относительно группы G.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01-01-00782).

Полученная переопределенная система уравнений заведомо совместна, так как она имеет решение, в котором u_i, u_j представляются в виде (1.3), а $w = 0$. Однако эта система может иметь и другие, "нетривиальные" решения. Ниже приводятся три примера подобных ситуаций.

2. Вращательно-симметричное движение идеальной несжимаемой жидкости. В данном пункте u, v, w обозначают проекции вектора скорости на оси r, θ, z цилиндрической системы координат соответственно, p — давление жидкости, ρ — ее плотность. Вместо v удобно ввести новую искомую функцию $\Omega = (rv)^2$ — квадрат циркуляции окружной компоненты скорости. В принятых обозначениях система уравнений вращательно-симметричного движения идеальной несжимаемой жидкости имеет вид

$$\begin{gathered} r^3(u_t + uu_r + wu_z + \rho^{-1}p_r) - \Omega = 0, \\ w_t + uw_r + ww_z + \rho^{-1}p_z = 0, \qquad u_r + r^{-1}u + w_z = 0, \qquad \Omega_t + u\Omega_r + w\Omega_z = 0. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Соответствующая "укороченная" система образована первыми тремя уравнениями системы (2.1):

$$\begin{gathered} u_t + uu_r + wu_z + \rho^{-1}p_r = 0, \\ w_t + uw_r + ww_z + \rho^{-1}p_z = 0, \qquad u_r + r^{-1}u + w_z = 0, \end{gathered} \tag{2.2}$$

а роль "лишней" функции в (2.1) выполняет Ω. Система (2.2) допускает трехпараметрическую группу G, алгебра Ли которой образована операторами $\{\partial_z, t\partial_z + \partial_w, \partial_p\}$. Полный набор функционально независимых инвариантов группы G может быть выбран в виде

$$I_1 = r, \qquad I_2 = t, \qquad I_3 = u.$$

Поскольку ранг совокупности функций I_1, I_2, I_3 по переменным u, w, p равен единице, т. е. меньше числа искомых функций в (2.2), то инвариантных решений этой системы относительно группы G не существует. Однако можно искать частично инвариантные решения системы (2.2) по отношению к указанной группе, полагая $u = u(r,t)$. Тогда из третьего уравнения системы (2.2) следует

$$w = \psi(r,t)z + \varphi(r,t),$$

где

$$\psi = -u_r - r^{-1}u. \tag{2.3}$$

Подстановка выражений для u, w во второе уравнение системы (2.2) позволяет проинтегрировать его по z, что приводит к представлению функции p

$$-p/\rho = (\psi_t + u\psi_r + \psi^2)z^2/2 + (\varphi_t + u\varphi_r + \varphi\psi)z + \chi,$$

где $\chi(r,t)$ — новая искомая функция. Подставив полученные представления u, w, p в первое уравнение системы (2.2), находим, что левая часть результирующего соотношения является квадратным трехчленом относительно z. Приравнивая к нулю коэффициенты этого трехчлена, получаем уравнения

$$(\psi_t + u\psi_r + \psi^2)_r = 0, \qquad (\varphi_t + u\varphi_r + \varphi\psi)_r = 0, \qquad u_t + uu_r + \chi_r = 0.$$

Эти уравнения вместе с (2.3) образуют замкнутую систему для определения функций u, ψ, φ, χ переменных r, t, связывающую только инварианты группы G. Число независимых переменных в полученной системе определяет ранг изучаемого частично инвариантного решения, который равен двум. Дефект частично инвариантного решения (число неинвариантных искомых функций w, p в исходной системе (2.2)) в данном случае также равен двум.

Покажем, как с помощью полученного частично инвариантного решения "укороченной" системы (2.2) построить новое решение полной системы (2.1). В соответствии с процедурой, описанной в п. **1**, полагаем

$$u = U(r, t). \tag{2.4}$$

В результате второе и третье уравнения системы (2.1) интегрируются по z. После интегрирования по z получаем

$$w = \Psi(r, t)z + \Phi(r, t); \tag{2.5}$$

$$-p/\rho = (\Psi_t + U\Psi_r + \Psi^2)z^2/2 + (\Phi_t + U\Phi_r + \Phi\Psi)z + \mathrm{X}, \tag{2.6}$$

где Φ, X, Ψ — искомые функции r и t. При этом

$$\Psi = -U_r - r^{-1}U. \tag{2.7}$$

Подстановка выражений (2.4)–(2.6) для u, w, p в первое уравнение системы (2.1) приводит к следующему представлению функции Ω:

$$\Omega = -r^3(\lambda z^2/2 + \mu z + \nu), \tag{2.8}$$

где

$$\lambda = (\Psi_t + U\Psi_r + \Psi^2)_r; \tag{2.9}$$

$$\mu = (\Phi_t + U\Phi_r + \Phi\Psi)_r; \tag{2.10}$$

$$\nu = \mathrm{X}_r - U_t - UU_r. \tag{2.11}$$

Подставим выражение (2.8) для Ω в последнее уравнение системы (2.1) и приравняем к нулю коэффициенты возникающего квадратного трехчлена по z. В результате получим еще три уравнения:

$$\lambda_t + U\lambda_r + (2\Psi + 3r^{-1}U)\lambda = 0; \tag{2.12}$$

$$\mu_t + U\mu_r + (\Psi + 3r^{-1}U)\mu + \Phi\lambda = 0; \tag{2.13}$$

$$\nu_t + U\nu_r + 3r^{-1}U\nu = 0, \tag{2.14}$$

которые вместе с (2.7), (2.9)–(2.11) образуют замкнутую систему для определения семи функций U, Ψ, Φ, X, λ, μ, ν переменных r и t. Эта система обладает рекуррентной структурой, что значительно упрощает ее анализ. Действительно, уравнения (2.7), (2.9), (2.12) связывают лишь функции U, Ψ и λ. После их определения функции Φ и μ находятся из системы (2.10), (2.13), а функции ν и X — из уравнений (2.14), (2.11), решаемых последовательно. При этом подсистемы (2.10), (2.13) и (2.14), (2.11) являются линейными относительно искомых функций Φ, μ и ν, X соответственно. Не останавливаясь на решении указанных подсистем, сосредоточим внимание на нелинейной системе (2.7), (2.9), (2.12) и покажем, что она допускает приведение к более стандартному виду.

Перейдем в системе (2.7), (2.9), (2.12) от r к новой пространственной переменной — лагранжевой координате ξ, определяемой соотношениями

$$\frac{dr}{dt} = U(r, t) \quad \text{при} \quad t > 0, \qquad r = a(\xi) \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{2.15}$$

Здесь $a(\xi)$ — функция, удовлетворяющая условиям $a(\xi) \in C^2[\xi_1, \xi_2]$, $a(0) \geqslant 0$, $a'(\xi) > 0$ для $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$, а в остальном произвольная (этим произволом распорядимся позднее). Введем обозначения $l(\xi, t) = \lambda[r(\xi, t), t]$, $f(\xi, t) = \Psi[r(\xi, t), t]$. Исключение из (2.12), (2.7) функции Ψ приводит к равенству

$$\lambda_t + U\lambda_r + (-2U_r + U)\lambda = 0.$$

Переходя в этом равенстве к новым переменным и учитывая, что $\lambda_t+U\lambda_r = l_t$, $U_r = r_{\xi t}/r_\xi$, получаем соотношение

$$l_t/l + r_t/r - 2r_{\xi t}/r_\xi = 0,$$

которое интегрируется по t:

$$rl/r_\xi^2 = \sigma(\xi),$$

где σ — произвольная функция ξ. Опуская малосодержательный случай $\sigma = 0$, в окрестности каждой точки, где функция σ сохраняет знак, рассмотрение можно свести к случаю $\sigma = 1$ или $\sigma = -1$ путем перехода к новой переменной $\tilde{\xi}$, определяемой соотношением $d\tilde{\xi} = \sigma^{1/2}(\xi)\,d\xi$ или $d\tilde{\xi} = [-\sigma(\xi)]^{1/2}\,d\xi$. При этом изменится лишь правая часть в начальном условии (2.15), однако новая функция $\tilde{a}(\tilde{\xi})$ будет обладать теми же свойствами, что и $a(\xi)$, и можно сохранить прежние обозначения ξ и a вместо $\tilde{\xi}$ и $\tilde{a}$.

Итак, получено равенство $l = \sigma r^{-1} r_\xi^2$, в котором величина σ принимает значение 1 или -1. Переходя в (2.9) к лагранжевым координатам и подставляя в полученное равенство выражение l через r и r_ξ, имеем $(f_t + f^2)_\xi = \sigma r^{-1} r_\xi^3$. Еще одно уравнение, связывающее r и f, получается после перехода к новым переменным в равенстве (2.7): $rr_\xi f = -(rr_t)_\xi$. Полученная система уравнений для r и f упрощается, если ввести новую искомую функцию $y(\xi,t) = r^2/8$, и принимает окончательный вид

$$y_{\xi t} = -y_\xi f; \tag{2.16}$$

$$(f_t + f^2)_\xi = \sigma y^{-2} y_\xi^3. \tag{2.17}$$

Следует считать, что система (2.16), (2.17) является гиперболической, несмотря на ее происхождение из уравнений, описывающих движение несжимаемой жидкости. Как известно, система уравнений Эйлера в случае несжимаемой жидкости является составной: она имеет как вещественные, так и комплексные характеристики. В рассматриваемой редукции этих уравнений их гиперболическая составляющая отделяется от эллиптической, что существенно облегчает анализ начально-краевой задачи. (Отметим, что другие гиперболические модели движения идеальной несжимаемой жидкости исследовались в [2, 3].)

Исключение f из системы (2.16), (2.17) приводит к гиперболическому уравнению четвертого порядка для функции $y(\xi,t)$:

$$\Big(\frac{y_{\xi\xi}}{y_\xi}\Big)_{tt} = \Big[\Big(\frac{y_{\xi t}}{y_\xi}\Big)^2\Big]_\xi - \sigma\,\frac{y_\xi^3}{y^2}. \tag{2.18}$$

Естественной начально-краевой задачей для (2.18) является следующая:

$$y(\xi,0) = y_0(\xi), \qquad y_t(\xi,0) = y_1(\xi), \qquad \xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2; \tag{2.19}$$

$$y(\xi_1,t) = c_1, \qquad y(\xi_2,t) = c_2, \qquad t > 0, \tag{2.20}$$

где ξ_1, ξ_2 и $c_2 > c_1 > 0$ — заданные постоянные; $y_0(\xi) > 0$, $y_1(\xi)$ — заданные функции.

Далее предполагается, что $y_0 \in C^2[\xi_1,\xi_2]$, $y_1 \in C^1[\xi_1,\xi_2]$ и, кроме того, выполнены условия согласования $y_0(\xi_i) = c_i$, $y_1(\xi_i) = 0$ $(i = 1,2)$ и условие монотонности $y_0'(\xi) > 0$ для $\xi \in [\xi_1,\xi_2]$. Условия (2.19), (2.20) имеют ясный физический смысл. Из (2.19) и соотношений $r = 2(2y)^{1/2}$, $r_t = U$ следует, что при $t = 0$ выполнены равенства $r = 2[2y_0(\xi)]^{1/2}$, $rU = 4y_1(\xi)$. Исключая из них параметр ξ, получаем начальное распределение радиальной компоненты скорости $U(r,0) = U_0(r)$ при $c_1^2/8 \leqslant r \leqslant c_2^2/8$. Равенства (2.20) означают, что при $r_i = c_i^2/8 = \mathrm{const}$ выполнены условия непротекания $r_{i,t} = U(r_i,t) = 0$, $i = 1,2$. Это позволяет интерпретировать изучаемое решение уравнений Эйлера как описывающее движение в цилиндрическом слое с непроницаемыми стенками, возникающее из заданного начального состояния. Данное решение обобщает известное решение С. Н. Аристова [4] в двух направлениях: во-первых, рассматривается нестационарное движение, а во-вторых, что более существенно, функция Ω (квадрат циркуляции окружной скорости), согласно (2.8), представляет собой полный квадратный трехчлен относительно z, в то время как в работе [4] Ω пропорционально z^2.

Не анализируя подробно задачу (2.18)–(2.20), отметим, что при выполнении сформулированных выше условий гладкости, согласования и монотонности входных данных этой задачи для нее справедлива теорема существования и единственности классического решения на достаточно малом интервале времени. Получение достаточных условий ее разрешимости на произвольном интервале $[0, T]$ представляется весьма сложным. Более того, априори не исключена возможность разрушения за конечное время решения задачи (2.18)–(2.20) для некоторых начальных данных $y_0(\xi)$, $y_1(\xi)$. Интересно было бы провести численные эксперименты с целью изучения поведения решения этой задачи при больших значениях t.

3. Концентрационная конвекция в плоском пограничном слое. В данном пункте u и v обозначают проекции вектора скорости на оси x и y декартовой системы координат соответственно, p — отклонение давления жидкости от гидростатического, c — концентрацию пассивной примеси, ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости, D — коэффициент диффузии примеси, g — ускорение силы тяжести, действующей в отрицательном направлении оси x. Зависимость плотности жидкости ρ от концентрации примеси считается линейной: $\rho = \rho_0(1 - \alpha c)$. Предполагается, что параметры ν, D, g, ρ_0 — положительные постоянные. Параметр α также предполагается постоянным, но его знак может быть любым.

Уравнения нестационарной конвекции в плоском пограничном слое имеют вид

$$\begin{gathered} u_t + uu_x + vu_y = -\rho_0^{-1} p_x + \nu u_{yy} + g\alpha c, \\ p_y = 0, \qquad u_x + v_y = 0, \qquad c_t + uc_x + vc_y = Dc_{yy}. \end{gathered} \tag{3.1}$$

“Укороченная” система соответствует движению однородной жидкости. Полагая в (3.1) $c = 0$, получаем классические уравнения нестационарного плоского пограничного слоя

$$u_t + uu_x + vu_y = -\rho_0^{-1} p_x + \nu u_{yy}, \qquad p_y = 0, \qquad u_x + v_y = 0. \tag{3.2}$$

Система (3.2) допускает группу G с базисными операторами $\{\partial_t, \partial_y, x\partial_x + u\partial_u + 2p\partial_p\}$. Базис инвариантов группы G следующий: $I_1 = x^{-1}u$, $I_2 = v$, $I_3 = x^{-2}p$. Поскольку в нем отсутствуют инварианты, не содержащие искомых функций, то регулярных частично инвариантных решений относительно группы G система (3.2) не имеет. В [5] Дж. Ондич построил нерегулярное частично инвариантное решение (3.2) на группе G, связав инварианты I_1 и I_2 равенством, т. е. положив

$$v = x^{-1}u. \tag{3.3}$$

Подстановка (3.3) в последнее уравнение системы (3.2) приводит к следующему представлению функции u:

$$u = \psi(x\mathrm{e}^{-y}, t). \tag{3.4}$$

Подставляя (3.3), (3.4) в первое уравнение системы (3.2) и обозначая $\xi = x\mathrm{e}^{-y}$, получаем связь между функциями ψ и p

$$\psi_t = -\rho_0^{-1} p_x + \nu(\xi^2 \psi_{\xi\xi} + \xi\psi_\xi).$$

Исключая из последнего равенства функцию p путем его дифференцирования по y, приходим к следующему уравнению для функции ψ:

$$\psi_{\xi t} = \nu(\xi^2 \psi_{\xi\xi\xi} + 3\xi\psi_{\xi\xi} + \psi_\xi).$$

Это уравнение линейное, оно допускает разделение переменных, что позволяет найти ряд его точных решений [5]. Решение общей задачи Коши для данного уравнения может быть построено с помощью преобразования Меллина.

Рассмотрим теперь полную систему (3.1) и будем искать ее решение, в котором связь между компонентами скорости имеет прежний вид (3.3), а представление

$$u = \Psi(x\mathrm{e}^{-y}, t) \tag{3.5}$$

содержит функцию $\Psi(\xi, t)$, вообще говоря, не совпадающую с $\psi(\xi, t)$. Подстановка (3.5), (3.3) в первое уравнение системы (3.1) превращает его в равенство

$$\Psi_t = -\rho_0^{-1} p_x + \nu(\xi^2 \Psi_{\xi\xi} + \xi \Psi_\xi) + g\alpha c,$$

из которого следует представление

$$c = (g\alpha)^{-1}[\rho_0^{-1} p_x + q(\xi, t)], \tag{3.6}$$

где функция q связана с Ψ соотношением

$$\Psi_t = \nu(\xi^2 \Psi_{\xi\xi} + \xi \Psi_\xi) + q. \tag{3.7}$$

Подставляя (3.3), (3.5) и (3.6) в последнее уравнение системы (3.1), получаем замыкающее соотношение между функциями Ψ, q и p

$$q_t + \rho_0^{-1}(p_{xt} + p_{xx}\Psi) = D(\xi^2 q_{\xi\xi} + \xi q_\xi). \tag{3.8}$$

До сих пор никаких ограничений на функцию $p(x, t)$ не налагалось. Теперь выберем ее так, чтобы левая часть уравнения (3.8) была функцией только переменных ξ и t. Для этого достаточно положить

$$p = \rho_0[\beta(t) + \gamma(t)x + \delta(t)x^2], \tag{3.9}$$

где β, γ, δ — произвольные функции t. Подстановка (3.9) в (3.8) дает

$$q_t + \dot{\gamma}(t) + 2\delta(t)\Psi = D(\xi^2 q_{\xi\xi} + \xi q_\xi). \tag{3.10}$$

Итак, на основе известного частично инвариантного решения уравнений динамического пограничного слоя построено новое решение уравнений нестационарной концентрационной конвекции в плоском пограничном слое. В этом решении давление, выраженное формулой (3.9), квадратично зависит от x, в то время как в решении, содержащемся в работе [5], эта зависимость не более чем линейная. Поля скоростей и концентраций в построенном решении задаются равенствами (3.3), (3.5) и (3.6), где функции Ψ и q удовлетворяют системе уравнений (3.7), (3.10). Эта система, будучи линейной, допускает разделение переменных. Для нее естественной является постановка начально-краевой задачи

$$\Psi(\xi, 0) = \Psi_0(\xi), \qquad q(\xi, 0) = q_0(\xi), \qquad \xi > 0,$$
$$|\Psi| < \infty, \quad |q| < \infty \qquad \text{при} \quad \xi \to 0 \quad \text{и} \quad \xi \to \infty.$$

Не обсуждая здесь условия разрешимости данной задачи, отметим лишь одно характерное свойство изучаемого решения системы (3.1), в равной мере присущее решению Дж. Ондича системы (3.2), а именно: ввиду специфической зависимости функции u от y, задаваемой формулой (3.5) или (3.4), нельзя удовлетворить условию прилипания $u = 0$ при $y = 0$ (а также при любом $y = \text{const}$). Это не позволяет использовать данное решение для описания концентрационной конвекции вблизи твердой вертикальной стенки. Однако возможно его применение в ряде других случаев, например, в задачах о слоях смешения или затопленных струях. Еще одно приложение это решение может найти в качестве теста при численном интегрировании системы (3.1). Помимо нелинейности и сильного вырождения типа указанная система неявно содержит малый параметр $\nu^{-1}D$, т. е. фактически является сингулярно возмущенной (для реальных жидкостей отношение D к ν не превышает 10^{-3}). В подобных ситуациях наличие содержательных точных решений имеет большое значение.

4. Тепловая конвекция во вращающемся слое вязкой жидкости. В данном пункте исходными являются следующие уравнения:

$$\begin{gathered}
u_t + uu_r + wu_z - 2\omega v - v^2/r = -p_r/\rho_0 + \nu(u_{rr} + u_r/r - u/r^2 + u_{zz}) - \omega^2\beta rT,\\
v_t + uv_r + wv_z + 2\omega u + uv/r = \nu(v_{rr} + v_r/r - v/r^2 + v_{zz}),\\
w_t + uw_r + ww_z = -p_z/\rho_0 + \nu(w_{rr} + w_r/r + w_{zz}),\\
u_r + u/r + w_z = 0, \qquad T_t + uT_r + wT_z = \chi(T_{rr} + T_r/r + T_{zz}).
\end{gathered} \tag{4.1}$$

Уравнения (4.1) описывают тепловую конвекцию вязкой несжимаемой жидкости в предположении о вращательно-симметричном характере движения. Они записаны в системе координат, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω относительно исходной инерциальной системы. Ось вращения совпадает с осью z цилиндрической системы координат (r, θ, z). Через u, w и v обозначены соответственно радиальная, осевая компоненты скорости и отклонение окружной составляющей вектора скорости от скорости твердотельного вращения ωr. Величина p характеризует отклонение давления от равновесного $\rho_0\omega^2 r^2/2$, величина T — отклонение температуры от некоторого среднего значения. Положительные параметры ρ_0, ν, β и χ имеют следующий смысл: ρ_0 — плотность жидкости при постоянной температуре ($T = 0$), ν — кинематический коэффициент вязкости, β — объемный коэффициент теплового расширения жидкости, χ — коэффициент ее температуропроводности.

"Укороченная" система получается из (4.1), если в первом уравнении положить $T = 0$ и отбросить последнее уравнение. Эта система описывает вращательно-симметричные движения изотермической вязкой несжимаемой жидкости и допускает решения вида

$$u = rf(z,t), \qquad v = rg(z,t), \qquad w = w(z,t), \qquad p = K(t)r^2/2 + h(z,t), \tag{4.2}$$

являющиеся обобщениями известного решения Кармана. Теоретико-групповая природа решения (4.2) не вполне тривиальна: как и решение Кармана, оно является инвариантным решением частично инвариантной подмодели полных (трехмерных) уравнений Навье — Стокса. Эта подмодель порождена четырехпараметрической группой, образованной двумя переносами вдоль осей x_1 и x_2 декартовой системы координат и двумя галилеевыми переносами вдоль тех же осей [6].

Описанным выше способом на основе (4.2) можно получить решение системы (4.1) следующего вида:

$$p = K(t)r^2/2 + A\rho_0\beta\omega^2((r^2/2)\ln(r/a) - r^2/4) + h(z,t), \qquad T = A\ln(r/a) + S(z,t),$$

где A, a — постоянные, имеющие размерность температуры и длины соответственно; поле скоростей сохраняет форму (4.2); функции f, g, w и h теперь определяются совместно с функцией S. Система для определения этих функций имеет вид

$$\begin{gathered}
f_t + wf_z - 2\omega g + f^2 - g^2 = -\rho_0^{-1}K + \nu f_{zz} - \omega^2\beta S, \qquad g_t + wg_z + 2\omega f + 2fg = \nu g_{zz},\\
2f + w_z = 0, \qquad S_t + wS_z + Af = \chi S_{zz}, \qquad w_t + ww_z = -\rho_0^{-1}h_z + \nu w_{zz}.
\end{gathered} \tag{4.3}$$

Вид полученного решения подсказывает его возможную физическую интерпретацию. Жидкость заполняет слой между вращающимися с угловой скоростью ω вокруг оси z твердыми плоскостями $z = \pm a$. На плоскостях выполнено условие прилипания. На оси вращения распределены стоки или источники тепла с постоянной линейной плотностью $-2\pi Ak$

(k — коэффициент теплопроводности жидкости). Ограничивающие течение плоскости теплоизолированы. В начальный момент в слое задано распределение скоростей, согласованное с формулами (4.2). Эти условия индуцируют следующую постановку начально-краевой задачи для системы (4.3):

$$f = g = w = 0, \quad S_z = 0 \qquad \text{при} \quad z = \pm a, \ t > 0; \tag{4.4}$$

$$f = -w_0'(z)/2, \quad g = g_0(z), \quad w = w_0(z), \quad S = S_0(z) \qquad \text{при} \quad |z| \leqslant a, \ t = 0, \tag{4.5}$$

где w_0, g_0, S_0 — заданные функции z. При выполнении естественных условий гладкости и согласования, налагаемых на указанные функции, задача (4.3)–(4.5) имеет классическое решение по крайней мере на достаточно малом интервале времени $[0, \tau]$. Это решение единственно с точностью до прибавления к h произвольной функции t.

В заключение отметим, что при любых значениях определяющих параметров система (4.3) имеет тривиальное решение, в котором все искомые функции равны нулю. Оно описывает равновесие равномерно вращающейся жидкости в бесконечном слое, границы которого — твердые непроницаемые теплоизолированные плоскости, а на оси вращения распределены стоки или источники тепла с постоянной линейной плотностью. Можно показать, что при достаточно больших положительных значениях параметра A тривиальное решение является неустойчивым.

Результаты работы докладывались на III Международной конференции “Симметрия и дифференциальные уравнения” (Красноярск, август 2002 г.) и на семинаре академика Л. В. Овсянникова. Автор выражает благодарность Л. В. Овсянникову и участникам семинара С. В. Головину, С. В. Мелешко и А. П. Чупахину за внимание к работе и полезные обсуждения ее результатов, а также Е. Ю. Мещеряковой за помощь при подготовке рукописи к печати.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. **Пухначев В. В.** Новый класс точных решений уравнений Эйлера // Докл. РАН. 2002. Т. 382, № 6. С. 777–780.
3. **Мещерякова Е. Ю.** Точные решения уравнений вращательно-симметричного движения идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 3. С. 66–75.
4. **Аристов С. Н.** Стационарный цилиндрический вихрь в вязкой жидкости // Докл. РАН. 1991. Т. 377, № 4. С. 477–480.
5. **Ondich J.** A differential constrains approach to partial invariance // Europ. J. Appl. Math. 1995. V. 6, N 4. P. 631–637.
6. **Мелешко С. В., Пухначев В. В.** Об одном классе частично инвариантных решений уравнений Навье — Стокса // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 24–33.

Поступила в редакцию 21/XI 2002 г.