Из выражений (3), (4) видно, что в сильном магнитном поле в направлении, перпендикулярном **H**, изотропная среда с анизотропными включениями сферической формы обладает аномальным свойством — включения с произвольной проводимостью оказывают такое же влияние, как и слабопроводящие ($\sigma_2 \ll \sigma_1$) в отсутствие магнитного поля. Аналогичная ситуация имеет место в двумерной модели с круговыми неоднородностями [2].

В рассматриваемой задаче $\beta_{\text{д}e}$ уменьшается с ростом магнитного поля

$$\beta_{\text{д}e}=3\sigma_2/2\sigma_1\beta_2,$$

а параметр $\sigma_{\text{д}e}$ выходит на насыщение по $\beta_3\left(\sigma_{\text{д}e} = -\frac{3}{2}c\sigma_1\right)$. В направлении магнитного поля эффект анизотропии не проявляется. Среда в этом направлении описывается как изотропная с изотропными неоднородностями [3].

Поступила 8 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. **Попов В. И.** Об обобщенной проводимости гетерогенных систем.— «Магнитная гидродинамика», 1970, № 2, с. 137.
2. **Емец Ю. П.** О проводимости среды с неоднородными включениями в магнитном поле.— ЖТФ, 1974, т. 44, с. 916.
3. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1959.

УДК 537+536.2

ОБ АНИЗОТРОПИИ ЭЛЕКТРО- И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ТРЕЩИНОВАТОЙ СРЕДЫ

М. Л. Качанов

(*Ленинград*)

Известно, что трещиноватость может вызывать анизотропию электро- и теплопроводящих свойств среды. Обширные экспериментальные данные, относящиеся к электропроводности горных пород, приведены в работе [1], согласно этим данным, сопротивление среды с упорядоченным расположением трещин заметно зависит от направления, вдоль которого оно измеряется; по результатам измерений может быть построен эллипсоид анизотропии сопротивления. При этом наблюдается отчетливая корреляция между ориентациями экстремумов электросопротивления и ориентировкой систем трещин. Сопоставление «роз направлений» изоом и «роз направлений» трещиноватости, проведенное для различных районов, показало их идентичность.

В работах [2, 3] был введен тензор плотности трещин T_α, описывающий осредненную (по некоторому объему) геометрию трещиноватости. В данной работе показывается, что тензор T_α может быть эффективно использован в задачах анизотропной электро- и теплопроводности. Тензоры удельной электропроводности σ и коэффициентов теплопроводности K, характеризующие анизотропию электро- и теплопроводящих свойств, выражаются через T_α. Устанавливается структура этой связи; приведенные формулы позволяют найти вид тензоров σ и K, если известны параметры трещиноватости.

Геометрия трещиноватости в теле, содержащем N трещин [2, 3], полностью описывается δ-образным полем двухвалентного симметричного тензора

$$T'_\alpha = \sum_{i=1}^{N} b_i \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i \delta(S_i),$$

где b_i и $\mathbf{n}_i$ — раскрытие трещины и орт нормали к срединной ее поверхности (вообще переменные вдоль каждой из трещин); $\delta(S_i)$ — δ-функция, сосредоточенная на поверхности S_i; i — номер трещины. Среднее по объему

$$(1) \qquad \langle T'_\alpha \rangle_V = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N} \int_{S_i(V)} b\mathbf{nn}dS \equiv T_c,$$

было названо тензором плотности трещин.

Тензор плотности трещин является чисто геометрическим параметром, при описании электропроводящих свойств его следует несколько модифицировать. Дело в том, что (при не слишком сильных электрических полях) вклад, вносимый i-й трещиной в повышение сопротивления среды, не зависит от раскрытия трещины b_i, поэтому модифицируем тензор плотности трещин T_α, определив его как среднее по объему от тензорного поля

$$T''_\alpha = \sum_i \mathbf{n}_i\mathbf{n}_i\delta(S_i).$$

Получим

$$(2) \qquad T_\alpha = \langle T''_\alpha \rangle_V = \frac{1}{V} \int_V \sum_i \mathbf{n}_i\mathbf{n}_i\delta(S_i)\, dV = \frac{1}{V} \sum_i \int_{S_i(V)} \mathbf{nn}dS$$

— двухвалентный симметричный тензор, дающий осредненное (по объему V) описание трещиноватости, причем вклад, вносимый i-й трещиной в среднее, зависит от площади и ориентации ее «срединной поверхности» и не зависит от раскрытия b_i. Отметим, что линейный инвариант тензора T_α равен

$$SpT_\alpha = \frac{1}{V} \sum_i \int_{S_i(V)} (\mathbf{nn})\, dS = \frac{1}{2} \frac{\Sigma(V)}{V} \equiv \alpha,$$

где $\Sigma(V)$ — суммарная площадь поверхностей берегов трещин, содержащихся в объеме V.

В важном случае слоистой трещиноватости (одна система параллельных плоских трещин) диада $\mathbf{nn}$ выносится из-под знаков интегрирования и суммирования и

$$T_\alpha = \alpha\mathbf{nn}.$$

В случае «хаотической» («бессистемной») трещиноватости тензор T_α шаровой.

Как известно, закон Ома в анизотропной среде имеет вид [4]

$$(3) \qquad \mathbf{j} = -\sigma \cdot \nabla\varphi,$$

где $\mathbf{j}$ — вектор плотности тока; φ — потенциал электрического поля; σ — двухвалентный тензор удельной электропроводности (в соответствии с принципом Онзагера его обычно принимают симметричным [4]); точка обозначает свертывание по одному индексу. Под величинами, входящими в (3), подразумеваются средние по некоторому «элементарному объему».

Предполагается, что в отсутствие трещин среда изотропна в отношении электропроводящих свойств, т. е. $\sigma = s_0 I$ (I — единичный тензор). Будем считать, что единственной причиной анизотропии является трещиноватость. Тогда разность $s_0 I - \sigma$, описывающая изменение электропроводности, обусловленное трещиноватостью, будет функцией тензора плотности трещин

$$(4) \qquad s_0 I - \sigma = f(T_\alpha).$$

Конкретизируем эту функцию. Можно видеть, что f — изотропная тензорная функция. Действительно, это, по определению [5], означает, что

$$f(A\cdot T_\alpha\cdot A^*)=A\cdot f(T_\alpha)\cdot A^*, \tag{5}$$

где A — тензор, задающий произвольное линейное ортогональное преобразование; A^* — тензор, сопряженный к A. Смысл равенства (5) состоит в том, что при «поворотах» и «зеркальных отражениях» системы трещин соответствующее преобразование испытывает и вектор тока. Это условие выполняется, если сам материал изотропен. Поэтому, используя теорему Гамильтона—Кэли, функцию (4) можно представить в виде

$$s_0I-\sigma=c_0I+c_1T_\alpha+c_2T_\alpha\cdot T_\alpha, \tag{6}$$

где скалярные коэффициенты c_0, c_1, c_2 — функции инвариантов тензора T_α. Видно, что тензоры $s_0I-\sigma$ и T_α соосны.

Примем, что ослабление тока, обусловленное трещиноватостью, равно сумме ослаблений, соответствующих каждой из трещин (слабое взаимодействие трещин). Это означает, что при разбиении (произвольным образом) трещиноватости, имеющейся в элементарном объеме, на несколько групп трещин

$$T_\alpha=T_\alpha^{(1)}+T_\alpha^{(2)}+\ldots$$

имеем

$$f(T_\alpha)=f\left(T_\alpha^{(1)}\right)+f\left(T_\alpha^{(2)}\right)+\ldots$$

Отсюда следует, что функция f линейна и однородна, т. е. формула (8) приводится к виду

$$s_0I-\sigma=s_1T_\alpha+s_2(sp\,T_\alpha)I, \tag{7}$$

где s_1, s_2 — некоторые скалярные коэффициенты, не зависящие от тензора T_α.

Наложим теперь естественное требование, чтобы в случае слоистой трещиноватости проводимость среды в направлениях, параллельных трещинам, была такой же, как в отсутствие трещин. (Это требование выполняется для трещин с небольшим раскрытием, мало влияющих на площадь перпендикулярного им сечения). Направим ось x_1 декартовой системы координат по нормали к трещинам $\mathbf{n}$. Из (7) получим

$$\sigma=[s_0-(s_1+s_2)\alpha]\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1+[s_0-s_2\alpha]\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2+[s_0-s_2\alpha]\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$$

($\mathbf{e}_i$ — орт оси x_i). Отсюда видно, что сформулированное требование приводит к условию $s_2=0$.

Таким образом, тензор удельной электропроводности имеет структуру

$$\sigma=s_0I-s_1T_\alpha \tag{8}$$

или (в главных осях)

$$\sigma=(s_0-s_1\alpha_1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1+(s_0-s_1\alpha_2)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2+(s_0-s_1\alpha_3)\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3, \tag{9}$$

где α_i — главные значения тензора T_α, характеризующие интенсивность трещиноватости (площадь свободных поверхностей) по направлениям $\mathbf{e}_i$. Поскольку трещиноватость уменьшает проводимость среды, $s_1>0$.

Рассмотрим важный для горных пород случай, когда трещиноватость образована несколькими системами параллельных трещин. В этом случае вектор $\mathbf{n}$ постоянен в пределах каждой из систем трещин, поэтому, вынося в формуле (2) диады $\mathbf{nn}$ из-под знаков интегралов, получим

$$\sigma=s_0I-s_1\sum_i\mathbf{n}_i\mathbf{n}_iF_i, \tag{10}$$

где величина F_i, характеризующая интенсивность трещиноватости i-й системы трещин, равна площади свободных поверхностей трещин, отнесенной к объему усреднения V (в механике горных пород эта величина иногда называется объемной плотностью трещин [6]).

Для среды со слоистой трещиноватостью $\alpha_2=\alpha_3=0$ и

$$\sigma=(s_0=s_1\alpha)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1+s_0(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3), \tag{11}$$

откуда видно, что проводимость среды во всех направлениях, параллельных трещинам, одинакова.

В случае «хаотической» трещиноватости ($\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$) тензор σ шаровой и электропроводность носит изотропный характер. Формулы (9)—(11) выражают тензор σ через параметры трещиноватости.

Выше подразумевалось, что полости трещин ничем не заполнены, либо заполнены материалом, сопротивление которого можно принять равным бесконечности (воздух). На практике часто бывает, что полости трещин заполнены материалом, обладающим конечным сопротивлением. В рамках рассмотренной модели такое заполнение можно учесть следующим приемом.

При наличии заполнителя величина раскрытия щелей b становится существенным параметром, поэтому следует отказаться от модификации тензора T_α и считать, что он определен формулой (1). Примем для тензора плотности трещин «эффективное» значение

$$T_\alpha=\left(1-\frac{s_0}{s_*}\right)\widetilde{T}_\alpha,$$

где s_* — сопротивление заполнителя, а $\widetilde{T}_\alpha$ дается формулой (1). При $s_* < s_0$ компоненты тензора T_α становятся отрицательными; это отвечает тому естественному факту, что наличие трещин с заполнителем, являющимся лучшим проводником, чем «основной» материал, уменьшает сопротивление среды. (Подобная ситуация типична для горных пород, трещины в которых заполнены различного рода жидкостями.)

Рассмотрение переноса тепла путем теплопроводности аналогично проведенному рассмотрению переноса электричества. Основным уравнением будет закон теплопроводности Фурье $\mathbf{h}=-K\cdot\nabla\tau$, где $\mathbf{h}$ — вектор теплового потока; τ — температура; K — двухвалентный тензор коэффициентов теплопроводности (который, как и тензор удельной электропроводности, обычно принимают симметричным). Если в отсутствие трещин среда изотропна в отношении теплопроводящих свойств ($K=k_0I$), т. е. единственной причиной анизотропии является трещиноватость, то $K=K(T_\alpha)$.

Дословно повторяя рассуждения при конкретизации функции (4), придем к формуле $K=k_0I-k_1T_\alpha$, аналогичной формуле (8).

Поступила 2 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. **Горюнов П. И.** Некоторые результаты методических исследований трещинных коллекторов по их электрическому сопротивлению.— «Труды ВНИГРИ», вып. 193, Гостоптехиздат, 1962.
2. **Вакуленко А. А., Качанов М. Л.** Континуальная теория среды с трещинами.— «Изв. АН СССР. МТТ», 1971, № 4.
3. **Качанов М. Л.** Деформируемость среды с трещинами.— «Изв. ВНИИГ», 1972, т. 99.
4. **Най Дж.** Физические свойства кристаллов. М., ИЛ, 1960.
5. **Вакуленко А. А.** Полилинейная алгебра и тензорный анализ в механике. Л., изд. Ленингр. ун-та, 197.
6. **Ромм Е. С.** Фильтрационные свойства трещиноватых горных пород. М., «Недра», 1970.