УДК 517.946

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Н. В. Хуснутдинова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: rem@hydro.nsc.ru

Рассматривается задача для системы, которая в теории пограничного слоя в переменных Мизеса описывает течения газа с отрывом пограничного слоя от пластины. Доказывается существование обобщенных решений задачи.

Ключевые слова: пограничный слой, вырождающиеся параболические уравнения, установившееся течение газа.

1. Постановка задачи. В области $E = \{t, x\colon 0 < t \leqslant T,\ 0 < x < \infty\}$ рассмотрим первую краевую задачу для системы уравнений

$$L(u, w) \cdot \boldsymbol{w} = (a(u, w)u\boldsymbol{w}_x)_x + b(t)\boldsymbol{w}_x - \boldsymbol{w}_t = 0 \qquad (a \geqslant 0) \tag{1}$$

с условиями

$$\boldsymbol{w}(0, x) = \boldsymbol{m}_0(x), \qquad \boldsymbol{w}(t, 0) = \boldsymbol{m}_1, \qquad \lim_{x\to\infty} \boldsymbol{w}(t, x) = \boldsymbol{m}_\infty, \tag{2}$$

где

$$\boldsymbol{w}(t, x) = \{u(t, x), w(t, x)\}, \qquad \boldsymbol{m}_0(x) = \{u_0(x), m_0(x)\},$$
$$\boldsymbol{m}_1 = \{0, m_1\}, \qquad \boldsymbol{m}_\infty = \{u_\infty, m_\infty\}, \qquad (m_1, m_\infty, u_\infty) = \mathrm{const} > 0.$$

В теории пограничного слоя задача (1), (2) в переменных Мизеса описывает установившееся течение газа вблизи пластины при числе Прандтля $\mathrm{Pr} = 1$ со вдувом (если $b(t) < 0$) или отсосом (если $b(t) > 0$) газа через пластину. В этом случае $u(t, x)$ — горизонтальная составляющая вектора скорости; $w(t, x) = u^2/2 + \theta$ — полная энергия; $\theta(t, x)$ — энтальпия; $a(u, w) \equiv a(\theta)$ — динамическая вязкость. В работе [1] задача (1), (2) изучалась в предположении неотрицательности функции $b(t)$. Доказано существование классического решения $\boldsymbol{w}(t, x)$ задачи (1), (2) с условием $u(t, x) > 0$ при $(t, x) \in E$, что соответствует безотрывному обтеканию пластины газом.

В данной работе при произвольном знаке функции $b(t)$ доказано существование обобщенных решений задачи (1), (2), которым, в частности, соответствуют течения газа с отрывом пограничного слоя от пластины, т. е. с образованием областей “застоя” ($u(t, x) \equiv 0$). При этом классического решения может не существовать, поскольку производная u_x в некоторой точке становится неограниченной [2].

Введем в рассмотрение класс $H(E)$ непрерывных в E функций $\boldsymbol{q} = \{p(t, x), q(t, x)\}$, обладающих обобщенной производной $(p\,\boldsymbol{q})_x$ и удовлетворяющих неравенствам

$$p(t, x) > 0, \qquad |q| \leqslant Mp, \qquad |(p\,\boldsymbol{q})_x| \leqslant M, \qquad (t, x) \in E,$$

где M — некоторая положительная постоянная.

Определение. Функцию $\boldsymbol{w}(t, x) = \{u(t, x), w(t, x)\}$ будем называть обобщенным решением краевой задачи (1), (2), если $\boldsymbol{\omega} = \{u, w - m_1\} \in H(E)$, $m_1 = \mathrm{const} > 0$ и для каждой финитной в $\overline{E}$ функции $f(t,x) \in C^1(\overline{E})$, равной нулю при $x=0$, $t=T$, выполняется интегральное тождество

$$\iint\limits_E (f_t\boldsymbol{\omega} - au\boldsymbol{\omega}_x f_x - b\boldsymbol{\omega} f_x)\,dt\,dx + \int\limits_0^\infty (\boldsymbol{m}_0 - \boldsymbol{m}_1) f(0,x)\,dx = 0, \tag{3}$$

где

$$u\boldsymbol{\omega}_x = (u\boldsymbol{\omega})_x - \frac{\boldsymbol{\omega}}{2u}\,(u^2)_x.$$

Пусть выполнены следующие условия:

1) функция $a(u,w)$ определена для значений $u \geqslant 0$, $w>0$, положительна для этих значений и удовлетворяет условию гладкости

$$a(u,w) \in C^2(\Omega_N) \quad \forall N>0, \qquad \Omega_N = \{u,w\colon 0 \leqslant u \leqslant 1/N,\ 1/N \leqslant w \leqslant N\};$$

2) функции $\boldsymbol{m}_0(x) \in \overline{C}^1(0,\infty)$, $u_0^2(x) \in C^1[0,\infty)$, $b(t) \in C^\alpha[0,T]$ $\forall T>0$, $\alpha \in (0,1)$, $\overline{C}^1(0,\infty) = C[0,\infty) \cap C^1(0,\infty)$;

3) функции $\{u_0, u_0', m_0 - m_1, M_0 u_0' - |m_0'|\} > 0$ при $x>0$, $u_0'(0)>0$, $\boldsymbol{m}_0(0) = \boldsymbol{m}_1$, $\lim\limits_{x\to\infty} \boldsymbol{m}_0(x) = \boldsymbol{m}_\infty$ (M_0 — некоторая положительная константа).

Теорема. *При выполнении условий 1–3 в области E $\forall T>0$ существует обобщенное решение $\boldsymbol{w}(t,x)$ краевой задачи (1), (2), причем в области $E^+ = \{t,x\colon u(t,x)>0,$ $(t,x)\in E\}$ решение $w(t,x)$ принадлежит $C^{2+\alpha}(E^+)$.*

2. Построение приближенных решений. Пусть $\boldsymbol{f}_n(t,x) = \{f_n^1(t,x), f_n^2(t,x)\} \in C^3(\overline{E}_n)$, $\overline{E}_n = \{t,x\colon 0<t\leqslant T,\ 0<x<n\}$, $\boldsymbol{f}_n(t,0) = \{1/n, m_1\}$, $\boldsymbol{f}_n(t,n) = \boldsymbol{m}_{0n}(n)$, $\boldsymbol{m}_{0n}(x) = \{u_{0n}(x), m_{0n}(x)\} = \boldsymbol{f}_n(0,x)$.

Функции $\boldsymbol{m}_{0n}(x) \in C^3[0,\infty)$, аппроксимирующие в норме $\overline{C}^1(0,\infty)$ начальные профили $\boldsymbol{m}_0(x) = \{u_0(x), m_0(x)\}$, удовлетворяют условиям согласования в точках $(0,0)$, $(0,n)$ нулевого и первого порядков:

$$\boldsymbol{m}_{0n} = \{1/n, m_1\}, \quad L(u_{0n}(0), m_{0n}(0))\cdot\boldsymbol{m}_{0n}(0) = 0, \quad L(u_{0n}(n), m_{0n}(n))\cdot\boldsymbol{m}_{0n}(n) = 0.$$

Кроме того, эти функции удовлетворяют следующему условию:

4) $1/n < u_{0n}(x) < M_1$, $m_1 < w_{0n}(x) < M_1$, $u_{0n}'(x)>0$, $M_1 u_{0n}' - |m_{0n}'| > 0$ при $x\in[0,n]$, $n \geqslant N > 0$, где $M_1 = \sup\limits_{x\in[0,\infty)} \{u_0, m_0, M_0\} + 1/N$; N — положительное достаточно большое число.

Изменим коэффициент $a(u,w)u$ в системе уравнений (1), полагая $\tilde a(u,w) \equiv \chi_1(u) a(\chi_1(u), \chi_2(w))$, где через $\{\chi_1(u), \chi_2(w)\} \in C^2(-\infty,\infty)$ обозначены “срезки” функций u и w:

$$\chi_1(u) = \begin{cases} 1/(2n), & u \leqslant 1/(2n),\\ u, & u\in[1/n, M_1],\\ 2M_1, & u \geqslant 2M_1,\end{cases} \qquad \chi_2(w) = \begin{cases} m_1/2, & w\leqslant m_1/2,\\ w, & w\in[m_1,M_1],\\ 2M_1, & w\geqslant 2M_1.\end{cases}$$

Решения $\boldsymbol{w}_n(t,x)$ краевых задач

$$(\tilde a(u,w)\boldsymbol{w}_x)_x + b\boldsymbol{w}_x - \boldsymbol{w}_t = 0, \qquad (t,x)\in E_n; \tag{4}$$

$$\boldsymbol{w}(t,x) = \boldsymbol{f}_n(t,x) \qquad \text{при} \quad (t,x) \in \partial E_n = \overline{E}_n \setminus E_n \tag{5}$$

в случае $n \geqslant N$ в силу предполагаемой гладкости функций $\boldsymbol{f}_n(t,x)$, $\tilde a(u,w)$, $b(t)$ существуют, единственны и принадлежат пространству $C(\overline{E}_n) \cap C^{2+\alpha}(\overline{E}_n)$ (см. теорему 7.1 в [3]).

При $(t,x) \in E_n$ условие 4 позволяет на основе принципа максимума получить оценки

$$1/n \leqslant u_n(t,x) \leqslant M_1, \qquad m_1 \leqslant w_n(t,x) \leqslant M_1, \tag{6}$$

в силу которых

$$\chi_1(u_n(t,x)) \equiv u_n(t,x), \qquad \chi_2(w_n(t,x)) \equiv w_n(t,x),$$

т. е. решения $\boldsymbol{w}_n(t,x)$ краевых задач (4), (5) удовлетворяют также краевым задачам (1), (5).

3. Оценки решений вспомогательных краевых задач. Докажем следующую лемму:

Лемма 1. *В области E_n $(n > N)$ справедливы оценки*

$$|w_n(t,x) - w_n(t,l)| \leqslant M_2 |u_n(t,x) - u_n(t,l)|, \qquad l = 0, n; \tag{7}$$

$$u_{nx}(t,x) \geqslant 0, \qquad |w_{nx}(t,x)| \leqslant M_2\, u_{nx}(t,x); \tag{8}$$

$$|u_n \cdot \boldsymbol{w}_{nx}(t,x)| \leqslant M_2, \tag{9}$$

где M_2 — постоянная, не зависящая от n.

Неравенства (7), (8) доказаны в [1] (лемма 1) при $a(u,w) \equiv a(\theta)$, $b(t) \geqslant 0$. Приведенные в [1] доказательства оценок (7), (8) справедливы и в рассматриваемом случае.

Для доказательства (9) обе части уравнения (1) для компоненты $u = u_n$ умножим на $2u_n$. Обозначим

$$a_n = a(u_n, w_n), \qquad c_n = u_n \frac{\partial a_n}{\partial u_n}\, u_{nx} + u_n \frac{\partial a_n}{\partial w_n}\, w_{nx} + b.$$

Для $\sigma = u_n^2$ получим уравнение

$$\sigma_t = \sqrt{\sigma}\, a_n \sigma_{xx} + c_n \sigma_x. \tag{10}$$

Очевидно, коэффициенты этого уравнения удовлетворяют условиям теоремы 1 в [4], из которой следует равномерная относительно n ограниченность производной $\sigma_x = 2u_n u_{nx}$, а с учетом (8) — и производной $u_n w_{nx}$, что доказывает справедливость (9).

Лемма 2. *В области E_n выполняются оценки*

$$|\sigma(t_1,x) - \sigma(t_2,x)| \leqslant M_3 |t_1 - t_2|^{1/4}; \tag{11}$$

$$|w_n(t_1,x_1) - w_n(t_2,x_2)| \leqslant M_3 [\ln(|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2|)]^{-1}, \tag{12}$$

где M_3 не зависит от n.

Поскольку производная $\sigma_x(t,x)$ равномерно относительно n ограничена, для получения оценки (11) достаточно применить теорему 1 в [5] к решению $\sigma(t,x)$ уравнения (10).

Для доказательства (12) в уравнении для $w = w_n$ выполним замену искомой функции:

$$H(t,x) = \int\limits_0^{\omega_n} \mathrm{e}^{-1/\xi}\, d\xi, \qquad \omega_n = w_n - m_1 \quad (m_1 = \mathrm{const} > 0).$$

В результате получим уравнение

$$H_t = a_n u_n H_{xx} + b H_x + F(t,x), \tag{13}$$

где

$$F(t,x) = (a_n u_n)_x \omega_x\, \mathrm{e}^{-1/\omega} - a_n u_n \omega_x\, \mathrm{e}^{-1/\omega}/\omega^2 \qquad (\omega \equiv \omega_n).$$

Из оценки функций $F(t,x)$ и $H_x = \omega_x\, \mathrm{e}^{-1/\omega}$ с учетом неравенств (7) и

$$\mathrm{e}^{-1/\omega} \leqslant \mathrm{e}^{-1/(M_2(u_n - 1/n))}$$

следует, что $F(t,x)$ и производная H_x равномерно относительно n ограничены. Таким образом к решению $H(t,x)$ уравнения (13) применима теорема 1 в [5], откуда вытекает, что $H(t,x)$ удовлетворяет по t условию Гельдера с константой Гельдера и показателем, не зависящими от n:

$$|H(t_1,x_1) - H(t_2,x_2)| \leqslant c_0(|t_1-t_2| + |x_1-x_2|)^{\varkappa}, \qquad \varkappa \in (0,1). \tag{14}$$

Оценим $\delta H = H(t_1,x_1) - H(t_2,x_2)$ через $\delta w = w_1 - w_2 \equiv w_n(t_1,x_1) - w_n(t_2,x_2)$. Положим $\xi = \delta w\,\tau + w_2 - m_1$. Тогда

$$\delta H = \int\limits_{w_2-m_1}^{w_1-m_1} \mathrm{e}^{-1/\xi}\, d\xi = \delta w \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-1/(\delta w\,\tau + w_2 - m_1)}\, d\tau > c_1\,\mathrm{e}^{-c/(\delta w)}.$$

Отсюда следует

$$|\ln(\delta H/c_1)| \leqslant c/(\delta w).$$

С учетом (14) последнее неравенство легко преобразуется в неравенство (12). Неравенства (11), (12) обеспечивают равностепенную непрерывность последовательности $\{\boldsymbol{w}_n(t,x)\}$ на каждом компакте $E' \subset \overline{E}$.

Лемма 3. *В области* $\Pi = \{t,x\colon 0 < t \leqslant T,\ \beta t < x < n\}$ *при* $\beta \geqslant |b|$ *и достаточно малых значениях* γ, $1/\lambda$, $1/N$ *(не зависящих от* $n > N$*) функция* $g(t,x) = \gamma(1-\mathrm{e}^{-x+\beta t})\,\mathrm{e}^{-\lambda t} + 1/n$ *является нижней границей для* $u_n(t,x)$*:*

$$u_n(t,x) \geqslant 1/n + \gamma(1-\mathrm{e}^{-x+\beta t})\,\mathrm{e}^{-\lambda t}. \tag{15}$$

Доказательство. Положим

$$L_0(u_n)u \equiv a_n u u_{xx} + d_n(u)u_x^2 + bu_x - u_t,$$

где

$$d_n(u) = a_n - \frac{\partial a_n}{\partial u_n}\,u - M_2 u\,\frac{\partial a_n}{\partial w_n}, \qquad a_n = a(u_n,w_n).$$

Так как $|w_{nx}| \leqslant M_2 u_{nx}$, то $L_0(u_n)u_n \leqslant L(u_n,w_n)u_n$ при $(t,x) \in E_n$. Числа γ, $1/N$ выберем достаточно малыми, так чтобы разность $u_n(t,x) - g(t,x) \equiv z(t,x)$ на границе $\partial\Pi = \overline{\Pi} \setminus \Pi$ области Π была неотрицательной, а λ выберем достаточно большим, так чтобы выражение $L_0(u_n)g$ было положительным. Это возможно при $\beta \geqslant |b|$. Тогда выполняются неравенства

$$z(t,x)\big|_{\partial\Pi} \geqslant 0, \qquad L_0(u_n)u_n - L_0(u_n)g = L_1(u_n)z < 0, \qquad (t,x) \in \Pi$$

($L_1(u_n)$ — параболический оператор), которые в силу принципа максимума обеспечивают неотрицательность z всюду в области Π и тем самым справедливость оценки (15).

Замечание. Согласно лемме 3 множество $\Pi_{1/n}$ точек $(t,x) \in E_n$, в которых $u_n(t,x) = 1/n$, принадлежит области $E_n \setminus \Pi$.

Лемма 4. *Интегралы* $\displaystyle\iint\limits_{E'} u_n|\boldsymbol{w}_{nx}|^2\,dx\,dt$ *по любой конечной области* $E' \subset \overline{E}$ *равномерно относительно* n *ограничены:*

$$\iint\limits_{E'} u_n|\boldsymbol{w}_{nx}|^2\,dx\,dt \leqslant M_4. \tag{16}$$

Доказательство. Подставим $\boldsymbol{w}_n$ в (1). Умножив каждое из уравнений системы (1) на соответствующую компоненту u_n или w_n, проинтегрируем полученные уравнения по области E'. Интегралы, в которые входят производные $(a_nu_n\boldsymbol{w}_{nx})_x$, возьмем по частям, остальные оценим по модулю с использованием (7)–(9). В результате несложных вычислений получим оценку (16).

4. Предельный переход при $n \to \infty$**.** В силу полученных в п. **3** оценок функции $\boldsymbol{\omega}_n = \boldsymbol{w}_n - \boldsymbol{m}_1$ на каждом конечном компакте $E' \subset \overline{E}$ равностепенно-непрерывны, а производные $(u_n\boldsymbol{\omega}_n)_x$ равномерно ограничены. Используя принцип компактности и применяя диагональный процесс, выделим подпоследовательность $\boldsymbol{\omega}_{n_k}$, такую что при $n_k \to \infty$ она сходится равномерно к некоторой функции $\boldsymbol{\omega} = \{u(t,x), w(t,x) - m_1\}$, обладающей ограниченной обобщенной производной $(u\boldsymbol{\omega})_x$ [6. С. 42], и $(u_{n_k}\boldsymbol{\omega}_{n_k})_x$ сходится к $(u\boldsymbol{\omega})_x$ слабо в $L_2(E')$. Переобозначим $\boldsymbol{\omega}_{n_k} \equiv \boldsymbol{\omega}_n$.

Предельный переход в неравенствах (6), (11), (12) для $\boldsymbol{w}_n(t,x)$ при $n \to \infty$ позволяет установить, что $u(t,x)$, $w(t,x)$ неотрицательны и непрерывны в $\overline{E}$. Докажем, что $\boldsymbol{\omega}(t,x)$ удовлетворяет интегральному тождеству (3). Ясно, что интегральному тождеству (3) удовлетворяют функции ($E = E_n$)

$$\boldsymbol{\omega}_n(t,x) = \{u_n(t,x), w_n(t,x) - m_1\}.$$

Равномерная сходимость $\boldsymbol{\omega}_n \to \boldsymbol{\omega}$ позволяет осуществить предельный переход при $n \to \infty$ в тождестве (3), в частности, в интеграле $\displaystyle\iint\limits_{E_n} a_nu_nf_x\boldsymbol{\omega}_{nx}\,dt\,dx$. Положим $\varphi(t,x) = a\sqrt{u}$, $\boldsymbol{\psi}(t,x) = \sqrt{u}\,\boldsymbol{\omega}_x$. Через $\varphi_n(t,x)$, $\boldsymbol{\psi}_n(t,x)$ обозначим те же функции при $u_n = u_n(t,x)$, $\boldsymbol{\omega}_n = \boldsymbol{\omega}_n(t,x)$ и рассмотрим разности

$$(\varphi_n, \boldsymbol{\psi}_nf_x) - (\varphi, \boldsymbol{\psi}f_x) = (\varphi_n - \varphi, \boldsymbol{\psi}_nf_x) + (f_x\varphi, \boldsymbol{\psi}_n - \boldsymbol{\psi})_{C\Pi_\varepsilon} + (f_x\varphi, \boldsymbol{\psi}_n - \boldsymbol{\psi})_{\Pi_\varepsilon}, \tag{17}$$

где $(f,g) = \displaystyle\iint\limits_{E_n} fg\,dt\,dx$; $\Pi_\varepsilon = \{t,x\colon |u_n(t,x)| \leqslant \varepsilon,\ (t,x) \in E_n\}$; $C\Pi_\varepsilon = \overline{E}_n \setminus \Pi_\varepsilon$.

В правой части (17) первый член стремится к нулю при $n \to \infty$ вследствие равномерной сходимости φ_n к φ в $E' \subset E$. Интеграл по Π_ε мал равномерно относительно n при малых ε. При фиксированном ε интеграл по $C\Pi_\varepsilon$ стремится к нулю, так как в этой области производные $\boldsymbol{\omega}_{nx}$ равномерно по n удовлетворяют условию Гельдера (см. теорему 4.6 в [5]) и, следовательно, в области $C\Pi_\varepsilon$ $\boldsymbol{\omega}_{nx} \to \boldsymbol{\omega}_x$. В силу произвольности ε отсюда получаем $\lim\,(\varphi_n, \boldsymbol{\psi}_nf_x) = (\varphi, \boldsymbol{\psi}f_x)$.

Итак, предельная функция $\boldsymbol{\omega} \equiv \boldsymbol{w} - \boldsymbol{m}_1$ принадлежит классу $H(E)$ и удовлетворяет интегральному тождеству (3). Докажем, что в области, где $u(t,x) > 0$, функция $\boldsymbol{w}(t,x)$ удовлетворяет системе (1) в обычном смысле.

Пусть $(t_0, x_0) \in E$ и $u(t_0, x_0) > 0$. Поскольку последовательность $\boldsymbol{w}_n(t,x)$ равномерно сходится к $\boldsymbol{w}(t,x)$, можно указать номер N, такой что при всех $n \geqslant N$ неравенства $u_n(t,x) > 0$ будут выполняться в некотором прямоугольнике Π_0, содержащем точку (t_0, x_0). Тогда последовательность $\{\boldsymbol{w}_n(t,x)\}$ $(n \geqslant N)$ компактна в $C^{2+\alpha}(\Pi_0)$, и поэтому предельная функция $\boldsymbol{w}(t,x)$ в прямоугольнике Π_0 обладает производными $\boldsymbol{w}_t$, $\boldsymbol{w}_x$, $\boldsymbol{w}_{xx}$ и удовлетворяет системе уравнений (1) в обычном смысле. В частности, из теоремы 7.1 в [3] следует, что функция $\boldsymbol{w}(t,x) \in C^{2+\alpha}(\Pi_0)$ и является классическим решением системы уравнений (1) в области Π_0. Кроме того, из леммы в [7] следует, что $\lim\limits_{x\to\infty} \boldsymbol{w}(t,x) = \boldsymbol{m}_\infty$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Хуснутдинова Н. В.** Тепловой пограничный слой на пластине // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285, № 3. С. 605–608.
2. **Калашников С. А.** О возникновении особенностей у решений уравнений нестационарной фильтрации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1967. Т. 7. С. 440–444.
3. **Ладыженская О. А.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. М.: Наука, 1967.
4. **Хуснутдинова Н. В.** Об условиях ограниченности градиента решений вырождающихся параболических уравнений // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1985. Вып. 72. С. 120–123.
5. **Кружков С. Н.** Квазилинейные параболические уравнения и системы с двумя независимыми переменными // Труды семинара им. И. Г. Петровского. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1979. Вып. 6. С. 217.
6. **Соболев С. Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1950.
7. **Хуснутдинова Н. В.** Об условиях глобальной разрешимости краевых задач для системы уравнений стационарного пограничного слоя сжимаемой жидкости // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1982. Вып. 75. С. 113–130.

Поступила в редакцию 5/VI 2007 г.