

О НАГРЕВЕ СРЕДЫ ВСЛЕДСТИЕ ДЖОУЛЕВОЙ  
ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ

*A. B. Ватажин*

(*Москва*)

Известно, что при наличии магнитного поля и протекании по газу электрических токов векторе плотности потока тепла появляются дополнительные, по сравнению с обычной теплопроводностью, члены. Если газ достаточно плотный, а магнитное поле не чрезмерно велико, то анизотропией, обусловленной магнитным полем, можно пренебречь. Однако при достаточно сильном электрическом токе векторе плотности потока тепла остается член, пропорциональный температуре и вектору плотности тока. Этим эффектом, например, объясняется асимметрия тепловых потоков в электроды электромагнитного ускорителя непрерывного действия [1].

Это положение рассмотрим на примере полностью ионизированного квазинейтрального газа с одинаковыми электронной и ионной температурами.

Пусть плотность электрического тока  $j$ , протекающего по газу, имеет порядок  $10 \text{ а} / \text{см}^2$ , а внешнее магнитное поле равно нулю. Из уравнений Максвелла находим, что величина напряженности магнитного поля  $H$  имеет порядок  $4\pi c^{-1} j l$ , где  $l$  — характерный линейный размер изменения поля,  $c$  — скорость света в вакууме. Принимая  $l \sim 10 \text{ см}$ , находим

$$\omega_e \tau_e \approx \frac{0.77}{\lambda / 10} \frac{10^{14} T_{\circ}^{3/2}}{n_e} \quad (\tau_e = \frac{3.5 \cdot 10^4 T_{\circ}^{3/2}}{n_e \lambda / 10}, \omega_e = \frac{eH}{m_e c})$$

Здесь  $\lambda$  — кулоновский логарифм,  $T_{\circ}$  — температура в эв,  $e$  и  $m_e$  — соответственно заряд и масса электрона,  $n_e$  — плотность электронов,  $\tau_e$  — время рассеяния электронов на ионах. Так как  $(0.1 \lambda) \sim 1$ , то при  $T_{\circ} \sim 1$  и  $n_e \gtrsim 10^{16}$  параметр  $\omega_e \tau_e \ll 1$ . Это позволяет записать вектор плотности потока тепла в виде [2]

$$\mathbf{q} = -3.21 e^{-1} K T \mathbf{j} - 3.16 K^2 T \tau_e n_e m_e^{-1} \nabla T$$

Здесь  $T$  — температура в градусах,  $K$  — постоянная Больцмана. При  $j \sim 10 \text{ а} / \text{см}^2$  отношение  $2a$  первого члена ко второму имеет порядок

$$2a \sim 1.2 (\lambda / 10) (10^4 / |\nabla T|) T_{\circ}^{-3/2}$$

В этой оценке  $\nabla T$  имеет размерность *град / см*. При  $T_{\circ} \sim 1$  и  $|\nabla T| \sim 10^4$  параметр  $2a$  имеет порядок единицы. При больших плотностях тока величина этого параметра возрастает.

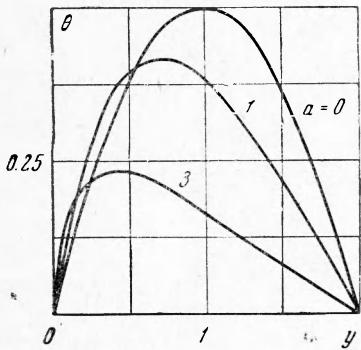
Для того чтобы изучить эффекты, обусловленные наличием векторе плотности потока тепла члена, пропорционального  $\mathbf{j}$ , в настоящей работе рассматривается задача о нагреве среды за счет протекания тока, вектор  $\mathbf{q}$  в которой имеет вид

$$\mathbf{q} = -k \nabla T - b \mathbf{j} T \quad (b = \text{const}) \quad (1)$$

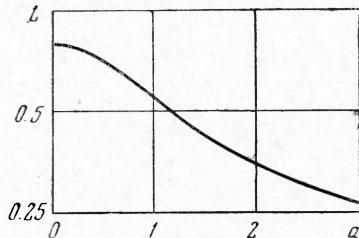
где  $k$  — коэффициент теплопроводности. Обсуждаются возможности использования полученного решения для оценки величины силы трения и интенсивности теплообмена при течении среды в электромагнитных ускорителях плазмы.

Рассмотрим плоский канал  $0 < Y < 2h$  со стенками — электродами, заполненный неподвижной проводящей средой, имеющей в момент  $t = 0$  температуру  $T_i = \text{const}$ . Пусть среда нагревается за счет протекания в направлении  $Y$  электрического тока, плотность которого поддерживается постоянной. Джоулем диссипацию в единице объема за единицу времени обозначим как  $w = w(t)$ . Будем считать, что стенки канала в процессе нагрева поддерживаются при постоянной температуре  $T_w$ . При постоянных  $k$ , плотности среды  $\rho$  и теплоемкости  $c_p$  в случае, когда вектор  $\mathbf{q}$

в выражается формулой (1), уравнение теплопроводности в безразмерных величинах принимает вид



Фиг. 1



Фиг. 2

выражается формулой (1), уравнение теплопроводности в безразмерных величинах принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + 2a \frac{\partial \theta}{\partial y} + v, \quad \theta(0, y) = \theta_i \quad \text{при } 0 < y < 2 \\ \theta(\tau, 0) &= 0, \quad \theta(\tau, 2) = 0 \\ \left( \theta = \frac{T - T_w}{T_w}, \quad Y = hy, \quad t = \frac{h^2 \rho c_p \tau}{k}, \quad 2a = \frac{b h}{k}, \quad v = \frac{w h^2}{k T_w} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Тепловые потоки  $G_+$  и  $G_-$ , отводимые через единицу поверхности нижнего и верхнего электродов за время  $t$ , равны

$$\begin{aligned} G_+ &= - \int_0^t q_y(t, 0) dt = \rho c_p h T_w g_+, \quad G_- = \int_0^t q_y(t, 2h) dt = \rho c_p h T_w g_- \\ g_+ &= 2a\tau + \int_0^\tau \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0} d\tau, \quad g_- = -2a\tau - \int_0^\tau \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=2} d\tau \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $q_y$  — проекция вектора  $\mathbf{q}$  на ось  $Y$ .

Интегрируя уравнение (2) по  $y$  от  $y = 0$  до  $y = 2$  и по времени, получим интегральное уравнение теплового баланса

$$2\theta_i + 2 \int_0^\tau v d\tau = g_+ + g_- + \int_0^2 \theta dy \quad (4)$$

Если  $v \rightarrow \text{const}$  при  $\tau \rightarrow \infty$ , то при  $\tau \rightarrow \infty$  устанавливается стационарный режим, распределение температур в котором имеет вид

$$\begin{aligned} \theta(y) &= \frac{\hat{\theta}(\infty, y)}{v} = \frac{1}{a} \left[ \frac{1 - \exp(-2ay)}{1 - \exp(-4a)} - \frac{y}{2} \right] \\ L(a) &= \frac{1}{v} \int_0^2 \theta(\infty, y) dy = \frac{2a - \operatorname{th} 2a}{2a^2 \operatorname{th} 2a} \end{aligned} \quad (5)$$

Графики функций  $\theta(y)$  и  $L(a)$  приведены на фиг. 1 и 2. Решение (5) показывает, что с ростом параметра  $a$  уровень температур в стационар-

ном режиме и количество тепла, которое приобретает среда в процессе выхода на стационарный режим, убывает. Профили температуры несимметричны относительно оси канала  $y = 1$ ; максимумы температуры смещаются в сторону анода.

Решение уравнения (2) ищем при помощи преобразования Лапласа

$$\vartheta^\circ(p, y) = \int_0^\infty \exp(-p\tau) \vartheta(\tau, y) d\tau$$

В изображениях уравнение (2) и его решение имеют вид

$$\begin{aligned} \vartheta'' + 2a\vartheta' - p\vartheta^\circ &= -Mp, \quad \vartheta^\circ(0) = 0, \quad \vartheta^\circ(2) = 0 \\ \vartheta^\circ &= M (\sinh 2x)^{-1} \{ \sinh 2x - e^{a(2-y)} \sinh xy - e^{-ay} \sinh [x(2-y)] \} \quad (6) \\ M = M(p) &= p^{-1} (\vartheta_i + v_c V^\circ), \quad x = \sqrt{p+a^2}, \quad V^\circ = \int_0^\infty \exp(-p\tau) V(\tau) d\tau \\ (v &= v_c V, \quad v_c = \text{const}) \end{aligned}$$

Для функции  $x(p)$  в плоскости  $p$  с разрезом по отрицательной оси от  $p = -a^2$  до бесконечно удаленной точки выбрана ветвь, которая положительна при действительных  $p > -a^2$ . Так как  $|\exp(-4x)| < 1$  при  $\operatorname{Re} p > 0$ , функцию  $(\sinh 2x)^{-1}$  можно разложить в ряд

$$(\sinh 2x)^{-1} = 2 \exp(-2x) \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-4kx) \quad (\operatorname{Re} p > 0)$$

Обозначим посредством  $r(t; \beta, a)$  и  $\mu(t; \beta, a)$  оригиналы изображений

$$r^\circ = p^{-1} \exp[-V\alpha(p+\beta)], \quad \mu^\circ = p^{-1} V^\circ \exp[-V\alpha(p+\beta)] \quad (\alpha, \beta = \text{const})$$

Тогда, заменив  $(\sinh 2x)^{-1}$  в выражении (6) указанным выше рядом, для функции  $\vartheta(\tau, y)$  можно получить выражение

$$\vartheta(\tau, y) = \vartheta_i + \int_0^\tau v d\tau + \vartheta_i \Gamma[r] + v_c \Gamma[\mu] \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Gamma[\Lambda] &= e^{-ay} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda[\tau; a^2, (4k-y)^2] - \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda[\tau; a^2, (4k+y)^2] \right\} + \\ &+ e^{a(2-y)} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda[\tau; a^2, (4k+2+y)^2] - \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda[\tau; a^2, (4k+2-y)^2] \right\} \end{aligned}$$

Можно найти [3]

$$r(\tau; \beta, \alpha) = 0.5 [\zeta(\tau; \beta, a) + \delta(\tau; \beta, a)] \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \zeta &= \exp(-V\alpha\beta) \operatorname{Erf}(0.5V\alpha/\tau - V\beta\tau), \quad \delta = \exp V\alpha\beta \operatorname{Erf}(0.5V\alpha/\tau + V\beta\tau) \\ &\quad \left( \operatorname{Erf} x = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-x^2) dx \right) \end{aligned}$$

Если  $v = \text{const}$ , то

$$\mu(\tau; \beta, \alpha) = 0.5\tau(\zeta + \delta) - \frac{V\alpha}{4V\beta} (\zeta - \delta) \quad (9)$$

В дальнейшем все формулы будут приведены для случая  $v = \text{const}$

При  $a = 0$  имеем

$$\begin{aligned} \Gamma(\Lambda) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \Lambda[\tau; 0, (2k-y)^2] - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Lambda[\tau; 0, (2k+y)^2] \\ \mu(\tau; 0, \alpha) &= (\tau + 0.5\alpha) \operatorname{Erf}(0.5\sqrt{\alpha/\tau}) - \pi^{-1/2} \sqrt{\alpha\tau} \exp(-\alpha/4\tau) \quad (10) \\ r(\tau; 0, \alpha) &= \operatorname{Erf}(0.5\sqrt{\alpha/\tau}) \end{aligned}$$

Тепловые потоки  $g_+$  и  $g_-$ , определенные при помощи (3), (7) – (9), и суммарный тепловой поток  $Q = g_+ + g_-$  равны

$$g_+ = 2a\tau + N(\tau), \quad g_- = N(\tau) - 2a\tau - \vartheta_i A - vB \quad (11)$$

$$\begin{aligned} N(\tau) &= a\tau\vartheta_i + 0.5av\tau^2 + \vartheta_i [\psi_0 + 2E - 2F \exp 2a] + v [v_0 + 2S - 2U \exp 2a] \\ E &= \sum_{k=2,4,6,\dots} \psi_k, \quad F = \sum_{k=1,3,5,\dots} \psi_k, \quad S = \sum_{k=2,4,6,\dots} v_k, \quad U = \sum_{k=1,3,5,\dots} v_k \\ \psi_k &= \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{k^2}{\tau} - a^2\tau\right) - 0.5k(\zeta + \delta) + \frac{1 + 2a^2\tau}{4a}(\zeta - \delta) \\ v_k &= \frac{\sqrt{\tau}}{2\sqrt{\pi}} \left(\tau + \frac{1}{2a^2}\right) \exp\left(-\frac{k^2}{\tau} - a^2\tau\right) - 0.5k\left(\tau + \frac{1}{4a^2}\right)(\zeta + \delta) + \\ &\quad + \frac{1}{8a} \left(2a^2\tau^2 + 2\tau + 2k^2 - \frac{1}{2a^2}\right)(\zeta - \delta) \end{aligned}$$

$$\zeta = \zeta(\tau; a^2, 4k^2), \quad \delta = \delta(\tau; a^2, 4k^2), \quad A = 2a\tau - 4F \sinh 2a, \quad B = a\tau^2 - 4U \sinh 2a$$

$$Q = 2\vartheta_i Q^* + 2vQ^{**}, \quad Q^* = \psi_0 + 2E - 2F \cosh 2a, \quad Q^{**} = v_0 + 2S - 2U \cosh 2a \quad (12)$$

При  $a = 0$  имеем

$$\begin{aligned} g_+ &= g_- = g, \quad g = \vartheta_i \left(\psi_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \psi_k\right) + v \left(v_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k v_k\right) \\ \psi_k &= \psi_k^\circ = 2\sqrt{\tau/\pi} \exp(-k^2/\tau) - 2k \operatorname{Erf}(k/\sqrt{\tau}) \quad (13) \\ v_k &= v_k^\circ = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{k^2}{\tau}\right) (\tau + k^2) - \operatorname{Erf}\left(\frac{k}{\sqrt{\tau}}\right) \left(2k\tau + \frac{4k^3}{3}\right) \end{aligned}$$

Если в случае  $a = 0$  искать оригиналы при помощи второй теоремы разложения [4], то для величины  $g$  получим выражение

$$\begin{aligned} g &= \vartheta_i - \frac{8\vartheta_i}{\pi^2} \sum_{\rho=0}^{\infty} \frac{\exp[-1/4\pi^2\tau(2\rho+1)^2]}{(2\rho+1)^2} + v \left(\tau - \frac{1}{3}\right) + \\ &\quad + \frac{32v}{\pi^4} \sum_{\rho=0}^{\infty} \frac{\exp[-1/4\pi^2\tau(2\rho+1)^2]}{(2\rho+1)^4} \quad (14) \end{aligned}$$

Выражение (13) удобно использовать при малых  $\tau$ , выражение (14) – при больших  $\tau$ . При малых  $a$  функции  $\psi_k$  и  $v_k$  представляются в виде

$$\begin{aligned} \psi_k &= \psi_k^\circ + a^2 \left[ \frac{2}{3} \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{k^2}{\tau}\right) (\tau + 4k^2) - \right. \\ &\quad \left. - 2k \operatorname{Erf}\left(\frac{k}{\sqrt{\tau}}\right) \left(\tau + \frac{4k^2}{3}\right) \right] + O(a^4) \\ v_k &= v_k^\circ + a^2 \left\{ -2k \operatorname{Erf}\left(k/\sqrt{\tau}\right) \left(\frac{1}{2}\tau^2 + \frac{4}{3}k^2\tau + \frac{2}{5}k^4\right) + \right. \\ &\quad \left. + \exp(-k^2/\tau) \left(\frac{4}{5}k^4 + \frac{34}{15}k^2\tau + \frac{4}{15}\tau^2\right) \right\} + O(a^4) \quad (15) \end{aligned}$$

При малых  $\tau$ , пренебрегая членами порядка  $\exp(-1/\tau)$ , имеем

$$Q \approx 2\vartheta_i \psi_0 + 2v v_0 = 2\vartheta_i \left[ \frac{V\tau}{V\pi} \exp(-a^2\tau) + \frac{1+2a^2\tau}{2a} \operatorname{erf}(a\sqrt{\tau}) \right] + \\ + 2v \left[ \frac{V\tau}{2V\pi} \left( \tau + \frac{1}{2a^2} \right) \exp(-a^2\tau) + \frac{1}{4a} \left( 2a^2\tau^2 + 2\tau - \frac{1}{2a^2} \right) \operatorname{erf}(a\sqrt{\tau}) \right] \quad (16)$$

$$(\operatorname{erf} x = 1 - \operatorname{Erf} x)$$

При малых  $\tau$  и  $a$ , используя (15) и (16), находим

$$Q \approx \frac{4\vartheta_i V\tau}{V\pi} \left( 1 + \frac{a^2\tau}{3} \right) + \frac{8v\tau V\tau}{3V\pi} \left( 1 + \frac{a^2\tau}{5} \right) \quad (17)$$

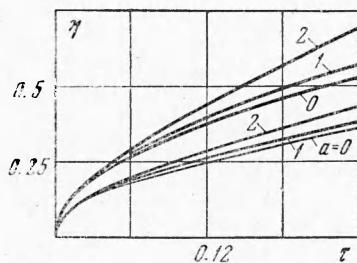
Эффективность теплоотвода в стенки характеризуется величиной

$$\eta \approx \frac{Q}{2v\tau + 2\vartheta_i} \quad (18)$$

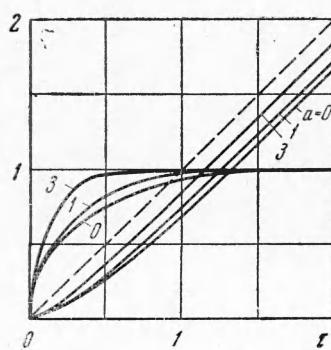
представляющей собой отношение тепловой энергии, отводимой через стенки за время  $\tau$ , к сумме подведенной за это время энергии и тепловой энергии, которой обладала среда при  $\tau = 0$ . Функция  $\eta(\tau)$  зависит от двух параметров:  $a$  и  $s = \vartheta_i/v$ . При  $\tau \rightarrow \infty$  имеем  $(dQ/d\tau) \approx 2v$  и  $\eta \rightarrow 1$ . Однако, как показывают расчеты,  $(dQ/d\tau) \approx 2v$  уже при  $\tau > \tau_*$ , где  $\tau_* \sim 1$ . Величина  $\tau_*$  является временем, в течение которого устанавливается стационарный режим. За это время среда теряет количество тепла  $2\vartheta_i$  и приобретает количество тепла  $vL(a)$ , равное разности между подведенным теплом  $2v\tau_*$  и отведенным через стенки  $2vQ^{**}(\tau_*)$ .

Результаты расчетов по формулам (12) — (18) представлены на фиг. 3—5. При малых  $\tau$  поведение величины  $\eta$  показано на фиг. 3. Для трех нижних кривых  $s = 0$ , для трех верхних  $s = 2$ . С ростом параметров  $a$  и  $s$  эффективность теплоотвода увеличивается.

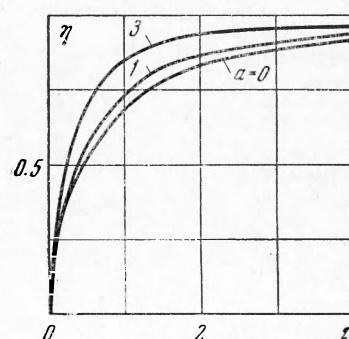
На фиг. 4 серия кривых, имеющих асимптоту  $\Phi(\tau) = 1$ , представляют собой зависимости  $Q^*(\tau)$ . Три кривые, которые при  $\tau \rightarrow \infty$  делаются параллельными биссектрисе  $\Phi(\tau) = \tau$ , являются графиками функции  $Q^{**}(\tau)$ . Для каждой кривой из первой серии можно указать  $\tau = \tau_*(\varepsilon)$ , начиная с которого разность между ординатами точек кривой и единице становится меньше  $\varepsilon = o(1)$ ; для каждой кривой из второй серии можно указать  $\tau = \tau_{**}(\varepsilon)$ , начиная с которого разность между углом наклона кривой к оси  $\tau$  и углом  $45^\circ$  меньше  $\varepsilon$ . Согласно фиг. 4, время  $\tau_*$  выхода на стационарный режим с ростом  $a$  уменьшается.



Фиг. 2



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 5 представлена зависимость  $\eta(\tau)$  при  $\vartheta_i = 0$  и различных значениях  $a$ . Увеличение этого параметра приводит к возрастанию эффективности теплоотвода.

Полезно отметить, что тепловую энергию  $2\theta_i$ , которой газ обладает при  $\tau = 0$ , можно рассматривать как энергию, полученную от тепловых источников, имеющих интенсивность  $v(\tau) = \vartheta_i \delta(\tau)$ , где  $\delta(\tau)$  — дельта-функция. Поэтому решение (7) — (9) будет также решением задачи о нагреве среды от температуры  $T_i = T_w$  в результате диссипации энергии с плотностью

$$w = \frac{kT}{h^2} [v + \vartheta_i \delta(\tau)] \quad (v = \text{const})$$

В заключение рассмотрим вопрос о возможности использования полученного решения для приближенной оценки величины сил трения и теплоотвода в электромагнитных ускорителях, имеющих постоянную по длине площадь поперечного сечения. При ускорении проводящего газа сильным электромагнитным полем градиентом давления в уравнении импульсов можно пренебречь [5], и тогда, если учесть вязкое трение газа, уравнение импульсов приближенно можно записать в виде

$$m \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f, \quad u(0) = 0, \quad u(2h) = 0 \quad (m = G / 2h = \text{const})$$

Здесь  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости,  $x$  — координата, отсчитываемая вдоль оси канала,  $G$  — секундный массовый расход газа,  $f$  — плотность ускоряющей электромагнитной силы. Если пренебречь начальным импульсом газа ( $u = 0$  при  $x = 0$ ) и принять  $f = \text{const}$ , то, используя полученное выше решение, можно найти, что отношение проинтегрированной по длине  $x$  силы трения к проинтегрированной по длине электромагнитной силе равно  $\eta(\tau)$  при  $\dot{\vartheta}_i = 0$ ,  $a = 0$ ,  $\tau = \tau_v = \mu x / h^2 m$ , где функция  $\eta(\tau)$  определена формулами (12), (18).

Рассмотрим уравнение энергии. При сильном электромагнитном поле и условии, что джоулема диссипация в канале ( $j^2 / \sigma$ ) по порядку величины равна работе электромагнитной силы за единицу времени ( $uf$ ), произведением скорости на градиент давления ( $u \partial p / \partial x$ ) в уравнении энергии можно пренебречь. Тогда приближенно

$$mc_p \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\partial q_u}{\partial y} + w, \quad T(x, 0) = T_w, \quad T(x, 2h) = T_w, \quad T(0, y) = T_i$$

Если тепловой поток имеет вид (1), то для оценок можно воспользоваться полученным решением. Отношение количества тепла, ежесекундно отводимого через стенки канала длины  $x$  и единичной ширины, к джоулемовой диссипации энергии в объеме  $x \times 2h \times 1$  равно  $\eta(\tau)$ , где  $\tau = \tau_q = \mu x / Ph^2 m$  ( $P$  — число Прандтля). В случае полностью ионизированного газа число Прандтля мало,  $\tau_v \ll \tau_q$ , и эффекты, связанные с теплопередачей, намного сильнее эффектов, связанных с влиянием вязкости. Если в векторе потока тепла имеется член, пропорциональный вектору плотности электрического тока, теплоотвод, как показано выше, происходит более интенсивно.

Поступила 28 V 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

- Oates G. C., Richmond J. K., Aoki Y., Grohs G. Loss mechanisms of a low temperature plasma accelerator. ARS Journ., 1962, vol. 32, No. 4, 541—548.
- Брагинский С. И. Явления переноса в плазме. Вопросы теории плазмы, вып. 1, Госатомиздат, 1963.
- Диткин В. А., Кузнецова П. И. Справочник по операционному исчислению. Гостехиздат, 1951, стр. 157.
- Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматиздат, 1958, стр. 483.
- Бам-Зеликович Г. М. Одномерное неустановившееся движение проводящего газа под действием сильных электромагнитных полей. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 2