Прикладная механика и техническая физика, 1997, т. 38, № 1

ОБ ОДНОМ ИНВАРИАНТНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

УДК 533

С. В. Головин

Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

Рассматривается задача построения инвариантного решения уравнений газовой динамики. В [1] показано, что в случае произвольного уравнения состояния этими уравнениями допускается группа G_{11}. Ниже исследовано инвариантное решение по серии трехпараметрических подгрупп из G_{11}, содержащей две произвольные константы (подалгебра 3.15 из табл. 6 [1]), которые влияют на вид решения. Неособое инвариантное решение существует, когда константы не обращаются в нуль одновременно, оно выражается конечными формулами. В случае, когда обе константы равны нулю, возможно построение частично инвариантного решения с дефектом инвариантности один или два. Изучение частично инвариантного решения ранга два дефекта один показывает, что оно относится к регулярным [2] и редуцируется к инвариантному относительно двухпараметрической группы, содержащейся в исходной трехпараметрической группе. Это решение описывается замкнутой системой уравнений, содержащей две независимые переменные. Для нее проведена групповая классификация относительно уравнения состояния.

1. Предварительные сведения. Рассматриваются уравнения газовой динамики:

$$D\mathbf{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0, \quad D\rho + \rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0, \quad DS = 0, \quad p = f(\rho, S). \tag{1.1}$$

Здесь $D = \partial_t + \mathbf{u}\cdot\nabla$; $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$; $\mathbf{u} = (u, v, w)$ — вектор скорости; ρ — плотность; p — давление; S — энтропия. Все функции зависят от времени t и координат $\mathbf{x} = (x, y, z)$; f — заданная функция.

Как известно (например, из [1]), в случае произвольной f система (1.1) допускает одиннадцатипараметрическую группу преобразований G_{11} базового пространства $R^9(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \rho, S)$. В данной работе изучается инвариантное решение, построенное по серии трехпараметрических подгрупп $H(\alpha, \beta) \subset G_{11}$ с алгеброй Ли, порожденной операторами

$$\begin{gathered} H_1 = \partial_z + t\partial_y + \partial_v, \quad H_2 = \partial_y - t\partial_z - \partial_w, \\ H_3 = \alpha\partial_x + \beta(t\partial_x + \partial_u) + y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v, \end{gathered} \tag{1.2}$$

где α и β — произвольные вещественные параметры, причем разным значениям α и β соответствуют неподобные относительно действия группы внутренних автоморфизмов G_{11} подалгебры. Поэтому решения, отвечающие разным α и β, существенно отличаются, т. е. не переводятся друг в друга преобразованиями из G_{11}.

Заметим, что фактор-система E/H всегда допускает нормализатор H в G, т. е. частично известны преобразования, допускаемые фактор-системой. В данной задаче нормализатору $H(\alpha, \beta)$ в G_{11} соответствует алгебра Ли, порожденная операторами

$$Y_1 = \partial_x, \quad Y_2 = t\partial_x + \partial_u, \quad Y_3 = \partial_z + t\partial_y + \partial_v, \quad Y_4 = \partial_y - t\partial_z - \partial_w,$$
$$Y_5 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v.$$

Эти преобразования позволяют упростить вид точного решения.

2. Условия существования инвариантного H-решения. В первую очередь необходимо проверить условия существования неособого инвариантного H-решения. Для этого проведем следующие построения. Обозначим $X = (t, x, y, z)$ и $Y = (u, v, w, \rho, S)$. Касательное отображение $\boldsymbol{\zeta}$ группы $H(\alpha,\beta)$ определяется уравнениями (1.2). Разобьем общий оператор $\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\partial}$ алгебры (1.2) на части так, что

$$\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\partial}=\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\partial}_X+\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\partial}_Y.$$

Пусть $r_*(\boldsymbol{\zeta})$ есть общий ранг касательного отображения $\boldsymbol{\zeta}$. Тогда, для того чтобы уравнения (1.1) имели неособое инвариантное H-решение, необходимо выполнение соотношений

$$r_*(\boldsymbol{\xi})=r_*(\boldsymbol{\zeta})\leqslant n. \tag{2.1}$$

В нашем случае $n=4$ и $r_*(\boldsymbol{\zeta})=3$ в то время, как

$$r_*(\boldsymbol{\xi})=\begin{cases}3, & \alpha^2+\beta^2\neq 0,\\ 2, & \alpha^2+\beta^2=0.\end{cases}$$

Таким образом, условие (2.1) выполняется лишь при $\alpha^2+\beta^2\neq 0$, т. е. при $\alpha^2+\beta^2=0$ неособое инвариантное H-решение построить нельзя.

3. Случай $\alpha^2+\beta^2\neq 0$. Построим инвариантное решение по группе $H(\alpha,\beta)$, алгоритм построения которого хорошо известен [3]. Универсальный инвариант группы $H(\alpha,\beta)$ можно выбрать следующим образом:

$$J=(t,\ \beta x-(\alpha+\beta t)u,\ U,\ x-(\alpha+\beta t)\,\Phi,\ \rho, S).$$

Здесь новые функции U и Φ определяются из соотношений $y-tv+w=U\cos\Phi$, $z-v-tw=U\sin\Phi$.

Ранг решения $\sigma=n-r_*(\zeta)=1$, поэтому представление инвариантного $H(\alpha,\beta)$-решения имеет вид

$$u=\frac{\beta x-b(t)}{\alpha+\beta t},\quad v=\frac{ty+z-U(t)(t\cos\Phi+\sin\Phi)}{t^2+1},$$
$$w=\frac{tz-y-U(t)(t\sin\Phi-\cos\Phi)}{t^2+1},\quad S=S(t),\quad \rho=\rho(t),\ \Phi=\frac{x-d(t)}{\alpha+\beta t} \tag{3.1}$$

Из (3.1) видно, что в искомом решении плотность зависит только от времени, т. е. оно описывает частный случай барохронных движений [4]. В результате подстановки представления решения в систему (1.1) получим фактор-систему E/H обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$b_t=0,\quad U_t=0,\quad d_t=\frac{\beta d-b}{\alpha+\beta t},\quad \rho_t+\rho\Big(\frac{\beta}{\alpha+\beta t}+\frac{2t}{t^2+1}\Big)=0,\quad S_t=0. \tag{3.2}$$

Решая систему (3.2) и используя представление (3.1), находим явный вид инвариантного решения уравнений газовой динамики по группе $H(\alpha,\beta)$:

$$u=\frac{\beta x-c_1}{\alpha+\beta t},\quad v=\frac{ty+z-c_3(t\cos\Phi+\sin\Phi)}{t^2+1},\quad w=\frac{tz-y-c_3(t\sin\Phi-\cos\Phi)}{t^2+1},$$
$$\Phi=\begin{cases}\dfrac{x-(\alpha+\beta t)c_2-c_1/\beta}{\alpha+\beta t}, & \beta\neq 0,\\ \dfrac{x+(c_1/\alpha)\,t-c_2}{\alpha}, & \beta=0,\end{cases} \tag{3.3}$$
$$\rho=\frac{\rho_0}{(t^2+1)(\alpha+\beta t)},\quad S=\text{const}.$$

Константы интегрирования c_i ($i=1,\,2,\,3$) произвольны. Вообще говоря, решение ищется с точностью до преобразований, допускаемых основными уравнениями (1.1). Поэтому для упрощения вида (3.3) можно использовать упомянутые выше преобразования из нормализатора $H(\alpha, \beta)$ в G_{11}. Таким образом, любое решение (3.3) приводится к стандартному виду, в котором c_1 и c_2 равны нулю. Действительно, эти константы «уничтожаются» при помощи преобразований сдвига и галилеева переноса по оси X. Кроме того, рассматривая решение (3.3) в классе барохронных движений, можно при $c_3 \neq 0$, $\alpha \neq 0$ получить $c_3 = 1$, $\alpha = 1$ посредством преобразования растяжения $(u, x) \to \alpha(u, x)$, $(v, y, w, z) \to c_3(v, y, w, z)$ (легко заметить, что оно допускается как уравнениями барохронных движений газа, так и фактор-системой (3.2)). Эквивалентный вид решения (3.3) при $c_3 \neq 0$, $\alpha \neq 0$ таков:

$$u = \frac{\beta x}{1 + \beta t}, \quad v = \frac{ty + z - (t\cos\Phi + \sin\Phi)}{t^2 + 1}, \quad w = \frac{tz - y - (t\sin\Phi - \cos\Phi)}{t^2 + 1},$$
$$\Phi = \frac{x}{1 + \beta t}, \quad \rho = \frac{\rho_0}{(t^2 + 1)(1 + \beta t)}, \quad S = \text{const}. \tag{3.4}$$

4. Траектории частиц. Траектории частиц на решении (3.4) описываются следующими формулами:

$$x = x_0(1 + \beta t), \quad y = y_0 + tz_0 - t\sin x_0, \quad z = z_0 - ty_0 + t\cos x_0. \tag{4.1}$$

Видно, что траектории частиц являются прямыми линиями. При этом движение частиц в целом нетривиально. Пусть, например, при $t = 0$ частицы находятся на прямой, параллельной оси X. Как видно из (4.1), при $t > 0$ они образуют спираль с периодом $2\pi(1 + \beta t)$ и радиусом t. Ось этой спирали заметает плоскость, оставаясь параллельной оси X. Одна из особенностей решения состоит в том, что, если $\beta < 0$, в момент времени $t = -1/\beta$ происходит коллапс: спираль «слипается» в окружность, а плотность возрастает до бесконечности.

singularity?

5. Характеристический коноид. На решении (3.4) отыскиваются звуковые характеристики уравнений газовой динамики в виде $h(t, \mathbf{x}) = \text{const}$. Соответствующие уравнения таковы:

$$h_t + uh_x + vh_y + wh_z = \pm c\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}. \tag{5.1}$$

Для уравнений (5.1) в случае характеристик C_+ уравнения бихарактеристик имеют вид

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{u} + c\nabla h/|\nabla h|, \quad dh_j/dt = -\mathbf{u}_j \cdot \nabla h - c_j|\nabla h| \quad (j = t, x, y, z), \tag{5.2}$$

где c — скорость звука; индекс j означает производную по соответствующим аргументам. *Характеристический коноид* является геометрическим местом всех бихарактеристик (5.2), выходящих из данной точки $P(\mathbf{x}_0, t_0)$.

Возьмем уравнение состояния политропного газа $p = \rho^\gamma$. Для простоты положим в решении (3.3) $c_3 = 0$. Тогда скорость звука $c = \sqrt{p_\rho} = \sqrt{\gamma}(1/[(t^2 + 1)(1 + \beta t)])^{(\gamma-1)/2}$. Интегрирование системы (5.2) приводит к соотношениям

$$x = x_0 + \beta t x_0 + (1 + \beta t)\int\limits_0^t \frac{Q(t)}{(1 + \beta t)^2}\, dt, \quad y = y_0 + \frac{s}{r}ty_0 + (r + st)\int\limits_0^t \frac{Q(t)}{t^2 + 1}\, dt,$$
$$z = z_0 - \frac{r}{s}tz_0 + (-rt + s)\int\limits_0^t \frac{Q(t)}{t^2 + 1}\, dt, \quad Q(t) = c(t)\left(\frac{r^2 + s^2}{t^2 + 1} + \frac{1}{(1 + \beta t)^2}\right)^{-1/2}. \tag{5.3}$$

Уравнения (5.3) с r, s, принимающими все действительные значения, дают параметрический вид характеристического коноида.

6. Случай $\alpha^2 + \beta^2 = 0$. При этом, как показано в п. **2**, построение неособого инвариантного H-решения невозможно. Рассмотрим частично инвариантное решение по подгруппе $H(0,0)$. Универсальный инвариант группы выглядит следующим образом:

$$J = (t, x, u, U, S, \rho). \tag{6.1}$$

Здесь функция U определяется из соотношений

$$U\cos\Phi = v - (ty+z)/(t^2+1), \quad U\sin\Phi = w - (tz-y)/(t^2+1). \tag{6.2}$$

Согласно [3], для существования частично инвариантного H-решения ранга $\sigma < n$ необходимо, чтобы для дефекта δ выполнялись неравенства $1 \leqslant \delta \leqslant 2$. Таким образом, существуют две возможности: решение дефекта $\delta = 1$ и ранга $\sigma = 2$, а также дефекта $\delta = 2$ и ранга $\sigma = 3$. Ниже исследована первая возможность.

Решение получается, если искать $m - \delta = 4$ из инвариантов (6.1) как функции двух других, т. е. инвариантные функции u, U, ρ, S в этом решении зависят только от t и x. Оставшаяся, «лишняя» функция Φ, вообще говоря, зависит от всех независимых переменных (t, x, y, z).

Подставляем полученные значения для искомых функций в (1.1), выразив предварительно v и w из (6.2). С использованием вспомогательной функции $h(t,x)$ запишем результаты подстановки. Система распадается на две подсистемы: инвариантную

$$\begin{gathered} u_t + uu_x + \frac{1}{\rho}p_x = 0, \quad \frac{1}{\rho}(\rho_t + u\rho_x + \rho u_x) + \frac{2t}{t^2+1} - Uh = 0, \\ S_t + uS_x = 0, \quad U_t + uU_x + \frac{Ut}{t^2+1} = 0 \end{gathered} \tag{6.3}$$

и дополнительную подсистему для «лишней» функции Φ:

$$\begin{gathered} \Phi_t + u\Phi_x + \Big(U\cos\Phi + \frac{ty+z}{t^2+1}\Big)\Phi_y + \Big(U\sin\Phi + \frac{tz-y}{t^2+1}\Big)\Phi_z - \frac{1}{t^2+1} = 0, \\ \sin\Phi\,\Phi_y - \cos\Phi\,\Phi_z - h = 0. \end{gathered} \tag{6.4}$$

На данном этапе вопрос о существовании искомого решения сводится к изучению совместности переопределенной системы (6.4).

Предложение. *Система* (6.4) *совместна, если и только если* $h(t,x) \equiv 0$. *При этом искомое частично инвариантное решение редуцируется к инвариантному.*

Для приведения системы (6.4) в инволюцию удобно отыскивать зависимость $\Phi = \Phi(t,x,y,z)$ в неявном виде: $F(t,x,y,z,\Phi) = 0$. Тогда уравнения (6.4) можно представить как действие на F линейных операторов:

$$\begin{gathered} \Omega_1 = \partial_t + u\partial_x + \Big(U\cos\Phi + \frac{ty+z}{t^2+1}\Big)\partial_y + \Big(U\sin\Phi + \frac{tz-y}{t^2+1}\Big)\partial_z + \frac{1}{t^2+1}\partial_\Phi, \\ \Omega_2 = \sin\Phi\partial_y - \cos\Phi\partial_z + h\partial_\Phi. \end{gathered}$$

Таким образом, подсистема (6.4) эквивалентна системе

$$\Omega_1 F = 0, \quad \Omega_2 F = 0. \tag{6.5}$$

Вообще говоря, система (6.5) является *активной*, т. е. может порождать новые независимые уравнения. Для операторов Ω_1 и Ω_2 составляем *коммутатор* $[\Omega_1, \Omega_2] = \Omega_1\Omega_2 - \Omega_2\Omega_1$. Обозначим

$$\Omega_3 = [\Omega_1, \Omega_2] + \frac{1}{t^2+1}\Omega_2 = \Big[\frac{2\cos\Phi}{t^2+1} + hU\sin\Phi\Big]\partial_y +$$

$$+\left[\frac{2\sin\Phi}{t^2+1} - hU\cos\Phi\right]\partial_z + \left[h_t + uh_x + \frac{ht}{t^2+1}\right]\partial_\Phi.$$

Ясно, что функция F должна быть также инвариантом оператора Ω_3. В то же время оператор Ω_3 линейно независим (линейную комбинацию можно брать с коэффициентами, зависящими от всех независимых переменных t, x, y, z, Φ) с операторами Ω_1 и Ω_2, так как следствием выражения $\Omega_3 = \lambda^1\Omega_1 + \lambda^2\Omega_2$ является противоречивое равенство $2/(t^2+1) = 0$. Итак, к системе (6.5) необходимо присоединить уравнение $\Omega_3 F = 0$.

Аналогичным образом вычисляется оператор Ω_4:

$$\Omega_4 = [\Omega_2, \Omega_3] = \left[\left(h^2U - h_t - uh_x - \frac{ht}{t^2+1}\right)\cos\Phi - h\,\frac{2\sin\Phi}{t^2+1}\right]\partial_y +$$
$$+\left[\left(h^2U - h_t - uh_x - \frac{ht}{t^2+1}\right)\sin\Phi + h\,\frac{2\cos\Phi}{t^2+1}\right]\partial_z.$$

Для линейной зависимости Ω_4 от Ω_1, Ω_2 и Ω_3 необходимо, чтобы для функции h выполнялось уравнение

$$\frac{2h^2}{t^2+1} + \frac{t^2+1}{2}\left(h^2U - h_t - uh_x - \frac{ht}{t^2+1}\right)^2 = 0,$$

из которого следует

$$h(t,x) \equiv 0. \tag{6.6}$$

Ясно, что в противном случае из Ω_2, Ω_3, Ω_4 можно выразить (в виде их линейной комбинации) оператор ∂_Φ, т. е. имеет место уравнение $F_\Phi = 0$, что означает несовместность системы (6.4). В случае (6.6) выражения для операторов Ω_i $(i = 1, 2, 3)$ упрощаются:

$$\Omega_1 = \partial_t + u\partial_x + \frac{ty+z}{t^2+1}\partial_y + \frac{tz-y}{t^2+1}\,\partial_z + \frac{1}{t^2+1}\,\partial_\Phi,$$
$$\Omega_2 = \sin\Phi\,\partial_y - \cos\Phi\,\partial_z, \quad \Omega_3 = \cos\Phi\,\partial_y + \sin\Phi\,\partial_z.$$

Легко убедиться, что эта система операторов находится в инволюции. Возвращаясь к явному заданию функции Φ, получим систему уравнений в инволюции, эквивалентную (6.4): $\Phi_t + u\Phi_x = 1/(t^2+1)$, $\Phi_y = 0$, $\Phi_z = 0$.

Заметим, что из двух последних уравнений следует зависимость «лишней» функции Φ только от инвариантных переменных t и x. Это говорит о том, что на самом деле решение редуцируется к инвариантному. Действительно, искомое решение является инвариантным относительно подгруппы, порожденной операторами H_1 и H_2.

При $h \equiv 0$ фактор-система (6.3) упрощается и вместе с уравнениями для Φ принимает вид

$$\begin{gathered} u_t + uu_x + p_x/\rho = 0, \quad \rho_t + u\rho_x + \rho(u_x + 2t/(t^2+1)) = 0, \quad S_t + uS_x = 0, \\ U_t + uU_x + Ut/(t^2+1) = 0, \quad \Phi_t + u\Phi_x = 1/(t^2+1), \quad \Phi_y = 0, \quad \Phi_z = 0, \quad p = f(\rho, S). \end{gathered} \tag{6.7}$$

7. Интегрирование системы (6.7). Заменой переменных $R = \rho(t^2+1)$ первые два уравнения (6.7) запишем в форме

$$u_t + uu_x + (t^2+1)p_x/R = 0, \quad R_t + (uR)_x = 0. \tag{7.1}$$

Лагранжева координата $\xi(t,x)$ вводится соотношениями $R = \xi_x$, $Ru = -\xi_t$, в силу которых второе уравнение (7.1) выполнено автоматически. Последние уравнения (6.7) интегрируются: $S = S(\xi)$, $U = U_0(\xi)/\sqrt{t^2+1}$, $\Phi = \operatorname{arctg} t + \Phi_0(\xi)$. Здесь $S(\xi)$, $U_0(\xi)$, $\Phi_0(\xi)$ —

произвольные функции своего аргумента. Вычисление производных и подстановка в первое уравнение (7.1) приводят к уравнению для лагранжевой координаты ξ:

$$\xi_x^2\xi_{tt} - 2\xi_t\xi_x\xi_{tx} + (\xi_t^2 - c^2\xi_x^2)\xi_{xx} = (t^2+1)\,\xi_x^3 f_S S'(\xi) \tag{7.2}$$

($c^2 = f_\rho(\rho, S)$ — квадрат скорости звука). Таким образом, система (6.7) свелась к одному квазилинейному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка (7.2).

Можно провести исследование фактор-системы (6.7), используя методы группового анализа дифференциальных уравнений. Заметим, что первые три уравнения системы (6.7) образуют независимую подсистему для функций u, S, ρ. Знание этих функций позволяет легко проинтегрировать оставшиеся уравнения. Кроме того, для группового анализа удобнее вместо уравнения для энтропии использовать уравнение для давления: $Dp + A(p,\rho)\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$, где $A(p,\rho)$ — заданная функция состояния (ее физический смысл $A(p,\rho) = \rho c^2$). Ясно, что функция ρ будет инвариантом группы H, т. е. для построения H-решения необходимо считать p зависящей от инвариантных переменных t и x. Далее будет изучаться следующая система:

$$\begin{gathered} u_t + uu_x + p_x/\rho = 0, \quad \rho_t + u\rho_x + \rho(u_x + 2t/(t^2+1)) = 0, \\ p_t + up_x + A(p,\rho)(u_x + 2t/(t^2+1)) = 0. \end{gathered} \tag{7.3}$$

8. Групповая классификация. Для системы (7.3) решается задача групповой классификации относительно «произвольного элемента» — функции $A(p,\rho)$. Искомые операторы запишем в виде

$$X = \xi^t\partial_t + \xi^x\partial_x + \xi^u\partial_u + \xi^p\partial_p + \xi^\rho\partial_\rho.$$

Проверка известного критерия [5] показывает, что система (7.3) x-автономна для произвольной функции $A(p,\rho)$, т. е. координаты ξ^t и ξ^x могут зависеть только от переменных t и x. С учетом этого система определяющих уравнений сводится к следующему. Координата ξ^t не зависит от x, т. е. может зависеть только от t. Для координат ξ^u, ξ^p, ξ^ρ имеются выражения

$$\xi^u = {\xi_t}^x - u\xi_t^t + u\xi_x^x, \quad \xi^p = \varphi(t)\,p + \psi(t), \quad \xi^\rho = \rho(\varphi(t) + 2\xi_t^t - 2\xi_x^x) \tag{8.1}$$

($\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — произвольные функции переменной t). Координаты ξ^t и ξ^x должны удовлетворять соотношениям

$$2\xi_{tx}^x = \xi_{tt}^t, \quad \xi_{xx}^x = \xi_{tt}^x = 0, \quad \varphi_t + 3\xi_{tx}^x + 2t{\xi_t}^t/(t^2+1) + 2(1-t^2)\,\xi^t/(t^2+1)^2 = 0. \tag{8.2}$$

Последнее уравнение служит для определения $\varphi(t)$, а из остальных для ξ^t, ξ^x следует представление

$$\xi^x = c_0tx + c_1t + c_2x + c_3, \quad \xi^t = c_0t^2 + b_1t + b_2 \tag{8.3}$$

с константами c_i $(i = 0, \ldots, 3)$ и b_j $(j = 1, 2)$.

Классифицирующими являются уравнения

$$\begin{gathered} A\varphi = (\varphi p + \psi)\,A_p + \rho(\varphi + 2\xi_t^t - 2\xi_x^x)\,A_\rho, \quad KA(p,\rho) = Rp - \psi_t, \\ K = \xi_{tx}^x + \frac{2t}{t^2+1}\,\xi_t^t + \frac{2(1-t^2)}{(t^2+1)^2}\,\xi^t, \quad R = K + 2\xi_{tx}^x. \end{gathered} \tag{8.4}$$

В силу зависимости K, R и ψ только от t из второго уравнения (8.4) имеем

$$KA_\rho = 0. \tag{8.5}$$

Номер расширения ядра	A	k	Y
1	$f(p,\rho)$	2	—
2	$pf(p\rho^{-\gamma})$, $\gamma \neq 0{,}1$	3	$(\gamma-1)Y_1 + 2\gamma Y_2$
3	$pf(p/\rho)$	3	Y_2
4	$f(p)$	3	Y_1
5	$pf(\rho)$	3	$Y_1 + Y_2$
6	γp, $\gamma \neq 0;\ 1;\ 5/3$	4	$Y_1,\ Y_2$
7	$(5/3)p$	5	$Y_1,\ Y_2,\ Y_6$
8	$f(\rho e^{-p})$	3	$-Y_1 + 2Y_3$
9	$f(\rho)$	3	Y_3
10	$\gamma\rho^\gamma$, $\gamma \neq 0{,}1$	4	$(\gamma-1)Y_1 + 2\gamma Y_2,\ Y_3$
11	ρ	4	$Y_2,\ Y_3$
12	1	4	$Y_1,\ Y_3$
13	p	6	$Y_1,\ Y_2,\ Y_4,\ Y_5$
14	0	∞	$Y_1,\ Y_\varphi$

Рассматривается случай $K = 0$. Из (8.4) вытекает $\psi_t = 0$, $\xi^x_{tx} = 0$, $2t\xi^t_t + (2(1-t^2)/(t^2+1))\xi^t = 0$, отсюда следует, что в (8.3) $c_0 = 0$. Учитывая (8.1)–(8.3), получим $\varphi = \varphi_0$, $\psi = \psi_0$ — константы, а также

$$\xi^t = 0, \quad \xi^x = c_1 t + c_2 x + c_3, \quad \xi^u = c_1 + c_2 u, \quad \xi^p = \varphi_0 p + \psi_0, \quad \xi^\rho = \rho(\psi_0 - 2c_2). \tag{8.6}$$

Преобразуем первое уравнение (8.4):

$$\varphi_0(pA_p + \rho A_\rho - A) + \psi_0 A_p - 2c_2\rho A_\rho = 0. \tag{8.7}$$

При произвольных значениях A, A_p, A_ρ уравнение (8.7) выполняется, если только $\varphi_0 = 0, \psi_0 = 0, c_2 = 0$, т. е. ядро основных групп уравнений (7.3) есть двухпараметрическая группа Ли с операторами

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = t\partial_x + \partial_u. \tag{8.8}$$

Для проведения групповой классификации была найдена группа преобразований эквивалентности. Ее фактор-группа по ядру порождается операторами $X_1^a = x\partial_x + u\partial_u - 2\rho\partial_\rho$, $X_2^a = \partial_p$, $X_3^a = p\partial_p + \rho\partial_\rho + A\partial_A$. Таким образом, преобразования эквивалентности $A(p,\rho)$ образуют трехпараметрическую группу, действующую по формулам $p' = \alpha_3 p + \alpha_2$, $\rho' = \alpha_1\alpha_3\rho$, $A' = \alpha_3 A$ (α_i — произвольные параметры, причем $\alpha_1 > 0$, $\alpha_3 > 0$).

Итак, при $K = 0$ выражение для координат оператора задается формулами (8.6) с единственным соотношением (8.7), связывающим константы φ_0, ψ и c_2. Анализ (8.7) проводился тем же методом, что и в [3]. В результате получены все случаи расширения ядра основных групп, перечисленные в таблице, кроме случаев 7 и 13.

Осталось рассмотреть вторую возможность, предоставляемую уравнением (8.5): $A_\rho = 0$. Тогда из второго уравнения (8.4) следует (с точностью до преобразований эквивалентности) $A = \gamma p$, $\gamma = \mathrm{const}$ и

$$(\gamma-3)\xi^x_{tx} + (\gamma-1)\left(\frac{2t}{t^2+1}\xi^t_t + \frac{2(1-t^2)}{(t^2+1)^2}\xi^t\right) = 0, \quad \psi_t = 0. \tag{8.9}$$

Новые расширения ядра (8.8) можно получить только при $\gamma = 1$ и $5/3$. В обоих случаях из первого уравнения (8.4) $\psi \equiv 0$. При $\gamma = 5/3$, подставляя (8.3) в (8.9), находим $c_0 = b_2$, $c_1 = 0$. С использованием (8.1), (8.2) получим

$$\xi^t = c_0(t^2+1), \quad \xi^x = c_0 tx + c_1 t + c_2 x + c_3,$$

$$\xi^u = c_0 x + c_1 + u(c_2 - c_0 t), \quad \xi^p = (-5c_0 t + \varphi_0)p, \quad \xi^\rho = \rho(-3c_0 t - 2c_2 + \varphi_0).$$

Ядро основных групп расширяется на три оператора: Y_1, Y_2, Y_6.

При $\gamma = 1$ из (8.9) $\xi^x_{tx} = 0$, т. е. в (8.3) $c_0 = 0$. Интегрируя последнее уравнение (8.2), находим выражение $\varphi(b_1, b_2) = -2b_1 t^2/(t^2+1) - 2b_2 t/(t^2+1) + \varphi_0$, подстановка которого в (8.1) для координат оператора X дает $\xi^t = b_1 t + b_2$, $\xi^x = c_1 t + c_2 x + c_3$, $\xi^u = c_1 - u(b_1 - c_2)$, $\xi^p = \varphi(b_1, b_2)p$, $\xi^\rho = \rho(\varphi(b_1, b_2) + 2b_1 - 2c_2)$. Ядро основных групп расширяется на четыре оператора: Y_1, Y_2, Y_4, Y_5.

Результаты групповой классификации представлены в таблице, где приведены вид функции $A(p, \rho)$, дающий расширение ядра, размерность допускаемой группы преобразований и операторы, расширяющие ядро основных групп (8.8). В расширении ядра участвуют следующие операторы:

$$Y_1 = x\partial_x + u\partial_u - 2\rho\partial_\rho, \quad Y_2 = p\partial_p + \rho\partial_\rho, \quad Y_3 = \partial_p,$$

$$Y_4 = \partial_t - \frac{2t}{t^2+1}p\partial_p - \frac{2t}{t^2+1}\rho\partial_\rho, \quad Y_5 = t\partial_t - u\partial_u - \frac{2t^2}{t^2+1}p\partial_p + \frac{2}{t^2+1}\rho\partial_\rho,$$

$$Y_6 = (t^2+1)\partial_t + tx\partial_x + (x - ut)\partial_u - 5tp\partial_p - 3t\rho\partial_\rho, \quad Y_\varphi = \rho\varphi'(p)\partial_\rho + \varphi(p)\partial_p.$$

Здесь $\varphi(p)$ — произвольная функция.

На основе данной групповой классификации возможно более полное исследование системы (7.3) с использованием свойств симметрии, заложенных в этих уравнениях.

Автор благодарит Л. В. Овсянникова за ценные советы и внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17326).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // ПММ. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.
2. **Овсянников Л. В.** Регулярные и нерегулярные частично инвариантные решения // Докл. РАН. 1995. Т. 343, № 2. С. 156–159.
3. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
4. **Ovsyannikov L. V., Chupakhin A. P.** Regular partially invariant submodels of gas dynamics equations // Nonlinear Mathematical Physics. 1995. V. 2, N 3–4. P. 236–246.
5. **Овсянников Л. В.** О свойстве x-автономии // Докл. РАН. 1993. Т. 330, № 5. С. 559–561.

Поступила в редакцию 25/XII 1995 г.