14. **Соснин О. В., Горев Б. В., Никитенко А. Ф.** Энергетический вариант теории ползучести.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1986.
15. **Федоров В. В.** Термодинамические представления о прочности и разрушении твердого тела // Пробл. прочности.— 1971.— № 11.
16. **Федоров В. В.** Термодинамический метод оценки длительной прочности // Пробл. прочности.— 1972.— № 9.
17. **Киялбаев Д. А., Чудновский А. И.** О разрушении деформируемых тел // ПМТФ.— 1970.— № 3.
18. **Чудновский А. И.** Некоторые вопросы разрушения деформируемых твердых тел // Изв. АН СССР. МТТ.— 1969.— № 5.
19. **Астафьев В. И.** Энтропийный критерий разрушения при ползучести (рост вязких трещин) // Прочность и надежность конструкций.— Куйбышев: КуАИ, 1981.
20. **Локощенко А. М., Шестериков С. А.** К проблеме оценки длительной прочности при ступенчатом нагружении // ПМТФ.— 1982.— № 2.
21. **Локощенко А. М., Наместникова И. В.** Описание длительной прочности при ступенчатом нагружении // Пробл. прочности.— 1983.— № 1.
22. **Локощенко А. М., Шестериков С. А.** Модель длительной прочности с немонотонной зависимостью деформации при разрушении от напряжения // ПМТФ.— 1982.— № 1.
23. **Дачева М. Д., Локощенко А. М., Шестериков С. А.** Модельное представление предельной деформации при ползучести // ПМТФ.— 1984.— № 4.
24. **Ковпак В. И.** Методы прогнозирования длительной прочности и ползучести металлических материалов на большие сроки службы: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук.— Киев, 1979.
25. **Планк М.** Принципы сохранения энергии.— М.; Л.: ГОНТИ, 1938.
26. **Федоров В. В.** Кинетика поврежденности и разрушения твердых тел.— Ташкент: Фан, 1985.
27. **Малинин Н. Н.** Прикладная теория пластичности и ползучести.— М.: Машиностроение, 1975.
28. **Работнов Ю. Н., Милейко С. Т.** Кратковременная ползучесть.— М.: Наука, 1970.
29. **Ковпак В. И.** К вопросу о достоверном определении начала ускоренной стадии ползучести // Пробл. прочности.— 1973.— № 12.
30. **Мухина Л. Г.** Вычисление характеристик ползучести по опытным данным с применением метода непараметрического выравнивания // Теоретико-экспериментальный метод исследования ползучести в конструкциях.— Куйбышев: КПтИ, 1984.
31. **Самарин Ю. П.** Уравнения состояния материалов со сложными реологическими свойствами.— Куйбышев: КГУ, 1979.
32. **Расчетные** и расчетно-экспериментальные методы определения несущей способности и долговечности элементов машин и конструкций. Расчетно-экспериментальный метод определения параметров ползучести и длительной прочности при одноосном нагружении в условиях нестационарного нагружения (1-я редакция).— М.: Госстандарт, 1982.
33. **Соснин О. В., Соснин О. О.** О термопластичности // Пробл. прочности.— 1988.— № 12.
34. **Соснин О. В., Торшенов Н. Г.** О ползучести и разрушении титанового сплава ОТ-4 при постоянной температуре // Пробл. прочности.— 1970.— № 5.
35. **Баумштейн М. В., Бадаев А. И.** К вопросу определения области «лавинной» ползучести // Пробл. прочности.— 1980.— № 5.
36. **Осасюк В. В.** Прогнозирование остаточного ресурса материала элементов конструкций энергетического оборудования после длительной эксплуатации: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук.— Киев, 1987.
37. **Радченко В. П., Кузьмин С. В.** Структурная модель накопления повреждений и разрушения металлов при ползучести // Пробл. прочности.— 1989.— № 11.
38. **Маклаков В. П.** О связи прочностных свойств с плотностью внутренней энергии в процессе ползучести конструкций // Ползучесть и длительная прочность конструкций.— Куйбышев, КПтИ, 1986.

г. Куйбышев *Поступила 13/III 1990 г.*

УДК 548.552.24

А. Э. ПУРО

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАКАЛОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПРИЗМАТИЧЕСКИХ ОБРАЗЦАХ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОТОУПРУГОСТИ

Предполагается, что образец выполнен из стекла и остаточные напряжения носят закалочный характер, т. е. тензор остаточных деформаций является шаровым и описывается эффективной температурой T [1—3]. Температура образца значительно ниже температуры стеклования, и поэтому выполняется интегральный закон Вертгейма [4, 5]. Параметры, характеризующие образец, не зависят от осевой координаты z и компоненты тензора напряжений $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$. В качестве упрощений предполагаются постоянными показатель преломления и C — оптическая постоянная фотоупругости. Просвечивание проводится в плоскости, нормальной к оси образца z.

Рассматриваемая задача фактически расчленяется на две: 1) определение σ_{zz} методом интегральной фотоупругости и 2) нахождение остальных компонент тензора напряжений σ_{ij} с использованием решения первой задачи и уравнений теории упругости. Ранее полное решение такой задачи было получено только для круглых цилиндров [6—8]. Оно основывалось на применении решения осесимметричной задачи термоупругости для круглого цилиндра [9].

В данной работе метод распространяется на сечение произвольной формы и произвольное распределение напряжения σ_{zz} вдоль сечения. Метод, в частности, может быть применен для определения закалочных напряжений в заготовках многослойных световодов.

В более ранних работах [5, 10] при исследовании остаточных напряжений ограничивались нахождением σ_{zz}.

1. При просвечивании в плоскости, нормальной к оси z, определяются только лучевые интегралы [4, 8]

$$C\int(\sigma_{zz}-\sigma_{nn})\,dl=C\int\sigma_{zz}\,dl. \tag{1.1}$$

Здесь σ_{nn} — компонента напряжений, нормальная к лучу l в плоскости x, y. Последнее равенство в (1.1) получено из условия равновесия сегмента поперечного слоя призмы в направлении n при учете, что боковая поверхность призмы свободна от нагрузок и $\sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0$ [10, 11]. Таким образом, определение σ_{zz} сводится к стандартной процедуре обращения преобразования Радона [11, 12].

Для нахождения остальных компонент тензора напряжений воспользуемся уравнениями равновесия и законом Гука для среды с остаточными деформациями, причем, следуя [1—3, 8], остаточные деформации будем определять эффективной температурой T посредством коэффициента линейного теплового расширения α: $\varepsilon^0_{xx}=\varepsilon^0_{yy}=\varepsilon^0_{zz}=\alpha T(x,y)$.

В случае плоской деформации закон Гука в этих обозначениях переходит в соотношения Дюгамейля — Неймана [13] (ν — коэффициент Пуассона)

$$\sigma_{ij}=2\mu[\varepsilon_{ij}+\delta_{ij}[\nu e-(1+\nu)\alpha T]/(1-2\nu)],$$
$$\sigma_{zz}=2\mu[\nu e-(1+\nu)\alpha T]/(1-2\nu),\quad e=\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy},\ i,j=x,y$$

(μ — модуль сдвига, δ_{ij} — символ Кронекера).

Удовлетворим уравнениям равновесия введением функции Эйри F:

$$\sigma_{ij}=\delta_{ij}\Delta F-\frac{\partial^2}{\partial i\,\partial j}F. \tag{1.2}$$

Подставляя в уравнение совместности $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\varepsilon_{xx}+\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\varepsilon_{yy}=2\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\varepsilon_{xy}$ компоненты тензора деформации $\varepsilon_{ij}=\dfrac{1}{2\mu}[\sigma_{ij}-\sigma_{zz}\delta_{ij}]$, выраженные через F, получаем разрешающее уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}F\right]+2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}F\right]+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial y^2}F\right]=\Delta\left(\frac{1}{\mu}\sigma_{zz}\right). \tag{1.3}$$

На свободной боковой поверхности F и ее нормальная производная равны нулю [13].

2. Рассмотрим особенности применения уравнений к определению закалочных напряжений в заготовках многослойных световодов. В этом случае типичным будет использование сочетания материалов, у которых коэффициент сдвига μ отличается на $2\div3$ %, в то время как коэффициент Пуассона может отличаться на $10\div20$ % [14]. Так, для световода с жилой из боросиликатного стекла и оболочкой из кварцевого стекла различие в коэффициенте μ не превосходит 3 %. Следовательно, можно считать, что для таких образцов коэффициент μ является постоянным.

Уравнение (1.3) упрощается:

$$\Delta^2F=\Delta\sigma_{zz}. \tag{2.1}$$

Порядок уравнения (2.1) можно понизить, записав его в форме

$$\Delta F=\sigma_{zz}-\chi \tag{2.2}$$

(χ — произвольная гармоническая функция).

Докажем, что для разрешимости граничной задачи относительно F необходимо и достаточно, чтобы функция χ была равна гармонической части σ_{zz}. Для этого умножим обе части уравнения (2.2) на произвольную дважды дифференцируемую функцию u и проинтегрируем выражение по площади сечения

$$\int\int u\Delta F\, ds = \int\int u\,(\sigma_{zz} - \chi)\, ds. \tag{2.3}$$

Преобразуем левую часть уравнения (2.3), используя формулу Грина

$$\int\int (u\Delta F - F\Delta u)\, ds = \int \left(u \frac{\partial}{\partial r} F - F \frac{\partial}{\partial n} u\right) dl. \tag{2.4}$$

Правая часть равенства (2.4) равна нулю, так как F и ее нормальная производная на границе равны нулю. Поэтому уравнение (2.3) преобразуется к виду

$$\int\int F\Delta u\, ds = \int\int u\,(\sigma_{zz} - \chi)\, ds. \tag{2.5}$$

Уравнение (2.5) должно выполняться при любых u. Если u — гармоническая функция, то левая часть (2.5) равна нулю. Следовательно, $\sigma_{zz} - \chi$ должна быть ортогональна любой гармонической функции, т. е. χ должна быть равна гармонической части σ_{zz}.

Докажем, что вышеприведенное условие относительно χ является достаточным. Для этого подставим в (2.5) вместо u элементарное решение уравнения Лапласа u_1: $u = u_1 = [\ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}]/(2\pi)$. Учитывая, что оператор Лапласа от u_1 равен дельта-функции Дирака, имеем

$$F(x_0, y_0) = \int\int (\sigma_{zz} - \chi) \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\, dx\, dy/(2\pi).$$

Из необходимых свойств χ следует, что u_1 определено с точностью до аддитивной гармонической функции.

В частности, если распределение σ_{zz} зависит только от радиуса, то гармоническая часть σ_{zz} равна постоянной — среднему значению σ_{zz} по сечению. Из условия равновесия следует, что это среднее значение равно нулю, т. е. χ тоже равно нулю. Следовательно, из уравнения (2.2) получаем в этом случае закон суммы [4, 6, 7] $\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$. Из этого примера видно, что выполнение закона суммы зависит от распределения σ_{zz}, но не от формы сечения.

3. Уравнение (1.3) имеет явное решение только для частных закономерностей $\mu(x, y)$. Так, решение краевой задачи относительно F при $\mu(x, y) = \mu_0/(a + bx + cy)$ практически сводится к случаю $\mu = \text{const}$. Этот результат становится очевидным, если уравнение (1.3) преобразовать к форме

$$\Delta\left[\frac{1}{\mu}\Delta F\right] - \Delta\left[\frac{1}{\mu}\sigma_{zz}\right] = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}F\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{\mu}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}F\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{1}{\mu}\right) - 2\left(\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}F\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\frac{1}{\mu}\right).$$

При произвольной функциональной зависимости $\mu(x, y)$ для решения краевой задачи необходимо использовать численные методы. При этом обычно применяется вариационная формулировка. Решение рассматриваемой краевой задачи эквивалентно нахождению функции F, удовлетворяющей граничным условиям и обеспечивающей экстремум функционалу

$$J = \int\int \frac{1}{\mu}\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)^2 - \sigma_{zz}\Delta F\right] ds.$$

Не останавливаясь более подробно на численных методах, рассмотрим зависимость напряжения от коэффициента сдвига μ на примере осесимметричной задачи для двухслойного круглого цилиндра

$$\mu(r) = \begin{cases} \mu_0 & \text{при } 0 \leqslant r < r_0, \\ \mu_1 & \text{при } r_0 \leqslant r \leqslant 1. \end{cases}$$

Решение будем проводить в цилиндрической системе координат r, φ. Неизвестные компоненты $\sigma_{rr} = \sigma_r$, $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_\varphi$ будем разыскивать из уравнения равновесия

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) = \sigma_\varphi$$

и уравнения совместности

$$\frac{d}{dr}[(\sigma_\varphi - \sigma_{zz})/\mu] = (\sigma_r - \sigma_\varphi)/\mu r. \tag{3.1}$$

Непосредственно применение уравнения (1.3) в этом случае является трудно выполнимым, так как μ — недифференцируемая функция. Исключая из (3.1) σ_φ, выражаем σ_{zz} через σ_r:

$$\sigma_{zz} = \frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \mu \int\limits_r^1 \frac{1}{\mu}\left(\frac{d}{dx}\sigma_r(x)\right) dx - A.$$

Постоянная A определяется из условия равновесия

$$\int\limits_0^1 r\sigma_{zz}\, dr = 0.$$

После элементарных преобразований получаем

$$\sigma_{zz}(r) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r^2\sigma_r\right) + \frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_1}\sigma_r(r_0)\cdot\begin{cases}\left(1 - r_0^2\right) & \text{при} \quad 0 \leqslant r < r_0, \\ \left(-r_0^2\right) & \text{при} \quad r_0 \leqslant r \leqslant 1.\end{cases} \tag{3.2}$$

Нахождение σ_r по заданному σ_{zz} из выражения (3.2) сводится к интегрированию, и дальнейшее решение задачи элементарно.

Заметим, что (3.2) можно записать в виде модифицированного закона суммы

$$\sigma_{zz} = \sigma_\varphi + \sigma_r + \frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_1}\sigma_r(r_0)\cdot\begin{cases}\left(1 - r_0^2\right) & \text{при} \quad 0 \leqslant r < r_0, \\ \left(-r_0^2\right) & \text{при} \quad r_0 \leqslant r \leqslant 1.\end{cases} \tag{3.3}$$

Помимо непосредственного использования формулы (3.2), (3.3) позволяют оценить возможность применения модели с постоянным коэффициентом сдвига μ для многослойных структур.

Возвращаясь к рассмотрению общего случая, отметим, что закалочные напряжения методом интегральной фотоупругости определяются в следующей последовательности. Сначала определяется σ_{zz} при помощи обращения преобразования Радона, потом из решения краевой задачи (1.3) находятся F и соответственно по формулам (1.2) остальные компоненты напряжений.

Автор признателен Х. К. Абену за внимание к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Tool A. Q.** Relation between inelastic deformability and thermal expansion of glass in its annealing range // J. Amer. Ceram. Soc.— 1946.— V. 29, N 9.
2. **Бартенев Г. М.** Механические свойства и тепловая обработка стекла.— М.: Госстройиздат, 1960.
3. **Инденбом В. Л., Вилро Л. И.** Термопластические и структурные напряжения в твердых телах // Физика твердого тела.— 1964.— Т. 6, вып. 4.
4. **Абен Х. К.** Интегральная фотоупругость.— Таллинн: Валгус, 1975.
5. **Chu P. L., Whitbread T.** Measurement of stresses in optical fiber and preform // Appl. Optics.— 1986.— V. 25, N 7.
6. **Poritsky H.** Analysis of thermal stresses in scaled cylinders and the effect of viscous flow during anneal // Phys.— 1934.— N 12.
7. **O'Rourkl R. C.** Three-dimensional photoelasticity // J. Appl. Phys.— 1951.— V. 22, N 7.
8. **Aben H.** Tomographie optique des champs de constraintes // Rev. Francaise de Mecanique.— 1989.— N 1.
9. **Тимошенко С. П., Гудьер Д.** Теория упругости.— М.: Наука, 1979.
10. **Abe T., Misunage Y., Koga H.** Novel measurement method for axial residual stress *in optical* fibre // Electronics letters.— 1985.— V. 21, N 1.
11. **Пуро А. Э.** Томография при слабой оптической анизотропии // Тез. докл. 4-го Всесоюз. симпоз. по вычислительной томографии.— Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1989.— Т. 1.
12. **Lewitt R. M.** Reconstruction algorithms: tranform methods // Proc. IEEE.— 1983.— V. 71, N 3.
13. **Новацкий В.** Теория упругости.— М.: Мир, 1975.
14. **Levi L.** Applied optics: A guide to optical system design.— N. Y., 1980.— V. 2.

г. Таллинн

Поступила 8/I 1990 г., в окончательном варианте — 14/III 1990 г.