

УДК 532.591

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ ПЛАТФОРМЫ, ПЛАВАЮЩЕЙ НА МЕЛКОВОДЬЕ

Л. А. Ткачева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Исследуется спектральная задача для упругой платформы (аэропорта), плавающей на мелководье. Платформа моделируется упругой полосой конечной ширины и бесконечной длины. Обнаружена волноводная собственная мода, которая распространяется вдоль платформы и экспоненциально затухает вдали от нее. Остальные собственные моды являются уходящими и экспоненциально растущими вдали от платформы. Все собственные моды могут возбуждаться только внешним воздействием на платформу. Изучено поведение платформы под действием внешней нагрузки.

В настоящее время задаче о плавающих упругих платформах исследователи уделяют внимание в связи с применением платформ при разработке полезных ископаемых на шельфе, проектированием плавающих аэропортов и т. д. [1, 2]. При этом особый интерес представляет исследование спектральных свойств задачи, позволяющее прогнозировать опасное воздействие на платформу, при котором может наблюдаться повышенный уровень амплитуд колебаний и напряжений. Следует отметить, что в большинстве работ не учитывается погружение платформы в воду, т. е. граничные условия на нижней поверхности платформы переносятся на невозмущенную поверхность воды. Полученные в данной работе результаты показывают, что отношение глубины погружения платформы к глубине жидкости является хотя и малым, но существенным параметром для собственных колебаний платформы на мелководье.

Постановка задачи и метод решения. Платформа моделируется упругой пластиной постоянной толщины, конечной ширины и бесконечной длины. Жидкость предполагается идеальной несжимаемой, глубина ее мала по сравнению с размерами пластины, но велика по сравнению с ее толщиной, поэтому движение жидкости можно описывать с помощью теории мелкой воды. Амплитуды колебаний предполагаются малыми, задача рассматривается в линейной постановке.

В соответствии с теорией мелкой воды [3] потенциал скорости жидкости φ на свободной части ее поверхности удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta\varphi - \frac{1}{gH} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где g — ускорение свободного падения; H — глубина жидкости; t — время. На нижней поверхности платформы выполнены соотношения [3]

$$w_t = -(H - d)\Delta\varphi; \quad (2)$$

$$p = -\rho\varphi_t - \rho g(w - d), \quad (3)$$

где w — нормальные перемещения платформы; d — глубина ее погружения в воду; p — давление на нижней поверхности платформы; ρ — плотность жидкости.

Уравнение колебаний пластины имеет вид [4]

$$D\Delta\Delta w + \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p. \quad (4)$$

Здесь D — цилиндрическая жесткость платформы; h — ее толщина; ρ_0 — плотность материала; Δ — двумерный оператор Лапласа относительно горизонтальных координат.

Края платформы не закреплены. Поскольку частично платформа погружена в воду, то со стороны жидкости на края платформы действует нагрузка. Согласно законам механики действующая на систему сила равна изменению количества движения системы в единицу времени. Введем декартову систему координат с осью y , направленной вдоль полосы, осью x — в поперечном направлении и осью z — в вертикальном. Платформа шириной l занимает отрезок $-l/2 \leq x \leq l/2$. Рассмотрим часть жидкости, находящуюся между сечениями $x = x_1$ и $x = x_2$ ($x_1 < l/2 < x_2$). Изменение количества движения в единицу времени равно разности потоков количества движения через сечения $x = x_1$ и $x = x_2$: $\rho(H-d)(\varphi_x)^2|_{x=x_1} - \rho H(\varphi_x)^2|_{x=x_2}$. Эта величина является малой второго порядка относительно амплитуды колебаний. В линейном приближении перерезывающую силу и момент на краях пластины считаем равными нулю:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (5)$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Периодическое по времени решение будем искать в виде $\varphi = \sqrt{gH} l \Phi \exp(-i\omega t)$, пространственные переменные отнесем к характерному горизонтальному размеру l . Тогда из (1) для амплитуды потенциала Φ получим уравнение Гельмгольца на свободной части поверхности жидкости

$$\Delta\Phi + \lambda^2\Phi = 0, \quad (6)$$

где $\lambda = \omega l / \sqrt{gH}$ — безразмерная комплексная частота. При этом на бесконечности слева и справа от платформы должны быть выполнены условия излучения, которые означают отсутствие приходящих волн.

Подставляя (2) и (3) в (4), уравнение для потенциала скорости жидкости под пластиной запишем в виде

$$\Delta^3\Phi + (G - B\lambda^2)\Delta\Phi + G\lambda^2\Phi/(1-\varepsilon) = 0. \quad (7)$$

Здесь $G = \rho g l^4 / D$, $B = \rho_0 g h H l^2 / D$, $\varepsilon = d/H$ — безразмерные входные параметры. Из сделанных при постановке задачи предположений следует, что $B \ll G$, $\varepsilon \ll 1$. При выводе уравнения (7) вес платформы и гидростатическая составляющая давления не учитываются, так как они влияют только на статическую часть прогиба платформы.

Кроме условий (5) на краях пластины, должны выполняться условия сопряжения на границе двух областей. Условия сопряжения выведены в [3] из законов сохранения массы и энергии. На краях платформы потенциал непрерывен, а нормальная производная имеет разрыв. Для полосы эти условия приобретают вид

$$\begin{aligned} \Phi(l/2-0) &= \Phi(l/2+0), & (H-d)\Phi_x(l/2-0) &= H\Phi_x(l/2+0), \\ \Phi(-l/2-0) &= \Phi(-l/2+0), & (H-d)\Phi_x(-l/2+0) &= H\Phi_x(-l/2-0). \end{aligned} \quad (8)$$

Решение задачи находится следующим методом. Строится общее решение с неопределенными коэффициентами в каждой из областей. Из граничных условий и условий сопряжения получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов. Условием существования нетривиального решения является равенство нулю определителя этой системы. Исследование собственных колебаний платформы

на воде сводится к поиску значений спектрального параметра λ , для которых определитель системы равен нулю. Эти значения находятся численно с помощью принципа аргумента [5].

Абсолютно жесткая платформа. Рассмотрим абсолютно жесткую платформу и собственные колебания платформы как твердого тела на воде. Ее нормальные перемещения представим в виде $w = l(\alpha_0 x + z_0) \exp(-i\omega t)$, где z_0 и α_0 — амплитуды вертикального смещения центра масс и поворота вокруг него. Перемещения платформы связаны с потенциалом и давлением соотношениями (2), (3).

Перейдем в (2) и (3) к безразмерным переменным P и Φ по формулам

$$p = \rho g l P \exp(-i\omega t), \quad \varphi = \sqrt{gH} l \Phi \exp(-i\omega t),$$

а координату x отнесем к характерному размеру l . Получим

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = i\lambda \frac{l}{H-d} (z_0 + \alpha_0 x), \quad P = i\lambda \frac{H}{l} \Phi - \alpha_0 x - z_0,$$

отсюда потенциал и давление под платформой

$$\Phi = i\lambda \frac{l}{H-d} \left(\alpha_0 \frac{x^3}{6} + z_0 \frac{x^2}{2} \right) + \gamma x + \delta,$$

$$P = -\frac{\lambda^2}{1-\varepsilon} \left(\alpha_0 \frac{x^3}{6} + z_0 \frac{x^2}{2} \right) + i\lambda \frac{H}{l} (\gamma x + \delta) - \alpha_0 x - z_0.$$

С учетом (6) и условия излучения потенциал вне платформы можно представить в виде

$$\Phi = \begin{cases} R \exp(i\lambda(x - 1/2)), & x > 1/2, \\ T \exp(-i\lambda(x + 1/2)), & x < -1/2. \end{cases}$$

Таким образом, для шести неизвестных констант (α_0 , z_0 , γ , δ , R , T) имеем по два условия сопряжения (8) на краях платформы и два уравнения движения платформы как твердого тела

$$-\omega^2 M l z_0 = \rho g l^2 \int_{-1/2}^{1/2} P dx, \quad -\omega^2 I \alpha_0 = \rho g l^3 \int_{-1/2}^{1/2} P x dx$$

(M — масса платформы, I — момент инерции платформы). Подставляя выражение для P в эти соотношения и интегрируя, получим

$$z_0 \left(1 + \frac{\lambda^2}{24(1-\varepsilon)} - \lambda^2 b \right) - i\lambda \frac{H}{l} \delta = 0, \quad \alpha_0 \left(1 + \frac{\lambda^2}{40(1-\varepsilon)} - \lambda^2 b \right) - i\lambda \frac{H}{l} \gamma = 0,$$

где $b = B/G$. Таким образом, получили однородную систему линейных алгебраических уравнений шестого порядка. Условие существования нетривиального решения дает равенство нулю определителя этой системы. В силу свойств симметрии можно разделить моды на симметричные и антисимметричные относительно плоскости $x = 0$. Тогда система разделится на две системы третьего порядка.

Итак, определение собственных частот сводится к нахождению корней полиномов третьего порядка:

$$[i/(3(1-\varepsilon)^2) + 4ib/(1-\varepsilon)]\lambda^3 - 2\lambda^2/(1-\varepsilon) - 4i\lambda/(1-\varepsilon) = 0$$

для симметричных мод,

$$[i/(15(1-\varepsilon)^2) + 4ib/(1-\varepsilon)]\lambda^3 - [i/(5(1-\varepsilon)) + 8b]\lambda^2 - 4i\lambda/(1-\varepsilon) + 8 = 0$$

для антисимметричных мод.

Для симметричных мод получаем одно собственное значение $\lambda_1 = 0$ и два комплексных собственных значения, а для антисимметричных — одно чисто мнимое собственное значение и два комплексных. Все собственные значения расположены в нижней полуплоскости и симметричны относительно мнимой оси.

Упругая платформа. Рассмотрим упругие колебания платформы. Предполагаем, что потенциал и перемещения периодичны по y : $\varphi = \sqrt{gH} l\Phi(x) \exp(i(k_2 y - \omega t))$, где k_2 — безразмерное волновое число в направлении y , а Φ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - k_2^2\right)^3 \Phi + (G - B\lambda^2)\left(\frac{d^2}{dx^2} - k_2^2\right)\Phi + \frac{G\lambda^2}{1 - \varepsilon} \Phi = 0 \quad \text{при } |x| < 1/2 \quad (9)$$

и уравнению (6) при $|x| > 1/2$. Из уравнения (6) и условий излучения следует, что вне платформы решение имеет вид

$$\Phi = \begin{cases} R \exp[i\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}(x - 1/2)], & x > 1/2, \\ T \exp[-i\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}(x + 1/2)], & x < -1/2. \end{cases} \quad (10)$$

При этом ветвь корня выбирается таким образом, чтобы обеспечить условие излучения, т. е. $-\pi/2 < \arg\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} \leq \pi/2$. Условие излучения используется здесь для выбора однозначного решения. При $\operatorname{Re}\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} > 0$ решение соответствует волнам, уходящим от платформы, а при $\operatorname{Re}\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} = 0$ оно локализовано вблизи платформы и экспоненциально затухает вдали от нее.

Условия сопряжения имеют вид (8), а граничные условия (5) —

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \nu k_2^2\right)\left(\frac{d^2}{dx^2} - k_2^2\right)\Phi = 0, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2}{dx^2} - (2 - \nu)k_2^2\right)\left(\frac{d^2}{dx^2} - k_2^2\right)\Phi = 0. \quad (11)$$

Общее решение уравнения (9) ищем в виде разложения по функциям вида $\exp(\sigma x)$, где σ удовлетворяет уравнению

$$(\sigma^2 - k_2^2)^3 + (G - B\lambda^2)(\sigma^2 - k_2^2) + G\lambda^2/(1 - \varepsilon) = 0. \quad (12)$$

Заметим, что уравнение (12) является кубическим относительно $\sigma^2 - k_2^2$, поэтому для его решения можно применить формулы Кардано. В общем случае (12) имеет шесть различных корней σ_i ($i = 1, \dots, 6$), а функции $\exp(\sigma_i x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (9). Однако при некоторых значениях параметра λ уравнение (12) имеет кратные корни. Формулы Кардано позволяют найти такие значения λ . Рассмотрим случай $k_2 = 0$. Уравнение (12) принимает вид

$$\sigma^6 + (G - B\lambda^2)\sigma^2 + G\lambda^2/(1 - \varepsilon) = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) имеет двукратный корень $\sigma = 0$ при $\lambda = 0$. Значения λ , при которых уравнение (13) имеет ненулевые кратные корни, определяются соотношением

$$\left(\frac{G - B\lambda^2}{3}\right)^3 + \left(\frac{G\lambda^2}{2(1 - \varepsilon)}\right)^2 = 0. \quad (14)$$

Поскольку $B \ll G$, то в первом приближении можно положить $B = 0$, тогда четыре корня определяются соотношением

$$\lambda^4 = -4G(1 - \varepsilon)^2/27. \quad (15)$$

Соответствующие значения λ лежат на биссектрисах квадрантов. При $B \neq 0$ поправку к этим значениям можно найти методом возмущений. Два других корня ищем асимптотическим методом. Сделаем замену $\lambda = G^{1/4}\varkappa$, а уравнение (14) запишем в виде

$$(1 - \delta^2 \varkappa^2)^3 + 27\varkappa^4/(4(1 - \varepsilon)^2) = 0, \quad \delta^2 = B/\sqrt{G}. \quad (16)$$

При $\delta \rightarrow 0$ четыре корня остаются конечными и определяются соотношением (15), а два других корня не ограничены. Будем искать их в виде $\varkappa = c/f(\delta)$, где $f(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$; c — константа. Подставляя это выражение в (16), получим

$$1 - 3 \frac{\delta^2}{f^2} c^2 + 3 \frac{\delta^4}{f^4} c^4 - \frac{\delta^6}{f^6} c^6 + \frac{27}{4(1-\varepsilon)^2} \frac{c^4}{f^4} = 0. \quad (17)$$

При $\delta \rightarrow 0$ главные члены уравнения должны иметь одинаковый порядок, поэтому $\delta^6/f^6 = 1/f^4$, $f = \delta^3$. Уравнение (17) переписывается в виде

$$\delta^{12} - 3\delta^8 c^2 + 3\delta^4 c^4 - c^6 + 27c^4/(4(1-\varepsilon)^2) = 0.$$

При $\delta \rightarrow 0$ имеем $c^4[c^2 - 27/(4(1-\varepsilon)^2)] = 0$, отсюда получаем два ненулевых значения c , которым соответствуют значения $\lambda = \pm 3\sqrt{3}/(2(1-\varepsilon))(G/B^{3/2})$.

В случае $k_2 \neq 0$ значения λ , при которых имеются ненулевые кратные корни уравнения (12), те же, что и в случае $k_2 = 0$. Уравнение (12) имеет нулевые кратные корни $\sigma_{1,2} = 0$ при $\lambda_0^2 = (k_2^6 + Gk_2^2)/(Bk_2^2 + G/(1-\varepsilon))$. Оба значения $\pm\lambda_0$ лежат на действительной оси.

Для всех значений λ , за исключением указанных выше, решения $\exp(\sigma_i x)$ ($i = 1, \dots, 6$) представляют собой фундаментальную систему решений уравнения (9) при $k_2 = 0$. Потенциал скорости жидкости под пластиной имеет вид $\Phi = \sum_{k=1}^6 C_k \exp(\sigma_k x)$, $-1/2 < x < 1/2$, потенциал вне пластины — вид (10).

Из условий сопряжения и граничных условий получаем систему линейных алгебраических уравнений, определитель которой должен равняться нулю. Определитель системы является аналитической функцией от λ во всей комплексной плоскости, за исключением особых точек и разреза на действительной оси $[-k_2, k_2]$. Особыми точками могут быть точки ветвления корней, т. е. значения спектрального параметра λ , для которых уравнение (12) имеет кратные корни. В этом случае система частных решений $\exp(\sigma_i x)$ становится линейно зависимой, и одно из решений $\exp(\sigma_i x)$ необходимо заменить на $x \exp(\sigma_i x)$.

В силу симметрии задачи для исследования собственных колебаний системы удобно разделить их на симметричные и антисимметричные относительно плоскости $x = 0$. Потенциал скорости под платформой для симметричных мод запишем в виде $\Phi = \sum_{k=1}^3 c_k \operatorname{ch}(\sigma_k x)$, $|x| < 1/2$, а для антисимметричных мод $\Phi = \sum_{k=1}^3 c_k \operatorname{sh}(\sigma_k x)$, $|x| < 1/2$.

Из граничных условий и условий сопряжения получаем две системы линейных алгебраических уравнений четвертого порядка. Поиск собственных значений вне интервала $[-k_2, k_2]$ осуществлялся численно с помощью принципа аргумента [5]. Параметр k_2 задавался, и исследовалась зависимость безразмерной частоты λ от k_2 для собственных мод. Следует отметить, что собственные значения симметричны относительно мнимой оси. Если λ является собственным значением, то $-\bar{\lambda}$ также будет собственным значением.

На берегах разреза $[-k_2, k_2]$ определитель системы — чисто мнимая величина. Проводился расчет определителя системы при различных значениях $\lambda \in [-k_2, k_2]$. Смена знака мнимой части свидетельствует о наличии нуля.

Результаты численных расчетов. Численные расчеты проводились для модели плавающего аэропорта понтонного типа при следующих параметрах задачи [1]: ширина платформы $l = 1250$ м, толщина $h = 4,5$ м, осадка $d = 1,8$ м, глубина слоя воды $H = 22$ м, масса платформы на единицу площади $m = 1,8$ т/м², коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, жесткость $D = 10^{12}$; 10^{14} Н/м. Безразмерные входные параметры: $b = B/G = 0,000\,025$, $\varepsilon = 0,08$, $G = 10\,000$; 100 .

ε	λ	
	Симметричные моды	Антисимметричные моды
0	0; $\pm 1,73 - 3,0i$	$-4,64i$; $\pm 3,51 - 3,67i$
0,01	0; $\pm 1,75 - 2,97i$	$-4,476i$; $\pm 3,55 - 3,69i$
0,08	0; $\pm 1,85 - 2,75i$	$-3,53i$; $\pm 3,82 - 3,74i$
0,1	0; $\pm 1,87 - 2,7i$	$-3,34i$; $\pm 3,89 - 3,73i$

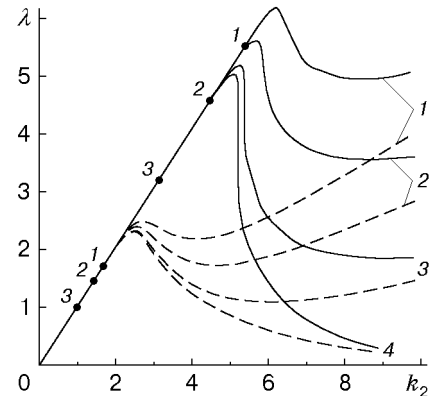


Рис. 1

Из расчетов следует, что для упругой полосы, как и для жесткой платформы, имеется шесть собственных мод: три симметричных и три антисимметричных. При $k_2 = 0$ и $D \rightarrow \infty$ гидроупругие частоты стремятся к соответствующим значениям для жесткой платформы.

Расчеты показали существенное влияние малого параметра $\varepsilon = d/H$ на собственные значения. Действительно, при выводе уравнений мелкой воды разложение ведется по малому параметру H^2/l^2 , который для такого вида платформ составляет около 0,0003. В данном случае $\varepsilon = 0,08$. Параметр ε является большим по сравнению с H^2/l^2 , поэтому для такого типа платформ его необходимо учитывать.

В таблице показаны собственные значения (безразмерные) при различных ε для абсолютно жесткой платформы. Видно, что влияние ε наиболее существенно для первой антисимметричной моды.

Влияние параметра ε на собственные значения упругой платформы оказывается не только количественным, но и качественным. При $\varepsilon \neq 0$ первая симметричная мода в некотором интервале значений k_2 является волноводной. Для каждого ε существует некоторое критическое значение $k_2^*(\varepsilon)$, при котором первая симметричная мода из волноводной становится уходящей и растущей на бесконечности. При $k_2 > k_2^*$ волноводных мод нет. При $\varepsilon \rightarrow 0$ критическая точка стремится к нулю. На рис. 1 представлена зависимость приведенной частоты λ первой симметричной моды от волнового числа k_2 для различных значений ε (кривые 1–4 — $\varepsilon = 0,08; 0,04; 0,01; 0$) при $G = 10\,000; 100$ (сплошные и штриховые кривые соответственно). Точками отмечены критические значения, при которых происходит переход волноводной моды в уходящую. При $k_2 > k_2^*$ собственная мода является экспоненциально растущей на бесконечности с коэффициентом $k_1 = \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}$. Форма колебаний платформы для волноводной моды показана на рис. 2 (кривая 1 — $k_2 = 1$; 2 — $k_2 = 4$) при $G = 10\,000$, $\varepsilon = 0,08$.

Первая антисимметричная мода также имеет некоторое критическое значение $k_2^0(\varepsilon)$. При $k_2 < k_2^0(\varepsilon)$ собственное значение λ является чисто мнимым, при $k_2 \rightarrow k_2^0(\varepsilon)$ $\lambda \rightarrow 0$, при $k_2 > k_2^0(\varepsilon)$ λ становится действительной величиной. На рис. 3 представлена зависимость собственного значения λ от k_2 для первой антисимметричной моды для различных значений ε (кривые 1–4 — $\varepsilon = 0,08; 0,04; 0,01; 0$) при $G = 10\,000; 100$ (сплошные и штриховые кривые соответственно). Собственная мода является экспоненциально растущей по x для всех k_2 .

Вторые моды (симметричная и антисимметричная) имеют комплексные собственные значения. На рис. 4, а, б для $G = 10\,000; 100$ соответственно представлена зависимость

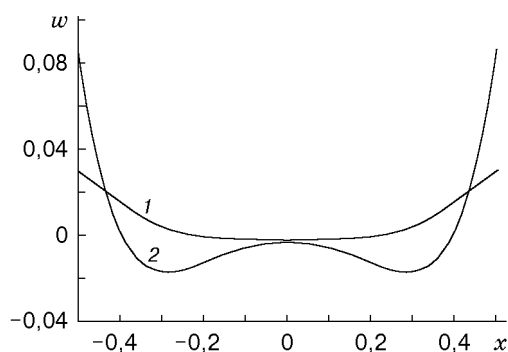


Рис. 2

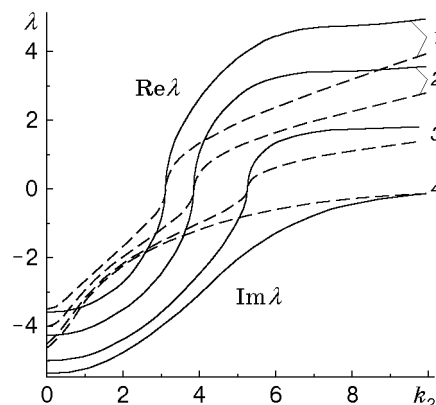


Рис. 3

собственного значения λ от k_2 для второй симметричной моды при различных значениях ε . На рис. 5 представлена зависимость собственного значения λ от k_2 для второй антисимметричной моды при различных значениях ε для $G = 10\,000$. Для этих мод влияние параметра ε становится менее существенным и только количественным. Качественно поведение кривых при различных значениях параметра ε совпадает. Однако при некоторых сочетаниях входных параметров (например, $G = 10\,000$, $\varepsilon = 0,01$) наблюдается резкое уменьшение коэффициента демпфирования $\text{Im } \lambda$ при $k_2 = 5,5$ для второй симметричной моды. Собственная частота второй антисимметричной моды практически не зависит от ε .

Следует отметить, что найденные собственные колебания платформы не могут возбуждаться набегающими волнами, так как дисперсионные соотношения для них различны. Для собственных колебаний платформы волновое число k_1 в направлении оси x является чисто мнимой величиной. Поскольку $\lambda^2 = k_1^2 + k_2^2$, то для собственных колебаний $\lambda \leq k_2$, а для волн на воде $\lambda \geq k_2$. Единственный случай, когда дисперсионное соотношение для собственных колебаний соответствует волнам на воде, — это критическая точка для первой симметричной моды, где $k_1 = 0$, $k_2 = \lambda$. Этот случай соответствует волне, бегущей вдоль платформы, когда отраженная и проходящая волны отсутствуют. Модель бесконечно длинной платформы становится неприменимой, поскольку число уравнений больше, чем число неизвестных. Решение может быть построено только тогда, когда волна имеет волновое число и частоту, соответствующие критической точке. Тогда система становится совместной.

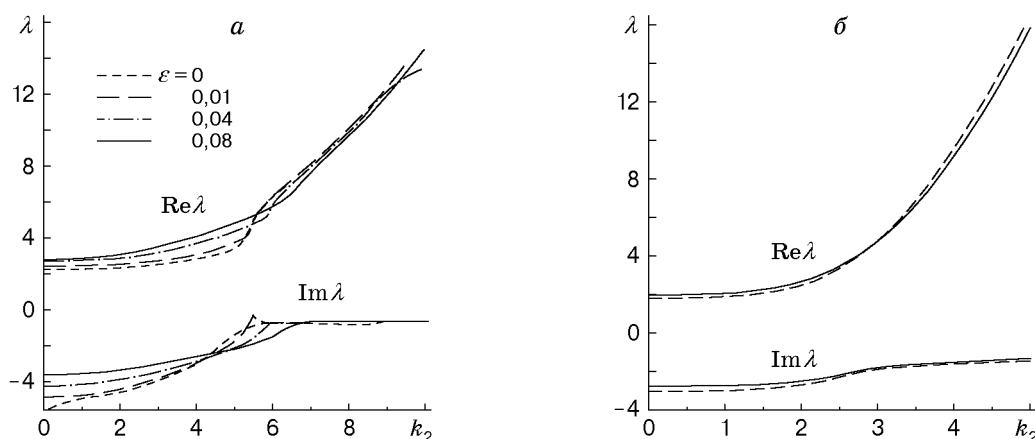


Рис. 4

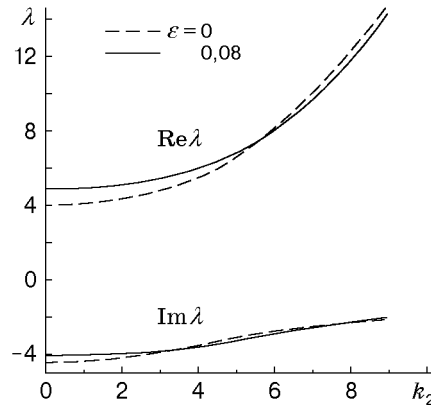


Рис. 5

Поведение платформы под действием внешней нагрузки. Рассмотрим случай, когда на платформу действует периодическая внешняя нагрузка $q_0(y) \exp(-i\omega t)$, не зависящая от x :

$$q_0(y) = \begin{cases} q_0, & |y| < y_0, \\ 0, & |y| > y_0. \end{cases}$$

Платформа будет совершать вынужденные колебания по такому же гармоническому закону $w(x, y) \exp(-i\omega t)$. Функция $w(x, y)$ является решением уравнений

$$i\lambda w(x, y) = \frac{H}{l} (1 - \varepsilon) \Delta \Phi, \quad \Delta^3 \Phi + G(1 - b\lambda^2) \Delta \Phi + \frac{G\lambda^2}{1 - \varepsilon} \Phi = i \frac{G\lambda}{1 - \varepsilon} \frac{q_0(y)}{\rho gh}. \quad (18)$$

Применим преобразование Фурье по координате y :

$$\hat{q}_0(k_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-y_0}^{y_0} \exp(-ik_2 y) q_0 dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q_0 \sin(k_2 y_0)}{k_2},$$

$$\hat{\Phi}(x, k_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ik_2 y) \Phi(x, y) dy.$$

Предполагая, что $\Phi(x, y)$ стремится к нулю при $|y| \rightarrow \infty$ вместе с производными по y до пятого порядка включительно, получим

$$\left[\left(\frac{d^2}{dx^2} - k_2^2 \right)^3 + G(1 - b\lambda^2) \left(\frac{d^2}{dx^2} - k_2^2 \right) + \frac{G\lambda^2}{1 - \varepsilon} \right] \hat{\Phi}(x, k_2) = i \frac{G\lambda}{1 - \varepsilon} \frac{\hat{q}_0(k_2)}{\rho gh}. \quad (19)$$

Общее решение этого уравнения $\hat{\Phi}(x, k_2) = \sum_{j=1}^3 a_j \operatorname{ch}(\sigma_j x) + \hat{\Phi}_0(x, k_2)$, где σ_j — корни уравнения (12); a_j — произвольные константы; $\hat{\Phi}_0(x, k_2)$ — частное решение уравнения (19). Частное решение имеет вид

$$\hat{\Phi}_0(x, k_2) = -i \frac{\hat{q}_0(k_2)}{\rho gh(1 - \varepsilon)} \frac{G\lambda}{k_2^6 + G(1 - b\lambda^2)k_2^2 - G\lambda^2/(1 - \varepsilon)},$$

если знаменатель отличен от нуля, и

$$\hat{\Phi}_0(x, k_2) = i \frac{\hat{q}_0(k_2)}{\rho gh(1 - \varepsilon)} \frac{G\lambda}{3k_2^4 + G(1 - b\lambda^2)} \frac{x^2}{2}$$

в противном случае. Из (18) находим

$$\hat{w} = i \frac{H(1-\varepsilon)}{l\lambda} \left[\sum_{j=1}^3 a_j (\sigma_j^2 - k_2^2) \operatorname{ch}(\sigma_j x) + \left(\frac{d^2}{dx^2} - k_2^2 \right) \hat{\Phi}_0(x, k_2) \right]. \quad (20)$$

Для определения коэффициентов a_j из граничных условий (11) и условий сопряжения получаем систему линейных алгебраических уравнений, собственные колебания которой исследовались выше. Решение системы для коэффициентов a_j согласно правилу Крамера имеет вид $a_j = A_j/D$, где D — определитель системы. Из (20) получаем

$$\hat{w} = i \frac{H(1-\varepsilon)}{l\lambda} \left[\sum_{j=1}^3 \frac{A_j}{D} (\sigma_j^2 - k_2^2) \operatorname{ch}(\sigma_j x) + \left(\frac{d^2}{dx^2} - k_2^2 \right) \hat{\Phi}_0(x, k_2) \right].$$

Применяя обратное преобразование Фурье, находим $w(x, y)$. При $y \rightarrow \infty$ интеграл можно вычислить с помощью вычетов. Основным интерес представляют вычеты на действительной оси, остальные дают затухающее по y решение. Если частота внешнего поля давления находится в диапазоне существования волноводной моды, то локальная периодическая нагрузка генерирует волну вида $C(x) \exp(ik_2 y)$, распространяющуюся вдоль платформы практически без затухания, и может раскачать всю платформу.

В [6, 7] показано, что в случае движущейся периодической нагрузки наблюдается резонанс, если внешнее поле давления перемещается с групповой скоростью собственной волноводной моды, а частота соответствует собственной частоте волноводной моды в системе координат, связанной с движущейся нагрузкой. В этом случае решение при $t \rightarrow \infty$ пропорционально $\exp(i\omega t)\sqrt{t}$. Для упругой полосы резонансная скорость равна \sqrt{gH} . Таким образом, при проектировании плавающего аэропорта на мелководье необходимо принимать меры для подавления волноводной моды.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Wu C., Utsunomiya T., Watanabe E.** Application of Galerkin's method in wave response analysis of flexible floating plates // Proc. of the 6th Intern. offshore and polar engng conf., Los Angeles, May 26–31, 1996. Golden (Colorado), 1996. V. 3. P. 307–314.
2. **Kashivagi M.** A precise calculation method for hydroelastic behaviors of very large floating structures // Proc. of the 11th Intern. workshop on water waves and floating bodies. Gamburg, 1996.
3. **Стокер Дж.** Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: Изд-во иностр. лит., 1965.
4. **Филиппов А. П.** Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970.
5. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965.
6. **Schulkes R. M. S. M., Sneyd A. D.** Time-dependent response of floating ice to a steadily moving load // J. Fluid Mech. 1988. V. 186. P. 25–46.
7. **Марченко А. В.** Резонансные взаимодействия волн в ледовом канале // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 6. С. 963–974.