

**УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ
ПРИ ПРОГРАММНОМ ИЗМЕНЕНИИ ОСЕВОЙ СЖИМАЮЩЕЙ
НАГРУЗКИ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ**

Л. М. Куршин, В. Т. Щербаков

(Новосибирск)

Рассматривается устойчивость цилиндрических оболочек с начальными прогибами при ползучести с программным нагружением. Приводятся данные экспериментального исследования устойчивости оболочек при ползучести, которые сравниваются с результатами расчета.

Большинство оболочек, применяемых в конструкциях летательных аппаратов, работают в условиях ползучести с переменными нагрузками и температурами нагрева. В данной работе проводится расчет устойчивости цилиндрической оболочки с начальными прогибами с изменяемой осевой нагрузкой при постоянной температуре нагрева. Рассматриваются простейшие программы изменения сжимающих усилий (фиг. 1). Приводятся результаты экспериментального исследования устойчивости цилиндрических оболочек при ползучести с программным нагружением.

Вывод уравнений возмущенного движения оболочки, работающей в условиях ползучести с начальным прогибом при постоянной интенсивности напряжений основного состояния, дается в [1]. При этом используются линеаризованные физические соотношения и учитывается геометрическая нелинейность. Аналогично [1] в данной работе записываются уравнения деформирования оболочки, но с переменной интенсивностью напряжений основного состояния.

Пусть уравнение при ползучести имеет вид

$$(1) \quad \dot{p}_i = g(p_i, \sigma_i) \sigma_i$$

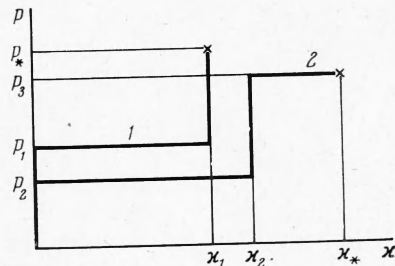
где \dot{p}_i и σ_i — интенсивности скоростей деформации ползучести и напряжений, и между составляющими тензора скоростей деформаций ползучести \dot{p}_{ij} и девиатора напряжений σ_{ij}^{**} имеют место соотношения типа теории течения

$$(2) \quad \dot{p}_{ij} = (3/2) g(p_i, \sigma_i) \sigma_{ij}^{**}, \quad p_{ij} = \epsilon_{ij} - (1/2 G^{-1}) \sigma_{ij}^{**}$$

Полагаем, что напряженное состояние оболочки складывается из основного безмоментного и некоторого возмущенного состояний

$$(3) \quad \sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}(t), \quad \dot{p}_{ij}(t) = \dot{p}_{ij} + \delta\dot{p}_{ij}(t)$$

В процессе ползучести происходит перераспределение напряжений и перемещений. Считаем, что добавки за счет возмущений малы и для вел-



чин, характеризующих отклонение от основного состояния, справедливы линеаризованные соотношения [2]

$$(4) \quad \delta \dot{p}_i = \sigma_i \frac{\partial \bar{\kappa}}{\partial p_i} \delta p_i + \sigma_i \frac{\partial \bar{\kappa}}{\partial \sigma_i} \delta \sigma_i + g \delta \sigma_i$$

$$\delta \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2G} \delta \sigma_{ij}^{**} = \frac{3}{2} g \delta \sigma_{ij}^{**} + \frac{3}{2} \sigma_{ij}^{**} \left(\frac{\partial \bar{\kappa}}{\partial \sigma_i} \delta \sigma_i + \frac{\partial g}{\partial p_i} \delta p_i \right)$$

Интегрируя уравнения (4) с учетом переменного σ_i , записывая деформации полой оболочки, связанные с отклонением от основного состояния, моменты и дополнительные усилия в срединной поверхности и проводя преобразования, аналогичные [1], получаем систему уравнений, описывающих поведение оболочек при ползучести

$$(5) \quad \Delta \Delta \Phi + e^{-\kappa} \int_0^{\kappa} e^{\kappa} S (\Lambda_1 \Lambda_1 \Phi) d\kappa - B [\Gamma (w, w_0) - e^{-\kappa} \int_0^{\kappa} e^{\kappa} \Gamma (w, w_0) d\kappa] = 0$$

$$U (w, w_0, \Phi) + e^{-\kappa} \int_0^{\kappa} e^{\kappa} D \Delta \Delta (w - w_0) d\kappa - e^{-\kappa} \int_0^{\kappa} e^{\kappa} S \left(-U (w, w_0, \Phi) - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{4} D \Delta \Delta (w - w_0) - e^{-\kappa} \int_0^{\kappa} e^{\kappa} D \left(\Delta \Delta - \frac{3}{4} \Lambda \Lambda \right) (w - w_0) d\kappa \right) d\kappa = 0$$

В уравнениях (5) через Φ , w , w_0 обозначены функции напряжений, прогиба и начального прогиба, D — цилиндрическая жесткость оболочки. Операторы Δ , Λ , Λ_1 , U , Γ имеют вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Lambda = \alpha_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\alpha_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \alpha_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\Lambda_1 = \alpha_{11} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) + \alpha_{22} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - 3\alpha_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

$$U (w, w_0, \Phi) = -D \Delta \Delta (w - w_0) - \frac{1}{R_1} (N_{11}^0 + \Phi_{yy}) -$$

$$- \frac{1}{R_2} (N_{22}^0 + \Phi_{xx}) + \Phi_{yy} w_{xx} + \Phi_{xx} w_{yy} - 2\Phi_{xy} w_{xy} + 2h\sigma_i \Lambda w + q$$

$$\Gamma (w, w_0) = \left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (w - w_0) + w_{xy}^2 - w_{xy}^{02} -$$

$$- w_{xx} w_{yy} + w_{xx}^0 w_{yy}^0$$

Уравнения (5) совпадают с уравнениями работы [1], но безразмерный параметр, связанный с деформацией ползучести, имеет другой вид

$$\kappa = \int_0^{\kappa} (E / \sigma_i) dp_i$$

В частном случае при $\sigma_i = \text{const}$ имеем $\kappa = (E / \sigma_i) p_i = \xi$.

В случае осевого сжатия цилиндрической оболочки толщиной $2h$ имеем

$$(6) \quad \sigma_{11} = -\sigma, \quad \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_i = \sigma, \quad \alpha_{11} = -1, \quad \alpha_{12} = \alpha_{22} = 0$$

$$R_1 = \infty, \quad R_2 = R, \quad N_{11} = -2\sigma h, \quad N_{12} = N_{22} = 0$$

Для закона ползучести (1) при

$$(7) \quad g = A \sigma_i^{n-1}$$

величины a , b , $S(\varphi)$ равны

$$(8) \quad a = 0, \quad b = n - 1, \quad S(\varphi) = (n - 1) \varphi$$

Уравнения (5) с учетом (6)—(8) принимают вид

$$(9) \quad \Delta \Delta \Phi + e^{-x} \int_0^{x^*} e^x (n-1) \Lambda_1 \Lambda_1 \Phi dx - B \left[\Gamma(w, w_0) - e^{-x} \int_0^{x^*} e^x \Gamma(w, w_0) dx \right] = 0$$

$$U(w, w_0, \Phi) = e^{-x} \int_0^{x^*} e^x D \left(\Delta \Delta - \frac{3}{4} \Lambda \Lambda \right) (w - w_0) dx - \frac{3n}{4} D e^{-nx} \int_0^{x^*} e^{nx} \Lambda \Lambda (w - w_0) dx$$

Упругое состояние оболочки с начальным прогибом w_0 описывается нелинейными уравнениями

$$(10) \quad -D \Delta \Delta (w - w_0) - \frac{1}{R} \Phi_{xx} + \Phi_{yy} w_{xx} + \Phi_{xx} w_{yy} - 2\Phi_{xy} w_{xy} = 0$$

$$\frac{1}{B} \Delta \Delta \Phi = \frac{1}{R} (w - w_0)_{xx} + w_{xy}^2 - w_{xx} w_{yy} - [w_{xy}^{02} - w_{xx}^0 w_{yy}^0]$$

$$B = 2Eh$$

Приближенное решение уравнений (10) при задании начального прогиба в виде

$$(11) \quad w_0 = f_1^0 \sin \frac{\alpha x}{2} \sin \frac{my}{R} + f_2^0 \cos \alpha x$$

и разыскании решения в виде

$$(12) \quad w = f_1 \sin \frac{\alpha x}{2} \sin \frac{my}{R} + f_2 \cos \alpha x + f_3$$

приводится к уравнениям для амплитуд прогибов $[\zeta_1 = f_1 / 2h$ и $\zeta_2 = f_2 / 2h$, которые являются начальными условиями для решения задачи ползучести оболочек с начальными прогибами ζ_1^0, ζ_2^0 .

Решение уравнений (9) разыскиваем в виде

$$(13) \quad w = \varphi_1(x) f_1 \sin \frac{\alpha x}{2} \sin \frac{my}{R} + \varphi_2(x) f_2 \cos \alpha x + \varphi_3(x) f_3$$

$$\Phi = \Psi_1(x) C_1 \cos \alpha x + \Psi_2(x) C_2 \cos \frac{2my}{R} + \Psi_3(x) C_3 \sin \frac{\alpha x}{2} \sin \frac{my}{R} + \Psi_4(x) C_4 \sin \frac{3\alpha x}{2} \sin \frac{my}{R}$$

Интегрируя по координатам x и y по Бубнову — Галеркину, получаем систему нелинейных интегральных уравнений, связанных с переменной κ

$$(14) \quad a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + a_3 = 0, \quad b_1 \varphi_1 + b_2 \varphi_2 + b_3 = 0$$

Решив уравнения относительно линейных частей прогибов при ползучести φ_1 и φ_2 , получаем систему

$$(15) \quad \varphi_1 = \frac{a_2 b_3 - a_3 b_1}{a_1 b_1 - a_2 b_2}, \quad \varphi_2 = \frac{a_3 b_2 - a_1 b_3}{a_1 b_1 - a_2 b_2}$$

$$a_1 = \zeta_1 [g_1 - (4/3) p - (\eta/4) g_2 \zeta_1^{02} + (1/v^2) \zeta_2^0]$$

$$a_2 = [(4 \zeta_1^0 \zeta_2) / (v^2)] g_3$$

$$a_3 = -\zeta_1^0 [g_1 - (4/v^2 \lambda_1^2) \zeta_2^0] - (1/v^2) g_4 \varphi_1 \varphi_2 \zeta_1 \zeta_2 + (\eta/4) \times$$

$$\times g_2 \varphi_1^3 \zeta_1^3 + (16\eta/v^2) g_5 \varphi_1 \varphi_2^2 \zeta_1 \zeta_2^2 - (k_2/4) g_8 \varphi_1 \zeta_1 J_{22} + (2k_3/v^2 \lambda_1^2) [2\varphi_2 \zeta_2 - (1/2\eta)] g_5 + (k_4/v^2) g_6 \varphi_1 \zeta_1 - [(16k_5\eta) /$$

$$\begin{aligned}
& / (81 v^2 \lambda_2^2) \varphi_2 \zeta_2 J_{54} - (g_8 / 3) [(4/3) \lambda_1^2 - 1] J_{13} - (n / 3) g_8 J_{23} \\
b_1 &= \zeta_2 [g_7 - (16/3) p], \quad b_2 = (2 \zeta_1^0 \zeta_1 g_2) / v^2 \\
b_3 &= -g_7 / \zeta_2^0 + (1 / 4v^2) \zeta_1^{02} - (g_4 \varphi_1^2 \zeta_1^2) / (4v^2) + (8\eta g_9 \times \\
& \times \varphi_1^2 \varphi_2 \zeta_1^2 \zeta_2) v^2 - (16/9) g_8 (J_{11} + 3nJ_{21}) + (2k_3 / v^2 \lambda_1^2) \times \\
& \times (J_{33} - 4\eta J_{34}) \varphi_1 \zeta_1 - (k_4 / g_8) g_6 - (8\eta k_5 / 81 v^2 \lambda_2^2) \varphi_1 \zeta_1 J_{54} \\
g_1 &= (4/9) v^2 \eta \lambda_1^2 + 1 / (v^2 \eta \lambda_1^2), \quad g_2 = v^2 + 1 / v^2, \quad g_3 = 1 / \\
& / \lambda_1^2 - 4\eta \zeta_2^0 X, \quad g_4 = 1 + 8 / \lambda_1^2, \quad g_5 = J_{33} - 4\eta J_{34}, \quad g_6 = J_{41} - \\
& - (\eta / 4) J_{42}, \quad g_7 = (64 / 9) v^2 \eta + 1 / (v^2 \eta), \quad g_8 = v^2 \eta, \quad g_9 = 1 / \\
& / \lambda_1^2 + 1 / (81 \lambda_2^2) \quad \lambda_1 = (1 + v^2) / v^2, \quad \lambda_2 = (1 + 9v^2) / (9v^2)
\end{aligned}$$

В выражениях a_i , b_i введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
J_{ij} &= e^{-k_i x} \int_0^{x^*} e^{k_i x} H_j(x) dx \\
H_1 &= \varphi_2 \zeta_2 - \zeta_2^0, \quad H_2 = \varphi_1^2 \zeta_1^2 - \zeta_1^{02} \\
H_3 &= \varphi_1 \zeta_1 - \zeta_1^0, \quad H_4 = \varphi_1 \varphi_2 \zeta_1 \zeta_2 - \zeta_1^0 \zeta_2^0 \\
k_1 &= -1, \quad k_2 = n, \quad k_3 = 1 + (n-1) (v^2 / 2 - 1)^2 / (v^2 + 1)^2 \\
k_4 &= (n+3) / 4, \quad k_5 = 1 + (n-1) (9v^2 / 2 - 1)^2 / (9v^2 + 1)^2 \\
v &= (\alpha R) / (2m), \quad \eta = (3/8) \beta^{*2}, \quad p = (3R\sigma) / (4Eh)
\end{aligned}$$

Продифференцируем систему (14) по p

$$(16) \quad \frac{\partial a_1}{\partial p} \varphi_1 + \frac{\partial a_2}{\partial p} \varphi_2 + \frac{\partial a_3}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial b_2}{\partial p} \varphi_1 + \frac{\partial b_1}{\partial p} \varphi_2 + \frac{\partial b_3}{\partial p} = 0$$

Составляем определитель системы

$$\begin{aligned}
(17) \quad M &= [(a_1 / \zeta_1 + T_2) (b_1 / \zeta_2 + T_3) - 2 (a_2 / \zeta_2 + T_1)^2] \varphi_1 \varphi_2 \\
T_1 &= - (1 / 2v^2) g_4 \varphi_1 \zeta_1 + (16 / v^2) \eta \varphi_1 \varphi_2 \zeta_1 \zeta_2 X + (2 / \lambda_1^2) \times \\
& \times g_5 k_3 - (8\eta k_5 / 81 v^2 \lambda_2^2) J_{54} \\
T_2 &= - (1 / v^2) g_4 \varphi_2 \zeta_2 + (3/4) \eta g_2 \varphi_1^2 \zeta_1^2 + (16 / v^2) \eta \varphi_2^2 \zeta_2^2 \times \\
& \times g_9 - (k_2 / 4) g_8 J_{22} + (k_4 / v^2) g_6 \\
T_3 &= (8 / v^2) \eta g_9 \varphi_1^2 \zeta_1^2
\end{aligned}$$

Критическое время x находится из условия равенства нулю или минимума величины M .

По уравнениям (15) проводился расчет оболочки при ползучести для двух случаев изменения осевой сжимающей нагрузки. На фиг. 2 представлены зависимости прогибов при ползучести, рассчитанные для значений начальных прогибов $\zeta_0 = 3\zeta_2^0 = 0.2$, $\zeta_{0k} = 3\zeta_1^0 = 0.05$.

В трехмерной системе координат φ_i , x , p (фиг. 2) кривые $abcd$, $abcf$ соответствуют несимметричным прогибам φ_1 и $abce$, $abchm$ — симметричным прогибам φ_2 при ползучести соответственно для двух значений параметра κ_1 , характеризующего время выдержки оболочки под постоянной нагрузкой ($\kappa_1 = 0.4$, $\kappa_1 = 0.8$). Прямая ab соответствует упругому нагружению оболочки сжимающими напряжениями $p = 0.3$. Кривые bc , bcf и bc , bch соответствуют возрастанию несимметричного φ_1 и симметричного φ_2 прогибов при постоянной сжимающей нагрузке $p = 0.3$, кривые cd , fg и ce , hm — росту φ_1 и φ_2 при мгновенном догружении оболочки сжимающими напряжениями до потери устойчивости. Для программы I (фиг. 1) результаты расчета критических значений нагрузки p_* при задании различных значений параметра κ_1 представлены на фиг. 3.

Расчеты по уравнениям (15), (17) проводились на ЭЦВМ для значений начальных прогибов $\zeta_0 = 0.2$, $\zeta_{0k} = 0.05$. Кривая 2 соответствует случаю

$p_1 = 0.224$, кривая 3 — случаю $p_1 = 0.3$. Величина p_1 связана с уровнем постоянных напряжений, при которых накапливалась деформация ползучести оболочек (фиг. 1). Значения полной критической деформации ϵ определялись по формуле

$$\epsilon = p_* + \kappa_1 p_1$$

Рассматривая результаты расчета критических деформаций оболочек в условиях ползучести, представленных на фиг. 3 кривыми 2 и 3, можно заметить, что для разрушения оболочки в зависимости от величины предварительной деформации ползучести требуется различная дополнительная мгновенная догрузка. Величина этой догрузки заметно уменьшается только при значительной величине накопленной деформации ползучести.

Отметим также, что кривая 2 (или 3), соответствующая критическим параметрам p , ϵ в случае программы с догрузкой (программа I, фиг. 1), лежит выше кривой I, соответствующей критическим параметрам при ползучести с постоянными сжимающими усилиями. Таким образом, при разрушении с догрузкой критическая деформация больше (точка а), чем при разрушении в условиях ползучести с постоянной нагрузкой, равной по величине критической сжимающей нагрузке, которую выдерживают оболочки при разрушении с догрузкой (точка б).

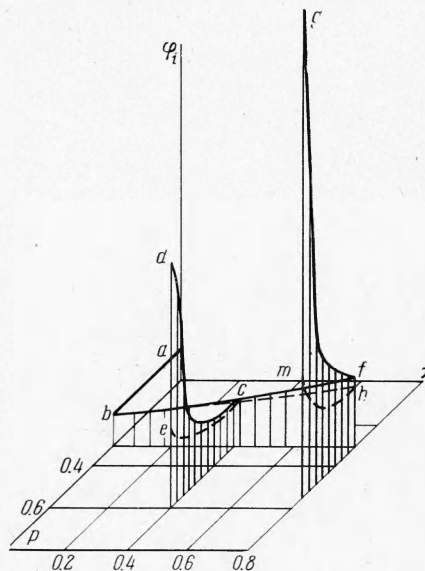
Расчеты критических деформаций проводились также для программ нагружения типа программы 2 (фиг. 1). Ниже даны результаты расчета критических значений κ_* при заданных значениях сжимающих нагрузок $p_2 = 0.244$, $p_3 = 0.375$ и различных фиксированных значениях κ_2 .

κ_2	0.20	0.30	0.37	0.40	0.60	0.70	0.75	0.78
κ_*	0.47	0.53	0.56	0.59	0.70	0.76	0.80	0.82

Представляет интерес сопоставление результатов данной работы с данными экспериментального исследования устойчивости оболочек в условиях ползучести при программном нагружении. Для выполнения расчета необходимо задание значений начальных прогибов оболочек. Для этого использовалась методика, предложенная в [3, 4].

При программном нагружении в условиях ползучести были испытаны четыре оболочки, точеные из материала Д16Т, при $T = 250^\circ \text{C}$ (радиус $R = 88 \text{ мм}$, толщина $2h = 0.5 \text{ мм}$, длина $l = 425 \text{ мм}$). В эксперименте измерялись время, нагрузка и сближение торцов оболочки (для определения осевой деформации ползучести). Была реализована программа изменения осевой нагрузки типа I.

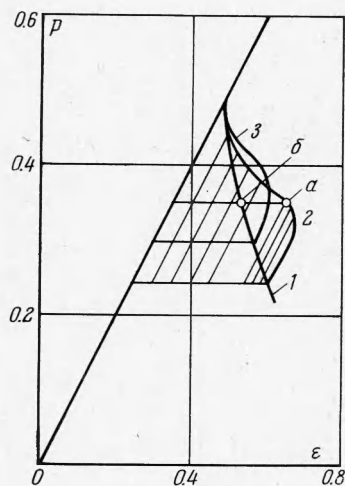
После нагрева до заданной температуры оболочка нагружалась до значения $p = 0.32$, при котором выдерживалась до накопления некоторой величины деформации ползучести, затем быстро нагружалась осевой силой до разрушения. Оболочки теряли устойчивость «хлопком» с образованием поясов ромбических вмятин по окружности. Результаты испытаний пока-



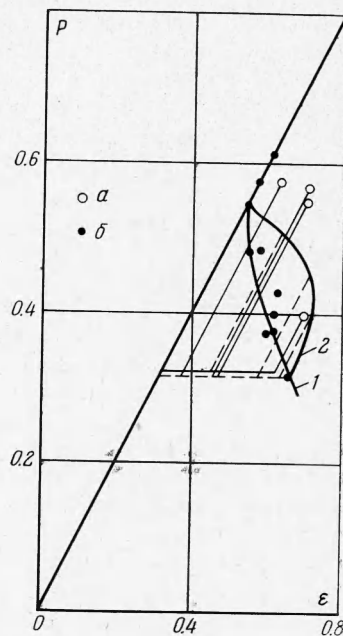
Фиг. 2

заны на фиг. 4 точками *a*, представляющими собой зависимость полной критической деформации ε от осевой нагрузки p . Данные испытаний таких же оболочек при постоянных уровнях сжимающих нагрузок в условиях ползучести представлены на фиг. 4 точками *b*.

При расчете критических деформаций вводились начальные прогибы $\zeta_0 = 0$, $\zeta_{0k} = 0.68$, которые выбирались по данным упругого эксперимента по методике, описанной в [4]. Критическое время и полная критическая деформация при ползучести для оболочек, подвергавшихся испытаниям, определялись по уравнениям (15), (17). Результаты расчетов показаны на фиг. 4 кривыми 1 и 2. Кривая 1 соответствует критической деформации в



Фиг. 3



Фиг. 4

условиях ползучести при постоянной осевой нагрузке, кривая 2 — критическим деформациям оболочек при ползучести, терявшим устойчивость с догрузением.

Хорошее соответствие расчетных кривых и экспериментальных данных позволяет заключить, что для расчета устойчивости оболочек, работающих в условиях ползучести с программным изменением осевой нагрузки достаточно иметь результаты упругих испытаний. Эти данные позволяют выбрать начальные прогибы, вводимые затем в расчет устойчивости оболочки при ползучести с программным изменением осевой нагрузки.

Поступила 4 XI 1972.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куршин Л. М. К постановке задачи о выпучивании оболочки при ползучести. Докл. АН СССР, 1965, т. 163, № 1.
2. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
3. Куршин Л. М. О влиянии начальных прогибов на устойчивость цилиндрической оболочки при сжатии в условиях ползучести. Тр. 7-й Всес. конференции по теории оболочек и пластинок, Днепропетровск, 1969. М., «Наука», 1970.
4. Куршин Л. М., Щербаков В. Т. Устойчивость цилиндрических оболочек в условиях ползучести при совместном действии осевого сжатия и внутреннего давления. ПМТФ, 1974, № 5.