

- gradient.— In: International Developments in Heat Transfer. Pt 4. N. Y., 1961, p. 682.
3. Escudier M. P., Whitelaw I. H. The influence of strong adverse pressure gradients on the effectiveness of film cooling.— «Intern. J. of Heat and Mass Transfer», 1968, vol. 11, N 8.
 4. Зысин В. А., Золотогоров М. С., Грановский В. С. Исследование эффективности пленочного охлаждения в условиях отрицательного продольного градиента давления.— «Инж.-физ. журн.», 1972, т. 23, № 6.
 5. Волчков Э. П., Комаров В. П. Турбулентный пограничный слой с газовой завесой.— В кн.: Проблемы теплофизики и физической гидродинамики. Новосибирск, «Наука», 1974.
 6. Барышев Ю. В., Леонтьев А. И., Пейкер Н. К., Рождественский В. И. Влияние продольного градиента давления на эффективность газовой завесы в дозвуковом турбулентном пограничном слое.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1975, № 2.
 7. Nicolas J. J., Izard M. Protection thermique de tuyères supersoniques par film gazeux.— «La recherche aérospatiale», 1971, N 4.
 8. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Тепломассообмен и трение в турбулентном пограничном слое. М., «Энергия», 1972.
 9. Seban R. A. Heat transfer and effectiveness for a turbulent boundary layer with tangential fluid injection.— «Trans. ASME», ser. C, 1970, vol. 82, N 4.
 10. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. М., Физматгиз, 1960.

УДК 532.5

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОЙ СТРУИ В СРЕДЕ С РЕЛАКСАЦИЕЙ

В. В. Соболев, О. Ю. Цвелодуб

(Новосибирск)

1. Постановка задачи и основные уравнения. Рассмотрим устойчивость относительно бесконечно малых возмущений установившегося струйного течения жидкости со следующим уравнением состояния [1, 2]:

$$(1.1) \quad \delta p = c_0^2 \delta \rho + \beta \frac{d}{dt} \delta \rho + \kappa \frac{d^2}{dt^2} \delta \rho,$$

где δp и $\delta \rho$ — малые возмущения давления и плотности; c_0 — скорость звука в среде; β и κ — коэффициенты релаксационной вязкости и дисперсии. Подробный вывод уравнений для возмущений скорости v и давления p приведен в [2, 3]. Если представить возмущенные величины в виде

$$f(x, y, z, t) = f(y) \exp [i\alpha(x-ct) + i\gamma z],$$

где f — возмущение давления, плотности или компонент скорости; x, y, z — пространственные координаты; α, γ — волновые числа; c — скорость ($c = c_r + ic_i$), то уравнения для двумерных возмущений $v(y)$ и $p(y)$ имеют вид [3]

$$(1.2) \quad v'' - V'(V-c)Av' - \left(B + \frac{V''}{V-c} - AV'^2\right)v = 0;$$

$$(1.3) \quad p'' - \frac{2V'}{V-c}p' - Bp = 0,$$

$$A = \frac{M^2(2 + i\alpha\beta M^2(V-c))}{(1 + i\alpha\beta M^2(V-c) - \kappa\alpha^2 M^2(V-c)^2)(M^2(1 + \kappa\alpha^2)(V-c)^2 - i\alpha\beta M^2(V-c) - 1)},$$

$$B = \alpha^2(1 - M^2(V-c)^2/(1 + i\alpha\beta M^2(V-c) - \kappa\alpha^2 M^2(V-c)^2)),$$

где V — профиль скорости основного потока; M — число Маха ($M = V_{\max}/c_0$). В данной работе

$$(1.4) \quad V = 1/\operatorname{ch}^n y,$$

где n — натуральное число.

Задача об устойчивости установившегося течения (1.4) сводится к отысканию собственных значений c для уравнений (1.2), (1.3). Устойчивость можно исследовать в рамках уравнений (1.2), (1.3) для двумерных возмущений, поскольку можно показать, что задача об устойчивости относительно трехмерных возмущений эквивалентна задаче об устойчивости относительно двумерных возмущений с меньшим числом Маха и большим параметром β .

Краевые условия для уравнений (1.2), (1.3) состоят в требовании ограниченности v и p при $y = \pm\infty$.

Рассмотрим некоторые соотношения для c . В работе [4] доказана полукруговая теорема, ограничивающая область неустойчивых собственных значений для параллельных течений в несжимаемой стратифицированной жидкости. Рассмотрим условия, при которых эта теорема имеет место и для жидкости с уравнением состояния (1.1). Пусть $c_i \neq 0$. Разделив (1.3) на $(V - c)^2$, получим

$$(1.5) \quad [(V - c)^{-2} p']' - \alpha^2 [(V - c)^{-2} - M^2/D^{-1}] p = 0, \\ D = 1 + i\alpha\beta M^2(V - c) - \kappa\alpha^2 M^2(V - c)^2.$$

Умножив (1.5) на p^* , проведем интегрирование по y с использованием граничных условий и выделим в полученном выражении действительную и мнимую части

$$(1.6) \quad \int [(V - c_r)^2 - c_i^2] \left(\frac{|p'|^2 + \alpha^2 |p|^2}{|V - c|^4} + \kappa\alpha^4 M^4 |p/D|^2 \right) dy - \\ - \alpha^2 M^2 \int (1 + \alpha\beta M^2 c_i) |p/D|^2 dy = 0;$$

$$(1.7) \quad \int (V - c_r) \left[2c_i \left(\frac{|p'|^2 + \alpha^2 |p|^2}{|V - c|^4} + \kappa\alpha^4 M^4 |p/D|^2 \right) + \right. \\ \left. + \alpha^3 \beta M^4 |p/D|^2 \right] dy = 0.$$

Из (1.7) следует, что для нарастающих возмущений при $\kappa \geq 0$ и $\beta \geq 0$ существует такая точка y_c , в которой $c_r = V(y_c)$. Видно, что при $\kappa \geq 0$, $\beta = 0$ выражения (1.6), (1.7) имеют такой же вид, что и аналогичные выражения в [4]. Следовательно, в данном случае имеем

$$(1.8) \quad \left\{ \left[c_r - \frac{1}{2} (V_{\max} + V_{\min}) \right]^2 + c_i^2 - \frac{1}{4} (V_{\max} - V_{\min})^2 \right\} \int Q dy + \\ + \alpha^2 M^2 \int \frac{|p|^2 dy}{|1 - \kappa\alpha^2 M^2 (V - c)^2|^2} \leq 0;$$

$$(1.9) \quad Q = \frac{|p'|^2 + \alpha^2 |p|^2}{|V - c|^4} + \frac{\kappa\alpha^4 M^4 |p|^2}{|1 - \kappa\alpha^2 M^2 (V - c)^2|^2} \geq 0.$$

Из (1.8), (1.9) следует

$$(1.10) \quad \left[c_r - \frac{1}{2} (V_{\max} + V_{\min}) \right]^2 + c_i^2 \leq \frac{1}{4} (V_{\max} - V_{\min})^2.$$

Соотношение (1.10) определяет границы собственных чисел c задачи о рэлееской устойчивости параллельных потоков в среде с уравнением состояния (1.1). В частном случае струйного течения (1.4) неравенство

(1.10) принимает вид

$$\left(c_r - \frac{1}{2}\right)^2 + c_i^2 \leq \frac{1}{4}.$$

2. Исследование устойчивости струи. Так как профиль основного потока (1.4) — функция четная, то можно искать отдельно решения для симметричных по скорости v (антисимметричных по давлению p) и антисимметричных по v (симметричных по p) возмущений.

С помощью замен

$$(2.1) \quad z = \operatorname{th} y; \quad \varphi = p'/p; \quad \psi = v'/v$$

однородные линейные уравнения второго порядка (1.2), (1.3) сводятся к нелинейным уравнениям Риккати

$$(2.2) \quad (1 - z^2) \varphi' + \varphi^2 - \frac{V'}{V - c} \varphi - B = 0;$$

$$(2.3) \quad (1 - z^2) \psi' + \psi^2 - V'(V - c) A \psi - B - \frac{V''}{V - c} + AV'^2 = 0,$$

$$V = (1 - z^2)^{n/2}, \quad V' = -nzV,$$

$$V'' = nV((n + 1)z^2 - 1).$$

Штрихи в (2.2), (2.3) означают производные по z . Граничные условия для φ и ψ в точке $z = -1$ имеют вид

$$(2.4) \quad \varphi(-1) = \psi(-1) = \alpha \left(1 - \frac{M^2 c^2}{1 - i\alpha\beta M^2 c - \kappa\alpha^2 M^2 c^2}\right)^{1/2}.$$

Как видно из (2.2)–(2.4), значения производных φ' и ψ' в этой точке не определены. Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя, получим граничные значения φ' и ψ' . При $n > 2$

$$\varphi'(-1) = \psi'(-1) = 0;$$

при $n = 2$

$$\varphi'(-1) = (\Delta - 4\varphi(-1)/c)/(1 + \varphi(-1));$$

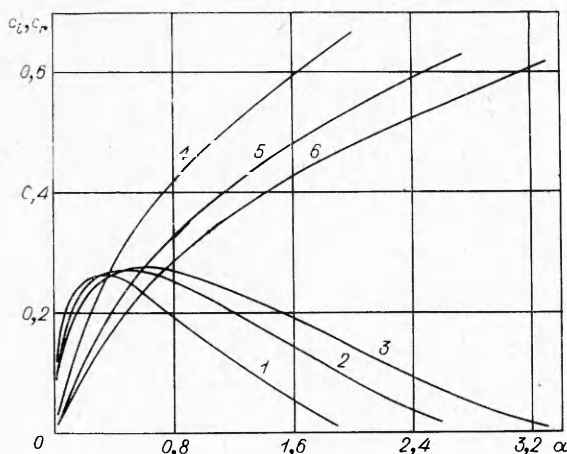
$$\psi'(-1) = \left(\Delta - \frac{2c\psi(-1)M^2(2 - i\alpha\beta M^2 c)}{(1 - i\alpha\beta M^2 c - \kappa\alpha^2 M^2 c^2)(M^2(1 + \kappa\alpha^2)c^2 + i\alpha\beta M^2 c - 1} - 4/c \right) / (1 + \psi(-1)),$$

$$\Delta = \frac{\alpha^2 M^2 c (2 - i\alpha\beta M^2 c)}{(1 - i\alpha\beta M^2 c - \kappa\alpha^2 M^2 c^2)^2}.$$

Собственные значения s , соответствующие симметричным относительно v возмущениям (мода I), находились из решения краевой задачи для ψ . Для антисимметричных возмущений (мода II) решалось уравнение для φ . Метод нахождения аналогичен описанному в [2, 3].

При $M = 0$, $\alpha \geq 0,2$ найденные значения s совпадают с результатами работы [5], где s приведены с тремя значащими цифрами для $n = 2$. Некоторые различия при меньших α обусловлены, по-видимому, тем, что погрешность в определении s , вносимая перенесением граничных условий с бесконечности на конечное расстояние l , растет с уменьшением α . Использование (аналогично [6]) замены независимой переменной (2.1) позволяет избежать этого недостатка.

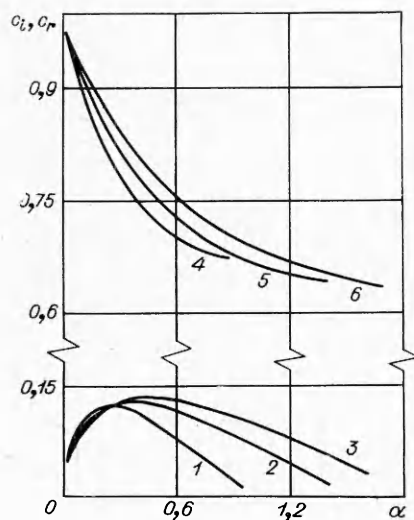
На фиг. 1 показаны спектры собственных значений для моды I при $M = 0$. Как и на последующих фигурах, кривые 1–3 изображают зависимость s_i , а 4–6 — зависимость s_r от волнового числа α при $n = 2, 4, 6$ соответственно. Видно, что с ростом n величина s_r уменьшается, а течение становится более неустойчивым в области больших α и более устойчивым в области малых α .



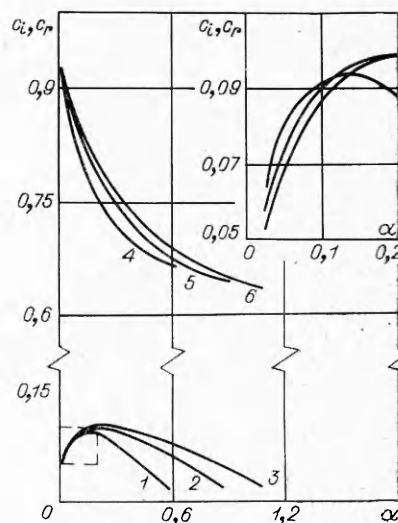
Ф и г. 1

Сжимаемость среды заметно влияет на устойчивость струйного течения. В такой среде для моды I c_r увеличивается, а для моды II — уменьшается. В обоих случаях c_i при больших α уменьшаются и диапазон неустойчивости по α сокращается. На фиг. 3 представлено поведение собственных значений при $M = 1$ для моды II. Эти результаты хорошо согласуются с данными работы [8], где рассматривается профиль (1.4) при $n = 1$ и $M = 1$. При малых α (табл. 1, где приведены данные для $n = 6$) c_i увеличиваются, причем область α , для которых сжимаемость оказывает дестабилизирующее влияние на течение, для моды I больше, чем для моды II. Расчеты показывают, что для струй с меньшим импульсом (большим n) при данном числе Маха область дестабилизации увеличивается.

Рассмотрим воздействие дисперсионных и диссипативных эффектов. Хотя их влияние на устойчивость течения заметно меньше влияния сжимаемости, представляет интерес вопрос о том, в какую именно сторону изменяется мнимая часть c .



Ф и г. 2



Ф и г. 3

На фиг. 2 приведены зависимости c_r и c_i от α для моды II при $M = 0$. Здесь с ростом n фазовые скорости c_r увеличиваются, а поведение c_i в зависимости от α качественно такое же, как и у первой моды. Уменьшение c_i с ростом n в области малых α согласуется с данными работы [7], где показано, что для длинноволновых возмущений

$$c_i \sim i\alpha^{1/2} \left\{ \frac{1}{2} \int V^2 dy \right\}^{1/2}.$$

Т а б л и ц а 1

α	Мода I		Мода II	
	M=0	M=1	M=0	M=1
	c_i			
0,025	0,09371	0,09390	0,03963	0,05363
0,05	0,12944	0,12987	0,05920	0,07016
0,1	0,17478	0,17555	0,08488	0,08765
0,125	0,19101	0,19183	0,09406	0,09270
0,2	0,22589	0,22628	0,11313	0,10041
0,3	0,25336	0,25213	0,12642	0,10109

В табл. 2 приведены собственные числа для моды I при $M = 1, 2$; $n = 6$. Верхнее и нижнее числа при данном α соответствуют действительной и мнимой частям c . В столбце 1 представлен для сравнения спектр собственных значений при $\beta = \kappa = 0$, в столбце 2 — при $\beta = 0, \kappa = 0,2$, в столбце 3 — при $\beta = 0,5, \kappa = 0$. Видно, что в консервативной среде дисперсия приводит к уменьшению c_i с увеличением α , а фазовая скорость возмущений возрастает. Из результатов, приведенных в столбце 3, следует, что диссипация делает моду I менее устойчивой. Если струя имеет больший импульс ($n = 2$), то диссипативные эффекты сильнее влияют на неустойчивость течения, а стабилизирующее влияние дисперсии начинает сказываться при меньших, чем в случае $n = 6$, волновых числах.

Т а б л и ц а 2

α	1	2	3
0,1	0,05356 0,17588	0,05356 0,17588	0,05354 0,17587
0,5	0,22293 0,26634	0,22297 0,26637	0,22188 0,26730
0,6	0,25388 0,26434	0,25395 0,26438	0,25262 0,26588
0,8	0,30615 0,25091	0,30638 0,25092	0,30473 0,25376
1,0	0,34895 0,23071	0,34943 0,23059	0,34761 0,23487
1,5	0,43166 0,16999	0,43319 0,16897	0,43084 0,17690
2,0	0,49772 0,10828	0,50156 0,10546	0,49682 0,11712
2,4	0,54645 0,06319	0,55522 0,05907	0,54454 0,07286
2,6	0,57033 0,04292	0,58332 0,04122	0,56763 0,05264

Т а б л и ц а 3

α	1	2	3
0,1	0,82296 0,05227	0,82270 0,05184	0,83607 0,04578
0,2	0,77524 0,06959	0,77464 0,06857	0,79174 0,06183
0,3	0,73948 0,07049	0,73851 0,06873	0,75938 0,06303
0,4	0,71152 0,06497	0,71018 0,06244	0,73411 0,05865
0,6	0,67109 0,04549	0,66888 0,04129	0,69715 0,04245
0,8	0,64493 0,02226	0,64407 0,01848	0,67373 0,02067

В табл. 3 представлены собственные значения для моды II при $M = 1, 2$; $n = 6$. Столбцам 1—3 здесь соответствуют те же значения параметров, что и в табл. 2. В этом случае дисперсионные и диссипативные эффекты способствуют большей устойчивости течения. При меньших n их влияние уменьшается.

Авторы выражают благодарность В. Е. Накорякову за ценные замечания и обсуждение результатов.

Поступила 29 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Накоряков В. Е., Соболев В. В., Шрейбер И. Р. Длинноволновые возмущения в газожидкостной среде.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1972, № 5.
2. Соболев В. В., Цвелодуб О. Ю. Рэлеевская устойчивость гидродинамических течений в среде с дисперсией.— В кн.: *Волновые процессы в двухфазных системах*. Новосибирск, изд. Ин-та теплофизики СО АН СССР, 1975.
3. Накоряков В. Е., Соболев В. В., Цвелодуб О. Ю. Рэлеевская устойчивость сдвигового течения в релаксирующих средах.— *ПМТФ*, 1976, № 3.
4. Howard L. N. Note on a paper of John W. Miles.— *J. Fluid. Mech.*, 1961, vol. 10, pt 4, p. 509—512.
5. Drazin P. G., Howard L. N. Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid.— In: *Advances in applied Mechanics*. Vol. 9. 1966, p. 1—89.
6. Michalke A. On the inviscid instability of the hyperbolic-tangent velocity profile.— *J. Fluid Mech.*, 1964, vol. 19, pt 4, p. 543—556.
7. Drazin P. G., Howard L. N. The instability to long waves of unbounded parallel inviscid flow.— *J. Fluid Mech.*, 1962, vol. 14, pt 2, p. 257—283.
8. Blumen W. Let flow instability of an inviscid compressible fluid.— *J. Fluid Mech.*, 1971, vol. 46, pt 4, p. 737—747.

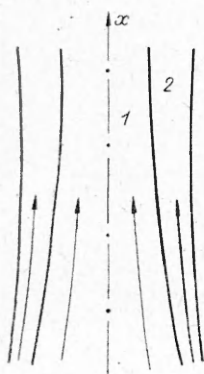
УДК 532.536

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИСТЕЧЕНИИ ТЯЖЕЛЫХ ЛАМИНАРНЫХ СТРУЙ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ

В. И. Елисеев

(Днепропетровск)

Решение задач о течении тяжелых струй идеальной жидкости определяется в ряде работ (см., например, [1—3]). Асимптотическому поведению вязких струй без учета влияния окружающей среды и массовых сил посвящена работа [4]. Наконец, вязкие течения струй несмешивающихся жидкостей без массовых сил рассматриваются в [5], где интегральным методом получено приближенное решение для плоской струи.



Ф и г. 1

Рассмотрим задачу об истечении вертикальной ламинарной струи в инородную среду, не смешивающуюся с истекающей жидкостью. Решение проведем для наиболее простой постановки этой задачи. Предположим, что струя на всем протяжении своего течения не разрушается и остается ламинарной и, кроме того, между истекающей жидкостью и средой имеется гладкая граница (фиг. 1). Вследствие наличия трения истекающая жидкость вовлекает в движение прилегающую к струе внешнюю среду, в результате чего образуется присоединенная масса. Пренебрегая узким диффузионным слоем, будем считать, что на границе раздела выполняются условия равенства скоростей, касательных и нормальных напряжений. Принятая схема течения, хотя и обладает рядом существенных недостатков, все же реализуется в действительности.