

## ОБОГАЩЕНИЕ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

УДК 622.765, 531.011

### ПОВЕДЕНИЕ ФЛОТАЦИОННОГО КОМПЛЕКСА “МИНЕРАЛЬНАЯ ЧАСТИЦА – ПУЗЫРЕК” В СЛАБОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПРОЦЕССЕ ФЛОТАЦИИ

С. А. Кондратьев<sup>1</sup>, Н. П. Мошкин<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,  
E-mail: kondr@misd.ru, Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,  
просп. Лаврентьева, 15, 630090, г. Новосибирск, Россия

<sup>3</sup>Новосибирский государственный университет,  
ул. Пирогова, 1, 630090, г. Новосибирск, Россия

Рассмотрена динамика газового пузырька с минеральной частицей в слабовязкой жидкости. Модель взаимодействия газового пузырька и минеральной частицы представлена сопряженной системой дифференциально-алгебраических уравнений. Описание динамики возмущений системы проводится на основе лагранжева формализма. Модель учитывает колебания поверхности пузырька и прикрепленной к ней твердой цилиндрической частицы в бесконечном объеме идеальной несжимаемой жидкости. Капиллярная сила, удерживающая частицу на пузырьке, обусловлена формой поверхности мениска, которая определяет контактный угол. Разложение в ряд по многочленам Лежандра используется для представления малых осесимметричных колебаний системы “частица – пузырек”. Потенциальная и кинетическая энергии комплекса выражаются через коэффициенты этого ряда. Результирующее безвихревое поле скорости позволяет учесть эффект вязкости, принимая в расчет локальные скорости диссипации энергии.

*Флотационное обогащение, минеральная частица, пузырек газа, поверхностные колебания газового пузырька, вязкая жидкость*

DOI: 10.15372/FTPRPI20240115  
EDN: YGMOXQ

Флотация — физико-химический процесс, используемый для извлечения частиц полезных минералов из рудной пульпы на основе различия их естественной или индуцированной гидрофобности. Поведение газового пузырька, к которому прикреплена твердая гидрофобная частица, представляет практический интерес для обогащения полезных ископаемых методами флотации. Стабильность комплекса “пузырек – частица” значительно зависит от состояния минеральной поверхности и сил отрыва. Выбор соответствующих сил отрыва позволяет влиять на сохранность минеральной нагрузки на пузырьке, представленной полезным компонентом, и сброс менее гид-

рофобных частиц породы. Колебания формы пузырька и осцилляции частицы вызваны периодическим обменом между поверхностной, потенциальной и кинетической энергиями. Для малых деформаций поверхности осцилляции флотокомплекса достаточно хорошо согласуются с теорией потенциального течения. Минеральные частицы оказывают эффект на поверхностные колебания пузырька после закрепления на его поверхности. Осцилляции минеральной частицы и изменение сил отрыва могут быть использованы с целью повышения содержания полезных минералов в концентрате выбором соответствующего режима колебаний пузырька и отрыва частиц породы.

Собственные моды осесимметричных колебаний газового пузырька в невязкой жидкости получены Рэлеем [1]. Пузырек с прикрепленной твердой частицей ведет себя иначе, чем свободный пузырек или пузырек, который находится в контакте с твердой неподвижной подложкой [2]. В этом случае, в отличие от поведения свободного пузырька, могут появляться дополнительные режимы колебаний. На практике важны наименьшие ненулевые частотные режимы, так как они обычно наиболее ожидаемы.

Настоящая работа посвящена изучению динамики минеральной частицы, закрепленной на поверхности пузырька в вязкой жидкости. Пузырек, совершающий поверхностные колебания, совместно с тяжелой минеральной частицей рассматриваются как единая механическая система с геометрической связью (частица расположена на поверхности пузырька в заданном положении). Несмотря на то что используется модель идеальной невязкой жидкости, учет вязкости возможен путем принятия в расчет диссипации. Количество исследований, направленных на моделирование процесса флотации, огромно. Приведем несколько ссылок на работы, близкие к тематике предлагаемой статьи.

Движение почти сферического пузырька, погруженного в несжимаемую вязкую жидкость с использованием лагранжевой процедуры с применением функции диссипации энергии, рассмотрено в [3]. Проблема осесимметричной деформации газового пузырька, совершающего колебательное и поступательное движение в несжимаемой идеальной жидкости, рассматривалась в [4]. Применен подход с использованием лагранжевой энергии в сочетании с анализом возмущений. Получена система нелинейных уравнений эволюции до третьего порядка при малом взаимодействии гармоник.

Подробный обзор подходов для учета вязкого демпфирования формы пузырька послужил центральной темой работы [5]. Рассматривались колебания объема, перемещение и деформация формы пузырька. Функция диссипации Рэля использовалась для учета вязких демпфирующих эффектов (при отсутствии завихренности).

В [6] отмечалось, что для исследования стабильности осциллирующей формы пузырька, согласующейся с экспериментальным наблюдением, учет как вязкого демпфирования, так и нелинейного взаимодействия форм является критическим. Используется функция диссипации Рэля, которая позволяет корректно учитывать вклад вязкости в отсутствие завихренности.

В [7] построен лагранжиан для несферического газового пузырька, погруженного в несжимаемую, слегка вязкую жидкость. Уравнения Эйлера – Лагранжа использованы для получения связанной модели пузырька, состоящей из уравнения Рэля – Плессета, дополненного членами второго порядка. Энергетический баланс для невязкой несжимаемой жидкости, содержащей погруженный газовый пузырек, выражен как сумма кинетических и потенциальных энергий. Вязкая диссипация энергии учитывалась через функцию диссипации в уравнении Эйлера – Лагранжа.

В [8] построена математическая модель нелинейной динамики газового пузырька в жидкости. Решалась задача его пространственного перемещения и отклонения формы от сферической. Движение жидкости считалось потенциальным. При этом вязкость жидкости учитывалась через динамическое граничное условие на поверхности пузырька.

В настоящей работе флотационный комплекс — пузырек с частицей на поверхности — рассматривается как единая механическая система в рамках лагранжевой механики. Действие гравитации игнорируется ввиду малости ее воздействия на систему. Эффекты тепло- и массопереноса не учитываются. Изучаются только осесимметричные деформации. Условие адгезии частицы к поверхности пузырька реализуется через множители Лагранжа. Влияние размера частицы и ее плотности демонстрируется в результате численного интегрирования результирующей динамической системы дифференциально-алгебраических уравнений.

### ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим поведение газового пузырька с закрепленной на его поверхности частицей в неограниченном объеме слабовязкой несжимаемой жидкости. Для транспортировки частицы пузырьком из жидкости в пену необходимо, чтобы сила присоединения между объектами взаимодействия была достаточной для того, чтобы выдерживать гидродинамические и гравитационные эффекты. Течение описывается в сферической системе координат  $(r, \varphi, \psi)$ , где  $r$  — радиус,  $\varphi$  — полярный угол,  $\psi$  — азимутальный угол. Предполагается, что течение осесимметричное, следовательно все величины не зависят от азимутальной координаты  $\psi$ .

Уравнение поверхности газового пузырька в сферической системе координат с началом в центре пузырька задано уравнением  $r = R + \eta(t, \mu)$ . Здесь  $R$  — радиус невозмущенного пузырька,  $\mu = \cos(\varphi)$ , полярный угол  $\varphi$  отсчитывается от верхней части вертикальной оси  $z$ ,  $\eta(t, \mu)$  — малое, осесимметричное возмущение поверхности, которое представлено рядом по ортогональным полиномам Лежандра  $P_j(\mu)$ :  $\eta(t, \mu) = \sum_{j=1}^N b_j(t) P_j(\mu)$ .

Функции времени  $b_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, N$ , — обобщенные координаты поверхности. На поверхности пузырька при  $\mu_0 = \mu(\varphi_0)$ ,  $\varphi_0 = 180^\circ$  находится цилиндрическая частица массой  $m_p$ , плотностью  $\rho_p$ , радиусом  $r_0$  и высотой  $h$ . Частица удерживается на поверхности пузырька капиллярной силой, приложенной вдоль линии трехфазного контакта и действующей в направлении образующей поверхность мениска. Частица осциллирует в радиальном направлении, оставаясь на поверхности. На рис. 1 представлена геометрия задачи в окрестности прикрепления частицы минерала к границе “газ–жидкость”, соответствующая пузырьку бесконечно большого радиуса.

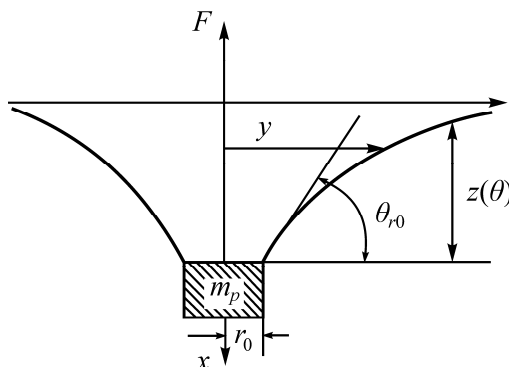


Рис. 1. Цилиндрическая частица массой  $m_p$ , плотностью  $\rho_p$ , радиусом  $r_0$  и высотой  $h$  прикреплена к пузырьку бесконечно большого радиуса:  $\theta_{r0}$  — угол трехфазного контакта мениска с поверхностью частицы;  $F$  — капиллярная сила;  $z(\theta)$  — уравнение мениска

Примем следующие допущения [9]:

— размеры минеральной частицы пропорциональны капиллярной постоянной:  $r_0 / a = o(1)$ ,  $h / a = o(1)$ ,  $a = \sqrt{\sigma / (\rho_f g)}$ ;

— радиус пузырька на порядок больше радиуса минеральной частицы  $R / r_0 \gg 1$ .

Поверхность мениска  $z = x(y)$ ,  $y = r / a$  удовлетворяет уравнению Бесселя (как показано в [10]):

$$\frac{d^2 z}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dz}{dy} - z = 0,$$

общее решение  $z(y) = C_1 I_0(y) + C_k K_0(y)$  которого выражается через модифицированные функции Бесселя  $I_0(y), K_0(y)$  первого и второго типа, обе нулевого порядка,  $C_1, C_k$  — постоянные интегрирования. Так как  $I_0(y) \rightarrow \infty$  при  $y \rightarrow \infty$ , то граничные условия требуют  $C_1 = 0$ . Константа интегрирования  $C_k$  определяется наклоном мениска  $\theta_{r_0}$  в конечном радиальном положении  $x = r_0$ . Поскольку  $dy / dx = \tan(\theta)$ , это граничное условие дает  $C_k = \tan \theta / K_1(y)$ . Здесь  $K_1(y)$  — первая производная  $K_0(y)$  и является модифицированной функцией Бесселя второго типа и первого порядка.

Уравнение формы мениска

$$z(\theta) = K_0 r_0 \tan(\theta) \quad (1)$$

хорошо согласуется с экспериментами [11],  $K_0 = -\ln(r_0 / 2a) - \gamma$ ,  $\gamma = 0.5772$  — постоянная Эйлера. Положение частицы задается обобщенной координатой  $z(t) = b_{N+1}(t)$ ,  $(R + b_{N+1}(t))$ . В начальный момент частица находится на поверхности пузырька. В последующие моменты времени частица сохраняет контакт с поверхностью и движется только в радиальном направлении:

$$g(b_1, \dots, b_N, b_{N+1}, t) = \sum_{j=1}^N b_j(t) P_j(\mu_0) - b_{N+1}(t) = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) представляет геометрическую (алгебраическую) связь между обобщенными координатами  $b_j(t)$ ,  $j = 0, 1, \dots, N+1$ , механической системы, состоящей из пузырька с частицей. Уравнения динамики флотационного комплекса “пузырек – частица” выводятся на основе лагранжевого формализма с учетом диссипации энергии, обусловленной вязкостью.

Потенциальная энергия системы состоит из двух компонентов. Первый компонент связан с поверхностным натяжением. Следуя [2], потенциальная энергия, обусловленная силой упругости поверхности пузырька, выражается уравнением

$$U_f = 2\pi\sigma \sum_{j=2}^N \frac{j^2 + j - 2}{2j + 1} b_j^2(t).$$

Второй компонент обусловлен капиллярной силой. Действие капиллярной силы аналогично пружине: при удалении частицы от равновесного положения она стремится вернуть частицу в исходное положение. На частицу действует капиллярная сила  $F = 2\pi\sigma r_0 \sin \theta_{r_0}$ , направленная к поверхности невозмущенного пузырька [9]. Потенциальная энергия частицы зависит от краевого угла  $\theta_{r_0}$  (см. уравнение (1)):

$$U_p = Fz(\theta_{r_0}) = 2\pi\sigma r_0 \sin(\theta_{r_0})z = 2\pi\sigma r_0^2 K_0 \sin(\theta_{r_0})\operatorname{tg}(\theta_{r_0}) = 2\pi\sigma r_0^2 K_0 \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_{r_0})}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\theta_{r_0})}}. \quad (3)$$

Сила гравитации не учитывается.

Кинетическая энергия флотокомплекса определяется энергией жидкости и минеральной частицы:

— следуя [2], кинетическая энергия жидкости снаружи пузырька задана уравнением

$$T_f = 2\pi R^3 \rho_f \sum_{j=1}^N \frac{1}{(j+1)(2j+1)} \dot{b}_j^2(t),$$

“точка” над символами — производная по времени;

— кинетическая энергия осциллирующей частицы получается дифференцированием (1) по времени (“штрих” — производная по времени):

$$T_p = \frac{m_p (z')^2}{2} = \frac{m_p [(\operatorname{tg} \theta_{r_0})']^2}{2} K_0^2 r_0^2.$$

Обозначив  $y = r_0 \operatorname{tg}(\theta_{r_0})$ , получим

$$T_p = \frac{m_p K_0^2 (\dot{y})^2}{2}, \quad U_p = 2\pi\sigma K_0 r_0 \frac{y^2}{\sqrt{r_0^2 + y^2}}.$$

Как показано в [12], когда вязкость жидкости сравнительно мала, движение слабо отличается от потенциального течения идеальной жидкости и формула для оценки диссипации энергии в единицу времени может быть существенно упрощена в случае волновых движений мало-вязкой жидкости. В жидкости на сферическую поверхность действует сила трения, которая может быть учтена через скорость вязкой диссипации энергии:

$$D = \frac{\mu_f}{2} \int_s \frac{\partial(uu)}{\partial n} ds.$$

где  $\mu_f$  — вязкость внешней жидкой фазы;  $u$  — вектор скорости;  $n$  — вектор нормали к поверхности.

Используя представление скорости в терминах ряда по полиномам Лежандра, находим

$$D = 8\pi R \mu_f \sum_{j=1}^N \frac{j+2}{j+1} \dot{b}_j^2.$$

Отметим, что  $D/2$  обычно обозначает диссипацию Рэлея. Это выражение справедливо только для осцилляций с малой амплитудой и небольшой вязкостью.

#### УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

Лагранжиан системы “минеральная частица – пузырек”  $L = L_f + L_p$  зависит от обобщенных координат  $b_j(t)$  и их скоростей:

$$L_f = T_f - U_f = 2\pi R^3 \left[ \rho_f \sum_{j=1}^N \frac{1}{(j+1)(2j+1)} \dot{b}_j^2(t) \right] - 2\pi\sigma \sum_{j=2}^N \frac{j^2 + j - 2}{2j+1} b_j^2(t), \quad (4)$$

$$L_p = T_p - U_p = \frac{m_p K_0^2}{2} \dot{y}^2 - 2\pi\sigma K_0 r_0 \frac{y^2}{\sqrt{r_0^2 + y^2}} - m_p \left[ \sum \ddot{b}_j P(\mu_0) \right] y K_0. \quad (5)$$

Здесь  $T$ ,  $U$  — кинетическая и потенциальная энергии; нижние индексы соответствуют жидкости  $f$  и минеральной частице  $p$ . Последний член в (5) появляется вследствие неразрывной связи частицы с движущейся поверхностью пузырька, т. е. частица связана с подвижной системой координат с началом на поверхности пузырька, которая является неинерциальной. Используя (4) и (5), запишем уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{b}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial b_j} + \frac{\partial U}{\partial b_j} = -\frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial \dot{b}_j} + \lambda \frac{\partial g}{\partial b_j}, \quad j = 1, \dots, N+1,$$

где  $T = T_f + T_p$ ;  $U = U_f + U_p$ ;  $D$  — функция диссипации;  $g$  — ограничение (2);  $\lambda$  — множитель Лагранжа.

В результате получаем систему из  $N+1$  нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и одного алгебраического уравнения, включающую  $N+1$  обобщенные координаты  $b_j(t)$ ,  $y(t)$  и множитель Лагранжа  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} 4\pi R^3 \rho_f \frac{\ddot{b}_j}{(j+1)(2j+1)} + 4\pi\sigma \frac{j^2 + j - 2}{2j+1} b_j(t) &= -8\pi R \mu_f \frac{j+2}{j+1} \dot{b}_j \pm \lambda P_j(\mu_0); \quad j = 2, \dots, N, \\ m_p K_0^2 \ddot{y} + 2\pi\sigma K_0 r_0 \left( 2 \frac{y}{\sqrt{r_0^2 + y^2}} - \left( \frac{y}{\sqrt{r_0^2 + y^2}} \right)^3 \right) &+ m_p K_0 \left[ \sum_{j=1}^N \ddot{b}_j P(\mu_0) \right] = \mp \lambda K_0, \\ \sum_{j=1}^N b_j(t) P_j(\mu_0) - K_0 y &= 0, \quad \left[ -\sum_{j=1}^N b_j(t) P_j(\mu_0) + K_0 y = 0 \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Запишем систему уравнений (6) в безразмерном виде (значения со “\*” — безразмерные):

$$t^* = t \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_f R^3}}, \quad b^* = \frac{b}{R}, \quad y^* = \frac{y}{R}, \quad \lambda^* = \frac{1}{4\pi} \frac{\lambda}{R\sigma}, \quad Oh = \frac{\mu_f}{\sqrt{\rho\sigma L}} \quad \text{— число Онезорге}$$

(отношение сил поверхностного натяжения к инерционным сила, иначе отношение масштаба времени вязких сил к масштабу времени инерционных сил).

Уравнения (6) в безразмерных переменных имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{b}_j}{(j+1)(2j+1)} + \frac{j^2 + j - 2}{2j+1} b_j(t) &= -2Oh \dot{b}_j \pm \lambda P_j(\mu_0), \quad j = 1, 2, \dots, N, \\ \frac{K_0}{3} \frac{m_p}{m_f} \ddot{y} + \frac{r_0}{R} \left( y / \left( \sqrt{\frac{r_0^2}{R^2} + y^2} \right) - \frac{1}{2} \left( y / \left( \sqrt{\frac{r_0^2}{R^2} + y^2} \right) \right)^3 \right) &+ \frac{m_p}{m_f} \frac{1}{3} \left[ \sum \ddot{b}_j P(\mu_0) \right] = \mp \lambda, \\ \sum_{j=1}^N b_j(t) P_j(\mu_0) - K_0 y &= 0, \quad \left[ -\sum_{j=1}^N b_j(t) P_j(\mu_0) + K_0 y = 0 \right]. \end{aligned}$$

Решение системы зависит от четырех безразмерных величин:  $K_0$ ;  $m_p / m_{fl}$  — отношения массы частицы к массе жидкости в объеме пузырька;  $r_0 / R$  — отношения радиуса частицы к радиусу пузырька;  $Oh$  — отношения сил поверхностного натяжения к инерционным силам. С помощью (2) можно получить уравнение для множителя Лагранжа  $\lambda(t)$  в терминах обобщенных координат  $b_j(t)$ ,  $y(t)$ :

$$\lambda = \frac{\sum_{j=1}^N \left[ (j+1)(j^2 + j - 2)b_j + 2Oh(j+1)(2j+1)\dot{b}_j \right] P_j(\mu_0)}{\left( \sum_{j=1}^N (j+1)(2j+1)P_j^2(\mu_0) \right) + \frac{3}{2} \frac{m_{fl}}{m_p}} - \frac{\frac{3}{2} \frac{m_{fl}}{m_p} \frac{r_0}{R} \left( y / \left( \sqrt{\frac{r_0^2}{R^2} + y^2} \right) + \frac{1}{2} \left( y / \left( \sqrt{\frac{r_0^2}{R^2} + y^2} \right) \right)^3 \right)}{\left( \sum_{j=1}^N (j+1)(2j+1)P_j^2(\mu_0) \right) + \frac{3}{2} \frac{m_{fl}}{m_p}}.$$

Имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в терминах  $b_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, N$  и  $y(t)$ :

$$\begin{aligned} \ddot{b}_j &= -2Oh(j+1)(2j+1)\dot{b}_j + \lambda(t)(j+1)(2j+1)P_j(\mu_0) - (j+1)(j^2 + j - 1)b_j, \quad j = 1, \dots, N, \\ \ddot{y} &= \frac{3}{2} \frac{1}{K_0} \frac{m_{fl}}{m_p} \lambda(t) - \frac{3}{2} \frac{1}{K_0} \frac{m_{fl}}{m_p} \frac{r_0}{R} \left( y / \left( \sqrt{\frac{r_0^2}{R^2} + y^2} \right) - \frac{1}{2} \left( y / \left( \sqrt{\frac{r_0^2}{R^2} + y^2} \right) \right)^3 \right). \end{aligned} \quad (7)$$

В начальный момент времени заданы значения неизвестных функций  $b_j(0)$ ,  $\dot{b}_j(0)$ . Начальные значения  $y(0)$ ,  $\dot{y}(0)$  находятся из условия геометрической связи (2):

$$\begin{aligned} b_j(0) &= b_{0j}, \quad y(0) = \frac{1}{K_0} \sum b_j(0)P_j(\mu_0), \\ \dot{b}_j(0) &= \dot{b}_{0j}, \quad \dot{y}(0) = \frac{1}{K_0} \sum \dot{b}_j(0)P_j(\mu_0). \end{aligned} \quad (8)$$

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Детали метода численного решения и результаты расчетов без учета вязкости приведены в [13].

*Начальное возбуждение второй и третьей мод.* Результаты численного решения уравнений (7), (8) для случая флотокомплекса “пузырек – частица” в идеальной невязкой жидкости представлены на рис. 2 для следующих величин: размеры частицы  $r_0 = 1 \cdot 10^{-4}$  м,  $h = 2 \cdot 10^{-4}$  м, радиус пузырька  $R = 8.2 \cdot 10^{-4}$  м, плотность частицы  $\rho_p = 4.5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> и воды  $\rho_f = 1 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, масса частицы  $2.83 \cdot 10^{-8}$  кг, отношение радиусов  $r_0 / R = 1.22 \cdot 10^{-1}$ , поверхностное натяжение  $\sigma = 7.2 \cdot 10^{-2}$  Н/м,  $a = 2.68 \cdot 10^{-3}$ ,  $K_0 = 3.41$ , вязкость отсутствует  $Oh = 0$ .

Рассмотрены два случая задания начальных условий. В первом начальное возмущение задано для скорости второй моды  $\dot{b}_2(0) = 5 \cdot 10^{-5}$  м/с (левая колонка), во втором — для скорости третьей моды  $\dot{b}_3(0) = 5 \cdot 10^{-5}$  м/с (правая колонка). Остальные начальные данные нулевые.

На рис. 2 приведены осцилляции мод 2, 3, 4 и минеральной частицы (последняя строка). Расчеты показали, что начальные возмущения амплитуд второй гармоники возбуждают амплитуды колебаний других гармоник, большие по сравнению с амплитудами колебаний, возбуждаемых аналогичным начальным возмущением третьей гармоники. Частоты поверхностных осцилляций формы пузырька с частицей, вызванные возмущением второй гармоники, почти в 2 раза меньше частот осцилляций, обусловленных возмущением третьей гармоники. Амплитуды колебаний минеральной частицы практически одинаковы, а частота колебаний частицы, генерируемая начальным возмущением третьей моды, почти в 2 раза выше аналогичной, вызванной возмущением второй моды. Учет изменения скорости осцилляций второй моды наиболее важен при учете развития осцилляций флотокомплекса и их эволюции.

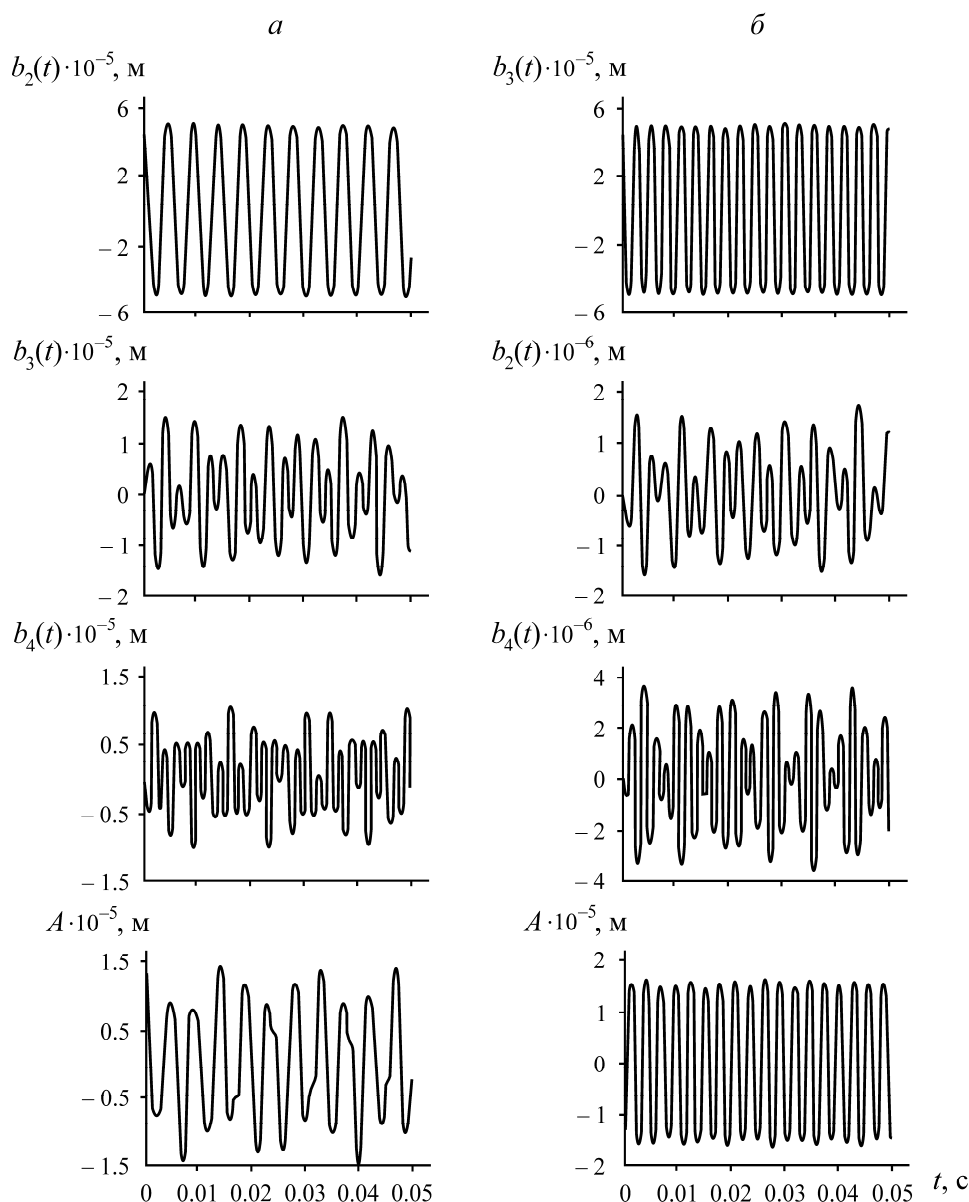


Рис. 2. Осцилляции мод 2, 3, 4 и изменения амплитуды  $A$  колебаний минеральной частицы (4-я строка), вызванные начальным возмущением скорости второй гармоники  $\dot{b}_2(0) = 0.5$  м/с (а) и третьей гармоники  $\dot{b}_3(0) = 0.5$  м/с (б)



*Эффект вязкости на динамику флотокомплекса.* В большинстве случаев демпфирование волн малой амплитуды на свободной поверхности слабовязкой жидкости, такой как вода, может быть оценено с достаточной точностью в приближении безвихревого течения [14, 15]. И хотя рассматривается безвихревой поток, результирующее безвихревое поле скорости по-прежнему позволяет учесть локальные скорости диссипации энергии.

Рассмотрим случай возбуждения начальной скорости второй гармоники для флотокомплекса, определяемого следующими параметрами:  $r_0 = 1 \cdot 10^{-4}$  м;  $h = 1.5 \cdot 10^{-4}$  м;  $m_{\text{part}} = 2.12 \cdot 10^{-8}$  кг;  $R = 5.2 \cdot 10^{-4}$  м;  $\rho_{\text{part}} = 4.5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $\rho_f = 1 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $\sigma = 7.2 \cdot 10^{-2}$  Н/м;  $a = 2.68 \cdot 10^{-3}$ ;  $K_0 = 3.41$ . Задавались начальные условия:  $b_j(0) = \dot{b}_j(0) = 0$ , кроме  $\dot{b}_2(0) = 0.5$  м/с.

На рис. 3 приведены зависимости от времени положения минеральной частицы и краевого контактного угла для нескольких чисел Онезорге ( $Oh$ ).

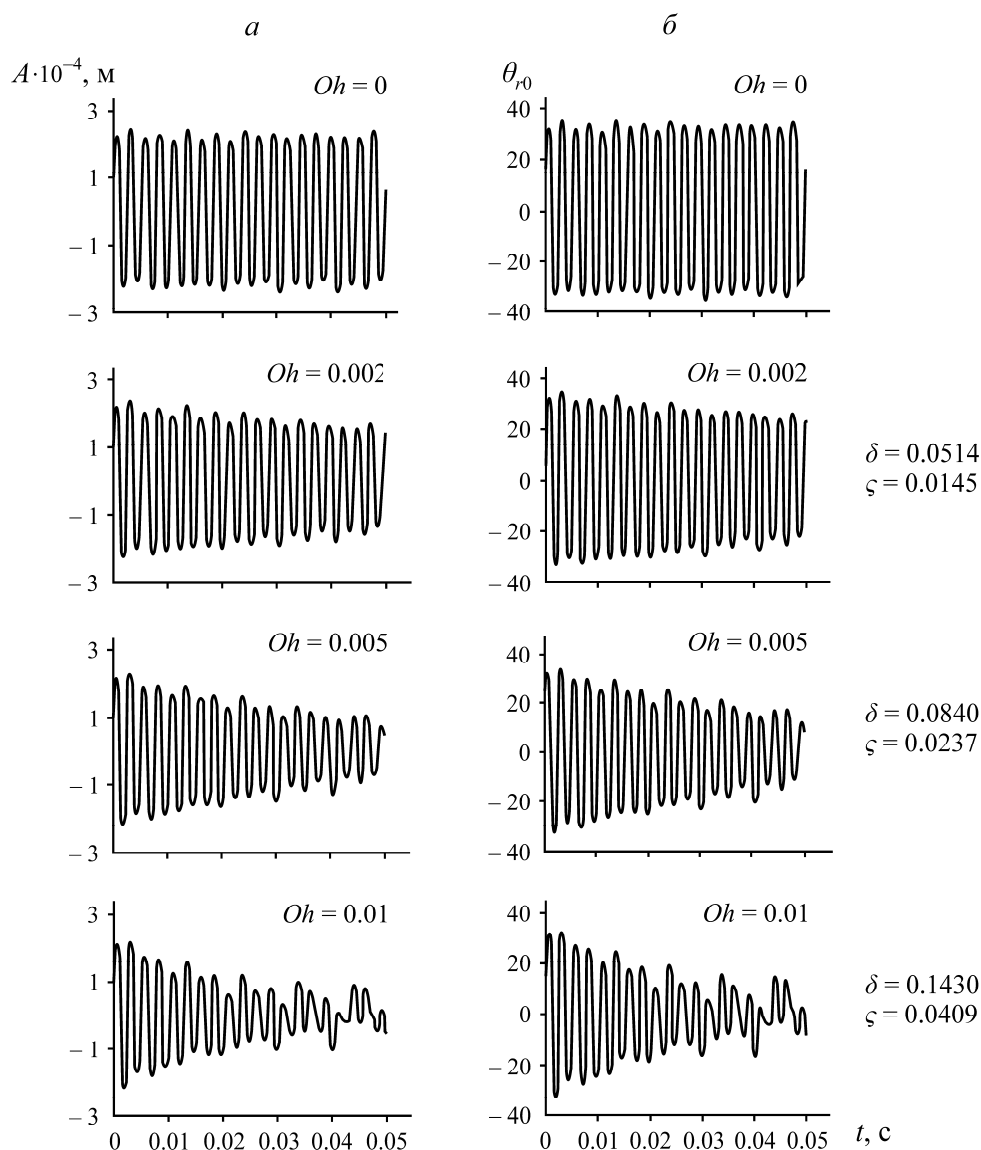


Рис. 3. Зависимость амплитуды  $A$  осцилляций частицы и краевого угла  $\theta$  при возбуждении начальной скорости второй моды  $b_2(0) = 1 \cdot 10^{-4}$  (а) и  $b_2(0) = 5 \cdot 10^{-5}$  (б) от времени при различной вязкости (числа Онезорге)

Изменение числа  $Oh$  прямо пропорционально изменению вязкости жидкости и обратно пропорционально квадратному корню плотности жидкости при фиксированных прочих параметрах. Затухание амплитуды колебаний газового пузырька с прикрепленной минеральной частицей вызвано вязкой диссипацией, связанной с необратимым характером процесса переноса импульса и локализовано вблизи границы раздела “газ – жидкость”. Зависимость логарифмического декремента затухания от числа Онезорге демонстрирует более быстрое уменьшение амплитуды колебаний со временем при возрастании вязкости. Зависимость логарифмического декремента затухания колебаний определялась приблизительно по пикам осцилляций  $\delta = 1 / n \ln[y(t) / (y(t + nT))]$  и представляет отношения последовательных амплитуд колеблющейся частицы. Колебательное поведение системы характеризуется коэффициентом демпфирования  $\zeta$ , связанным с логарифмическим декрементом затухания соотношением  $\zeta = \delta / \sqrt{4\pi^2 + \delta^2}$ . Логарифмический декремент затухания характеризует число периодов, в течение которых происходит затухание колебаний.

На рис. 4 показано изменение во времени контактного угла  $\theta_{r0}$  и осцилляции второй гармоники для двух значений, определяющих начальную форму пузырька, обусловленную заданием ненулевой второй моды в начальный момент  $b_2(0)$ . Остальные моды в начальный момент задавались нулевыми. Амплитуды осцилляций краевого угла, соответствующих большему начальному возмущению  $b_2(0) = 1 \cdot 10^{-4}$ , приблизительно в 2 раза превышают амплитуды, обусловленные более слабым  $b_2(0) = 5 \cdot 10^{-5}$  отклонением формы пузырька от сферической в начальный момент. Осцилляции второй гармоники, которая является доминирующей, также имеют большую амплитуду в случае более сильного начального возмущения поверхности пузырька. Приближенные значения логарифмического декремента затухания и коэффициента демпфирования, найденные по рис. 3, 4, составляли  $\delta = 0.0874$ ,  $\zeta = 0.0250$  для случая *a*;  $\delta = 0.0744$ ,  $\zeta = 0.0210$  для случая *б* соответственно.

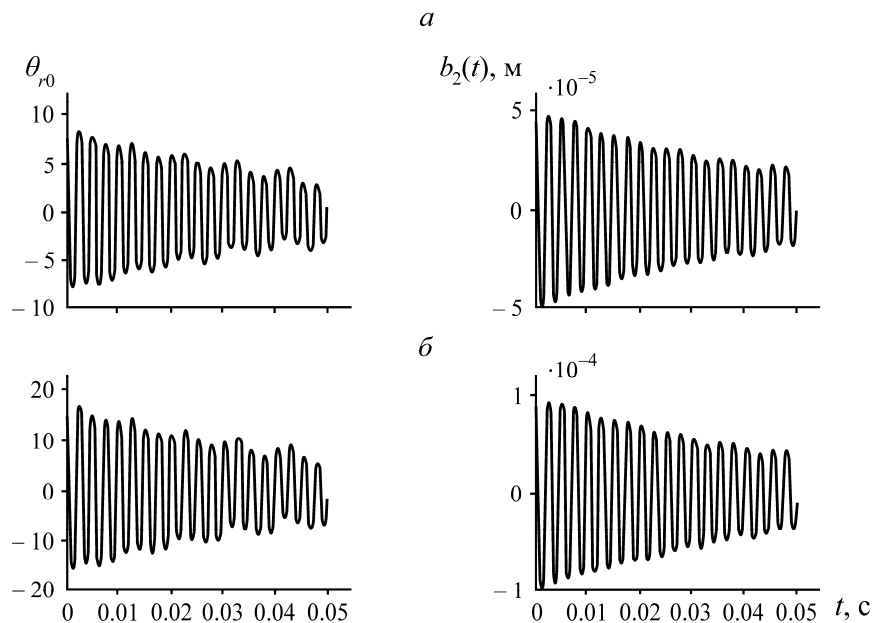


Рис. 4. Зависимости во времени контактного угла и амплитуды второй моды от ее начального возмущения: *a* —  $b_2(0) = 5 \cdot 10^{-5}$ ,  $Oh = 0.005$ ; *б* —  $b_2(0) = 1 \cdot 10^{-4}$ ,  $Oh = 0.005$

Результаты на рис. 4 представлены для следующих параметров:  $r_0 = 1 \cdot 10^{-4}$  м;  $h = 1.5 \cdot 10^{-4}$  м;  $m_{\text{part}} = 2.12 \cdot 10^{-8}$  кг;  $R = 5.2 \cdot 10^{-4}$  м;  $\rho_{\text{part}} = 4.5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $Oh = 5 \cdot 10^{-3}$ ;  $\rho_f = 1 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $K_0 = 3.41$ ;  $\sigma = 7.2 \cdot 10^{-2}$  Н/м;  $a = 2.68 \cdot 10^{-3}$ . Начальные условия  $b_2(0) = 5 \cdot 10^{-5}$  на рис. 4а и  $b_2(0) = 1 \cdot 10^{-4}$  — на рис. 4б; остальные начальные данные нулевые:  $b_j(0) = 0.0$ ,  $\dot{b}_j(0) = 0.0$ .

## ВЫВОДЫ

Рассмотрены осесимметричные колебания газового пузырька с прикрепленной минеральной частицей в невязкой несжимаемой жидкости. Для учета вязких демпфирующих эффектов при отсутствии завихренности использовалась функция диссипации Рэлея. Предполагая, что деформация формы пузырька и осцилляции частицы малы и представляя деформацию формы пузырька рядом по многочленам Лежандра, получена система связанных алгебраическо-дифференциальных уравнений. Лагранжиан системы использовался для построения системы соответствующих уравнений Лагранжа, которые решались численно.

Изучено влияние первоначальных возмущений второй или третьей мод на возбуждение режимов колебаний других мод. Установлено, что на развитие осцилляций флотокомплекса наиболее сильное влияние оказывают изменения скорости колебаний второй моды. Возбуждение нескольких мод поверхностных колебаний пузырька приводит к нелинейным колебаниям частицы и появлению “биений” с увеличенными амплитудами наступающего контактного угла.

Рассмотрен эффект учета вязкости жидкости на затухание осесимметричных колебаний комплекса “частица – пузырек”. Зависимость логарифмического декремента затухания от числа Онезорге демонстрирует более быстрое уменьшение амплитуды колебаний со временем при возрастании вязкости. Во время колебаний комплекса “частица – пузырек” контактный угол изменяется в широких пределах, что подразумевает устойчивое закрепление периметра трехфазного контакта исключительно на ребрах частицы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rayleigh J. W. S. On the capillary phenomena of jets, Proc. R. Soc. London, 1879, Vol. 29. — P. 71–97.
2. Vejrazka J., Vobecka L., and Tihon J. Linear oscillations of a supported bubble or drop, Phys. Fluids, 2013, Vol. 25. — 062102.
3. Ceschia M. and Nabergoj R. On the motion of a nearly spherical bubble in a viscous liquid, Phys. Fluids, 1978, Vol. 21. — P. 140–142.
4. Shaw S. J. Translation and oscillation of a bubble under axisymmetric deformation, Citation: Phys. Fluids, 2006, Vol. 18. — 072104.
5. Shaw S. J. The stability of a bubble in a weakly viscous liquid subject to an acoustic traveling wave, Phys. Fluids, 2009, Vol. 21. — 022104.
6. Shaw S. J. Nonspherical sub-millimeter gas bubble oscillations: Parametric forcing and nonlinear shape mode coupling, Phys. Fluids, 2017, Vol. 29. — 122103.
7. Harkin A. A., Kaper T. J., and Nadim A. Energy transfer between the shape and volume modes of a nonspherical gas bubble, Phys. Fluids, 2013, Vol. 25. — 062101.
8. Ильгамов М. А., Косолапова Л. А., Малахов В. Г. Движение пузырька газа в жидкости с учетом искажения его сферической формы // Вестн. ТГГПУ. — 2010. — № 3 (21).

9. **Кондратьев С. А.** Реагенты-собиратели в элементарном акте флотации. — Новосибирск: СО РАН, 2012. — 241 с.
10. **Deryagin B. V.** Theory of distortions of the plane surface of a liquid by small objects and its application to measurement of edge wetting angles of thin films of filaments and fibers, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1946, Vol. 51, No. 7. — P. 517–520.
11. **Tovbin M. V., Chesha I. I., and Dukhin S. S.** Investigation of properties of surface layer of liquids by the floating drop method, Kolloidn. Zh., 1970., Vol. 32, No. 5. — P. 771–777.
12. **Левич В. Г.** Физико-химическая гидродинамика. — М.: ГИФМЛ, 1959. — 700 с.
13. **Кондратьев С. А., Мошкин Н. П.** Взаимодействие минеральной частицы со свободным пузырьком воздуха в жидкости // ФТПРПИ. — 2020. — № 6. — С. 125–135.
14. **Lamb H.** Hydrodynamics, Cambridge U. P., Cambridge, England, 1932, reprinted by Dover, New York, 1945, 6<sup>th</sup> ed.
15. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости: пер. с англ. под ред. Г. Ю. Степанова. — М.: Мир, 1973. — 760 с.

*Поступила в редакцию 10/X 2023*

*После доработки 25/X 2023*

*Принята к публикации 24/I 2024*