Теплофизика и аэромеханика, 2005, том 12, № 2

УДК 669.86:536.21

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ С ЛОКАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ

Г.В. КУЗНЕЦОВ[1], **М.А. ШЕРЕМЕТ**[2]

[1]*Томский политехнический университет*

[2]*Томский государственный университет*

Рассматривается краевая задача нестационарного теплопереноса в режимах конвекции и теплопроводности для замкнутой области. Приведены поля скорости, вектора вихря скорости и распределения температур. Показаны существенные неоднородности полученных температурных полей для режима конвекции. Проведено сравнение распределений температуры в режимах конвективного и кондуктивного теплопереноса. Сделан вывод о том, что решение краевой задачи для режима конвекции может приводить к существенно более точным оценкам значений температуры.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема теплоэнергосбережения в настоящее время стоит достаточно остро. Это связано в первую очередь с невозобновляемостью природных энергетических ресурсов, запас которых с каждым годом уменьшается. Возможны два пути ее решения: поиск альтернативных источников энергии, либо экономичное потребление энергии, например, использование эффективных теплоизоляционных материалов. Для реализации любого из предложенных вариантов необходимо знать реальное тепловое состояние исследуемых объектов. Это возможно только с помощью методов математического моделирования комплекса явлений, протекающих в системах — потребителях тепловой энергии. Однако в настоящее время публикации, касающиеся теоретических основ процессов нестационарного конвективно-кондуктивного сопряженного теплопереноса, отсутствуют. На данный момент известны пионерские работы по численному моделированию нестационарного теплопереноса в однослойных ограждающих конструкциях зданий [1, 2].

Целью данной работы является решение задачи нестационарного теплопереноса за счет режимов кондукции и конвекции в объекте, представляющем собой замкнутую область с локально сосредоточенным источником тепловыделения и неоднородными граничными условиями на внешних и внутренних границах области решения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассматривается краевая задача теплопереноса с учетом кондукции и естественной конвекции для области, представленной на рис. 1. Область решения включает пять подобных по форме прямоугольников, имеющих разные размеры и

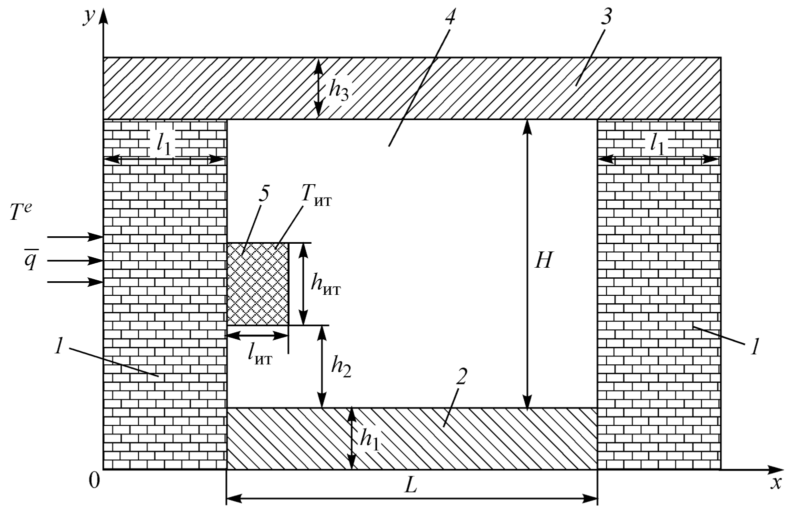


Рис. 1. Область решения рассматриваемой задачи.
1, 2, 3 — элементы твердой фазы, *4* — газовая фаза, *5* — источник тепловыделения.

теплофизические характеристики. На границах между всеми прямоугольниками и с внешней по отношению к рассматриваемому объекту средой задавались соответствующие граничные условия.

В такой постановке задачи процесс переноса тепла описывается системой нестационарных уравнений Навье — Стокса для газовой и уравнением теплопроводности для твердой фазы с нелинейными граничными условиями. Для определения полей течения и температур в газовой фазе использованы нестационарные двумерные уравнения конвекции в приближении Буссинеска [3, 4]. В пренебрежении вязкой диссипацией энергии уравнения неразрывности, движения и энергии в газовой фазе $(h_1 \le y \le h_1 + h_2,\ l_1 \le x \le l_1 + L;\quad h_1 + h_2 \le y \le h_1 + h_2 + h_{\text{ит}},\ l_1 + l_{\text{ит}} \le x \le l_1 + L;$ $h_1 + h_2 + h_{\text{ит}} \le y \le h_1 + H,\ l_1 \le x \le l_1 + L)$ будут иметь вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{2}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \rho\beta g_y\left(T - T_0\right), \tag{3}$$

$$\rho C_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \tag{4}$$

а для твердой фазы $(0 \le y \le h_1,\ 0 \le x \le 2l_1 + L;\ h_1 \le y \le h_1 + H,\ 0 \le x \le l_1,\ l_1 + L \le$ $\le x \le 2l_1 + L;\ h_1 + H \le y \le h_1 + H + h_3,\ 0 \le x \le 2l_1 + L)$ уравнение теплопроводности

$$\rho_i C_{pi}\frac{\partial T_i}{\partial t} = \lambda_i\left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2}\right) \text{ при } i = 1, 2, 3. \tag{5}$$

Система уравнений (1)–(5) решалась в переменных функция тока ψ — вихрь скорости ω:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y};\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x};\ \omega = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{V} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

В качестве масштаба расстояния выбрана длина газовой полости рассматриваемой области решения по оси x. Для приведения к безразмерному виду системы уравнений (1)–(5) использовались следующие соотношения:

$$X = \frac{x}{L},\ Y = \frac{y}{L},\ \tau = \frac{t}{t_0},\ U = \frac{u}{V_0},\ V = \frac{v}{V_0},\ \Theta = \frac{T - T_0}{\Delta T},\ \Psi = \frac{\psi}{\psi_0},\ \Omega = \frac{\omega}{\omega_0},$$

где

$$\Delta T = T_{\text{ит}} - T_0,\ V_0 = \sqrt{g\beta \Delta T L},\ \psi_0 = V_0 L,\ \omega_0 = \frac{V_0}{L}.$$

Здесь x, y — координаты декартовой системы координат; X, Y — безразмерные координаты, соответствующие координатам x, y; ρ_i — плотность i-й подобласти ($i = \overline{1, 3}$, см. рис. 1); μ — коэффициент динамической вязкости; p — давление; β — температурный коэффициент объемного расширения; g_y — составляющая ускорения силы тяжести в проекции на ось y ($g_x = 0$); C_{p_i} — удельная теплоемкость при постоянном давлении i-й подобласти; λ_i — коэффициент теплопроводности i-ой подобласти; L — длина газовой полости по оси x; t — время; t_0 — масштаб времени; τ — безразмерное время; u, v — составляющие скорости в проекции на оси x, y соответственно; U, V — безразмерные скорости; соответствующие скоростям u, v;
V_0 — масштаб скорости (скорость конвекции); T_i — температура i-й подобласти; Θ — безразмерная температура; T_0 — начальная температура рассматриваемой области решения; T^{e} — температура окружающей среды; $T_{\text{ит}}$ — температура источника тепловыделения; ψ — функция тока; ψ_0 — масштаб функции тока; Ψ — безразмерный аналог функции тока; ω — вихрь скорости; ω_0 — масштаб вектора вихря; Ω — безразмерный аналог вектора вихря.

Безразмерные уравнения Буссинеска в переменных вихрь скорости — функция тока — температура для рассматриваемой задачи имеют вид:

– для газовой фазы в рассматриваемой области (см. рис. 1)

$$\frac{1}{\text{Sh}}\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + U\frac{\partial \Omega}{\partial X} + V\frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \frac{1}{\sqrt{\text{Gr}}}\Delta\Omega + \frac{1}{2}\frac{\partial \Theta}{\partial X}, \tag{6}$$

$$\Delta\Psi = -2\cdot\Omega, \tag{7}$$

$$\frac{1}{\text{Sh}}\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U\frac{\partial \Theta}{\partial X} + V\frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Pr}\cdot\sqrt{\text{Gr}}}\Delta\Theta; \tag{8}$$

– для твердой фазы

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial \text{Fo}_i} = \Delta\Theta_i,\quad i = 1, 2, 3. \tag{9}$$

Здесь $\mathrm{Sh} = \frac{V_0 t_0}{L}$ — число Струхаля, $\mathrm{Gr} = \frac{\beta g_y L^3 \left(T_{\text{ит}} - T_0\right)}{\nu^2}$ — число Грасгофа, ν — коэффициент кинематической вязкости, $\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{a}$ — число Прандтля, a_i — коэффициент температуропроводности i-й подобласти, $\mathrm{Fo}_i = \frac{a_i t_0}{L^2}$ — число Фурье, соответствующее i-й подобласти.

Граничные условия для системы уравнений (1)–(5) будут следующими:

$$-\lambda_i \frac{\partial T_i(0,y,t)}{\partial x} = \alpha\left(T^e - T_i(0,y,t)\right) + \varepsilon\sigma\left(\left(T^e\right)^4 - T_i^4(0,y,t)\right), \; x = 0, \; 0 \le y \le h_1 + H + h_3;$$

на остальных внешних границах $y = 0, \; 0 \le x \le 2l_1 + L; \; y = h_1 + H + h_3, \; 0 \le x \le 2l_1 + L;$ $x = 2l_1 + L, \; 0 \le y \le h_1 + H + h_3$ (см. рис. 1):

$$\frac{\partial T_i(x,y,t)}{\partial x^k} = 0, \; x^1 \equiv x, \; x^2 \equiv y, \; i = \overline{1, 3};$$

на внутренних границах области решения

$$y = h_1 + H, \; 0 \le x \le l_1, \; l_1 + L \le x \le 2l_1 + L; \quad x = l_1, \; x = l_1 + L, \; 0 \le y \le h_1:$$

$$\left\{\begin{aligned} & T_i(x,\, y,\, t) = T_j(x,\, y,\, t), \\ & \lambda_i \frac{\partial T_i(x,\, y,\, t)}{\partial x^k} = \lambda_j \frac{\partial T_j(x,\, y,\, t)}{\partial x^k}, \end{aligned}\right. \quad \left| \begin{aligned} & i,\, j = \overline{1, 3}; \; i \ne j, \\ & k = 1,\, 2. \end{aligned}\right.$$

$y = h_1, \; y = h_1 + H, \; l_1 \le x \le l_1 + L; \; x = l_1 + L, \; h_1 \le y \le h_1 + H; \; x = l_1, \; h_1 \le y \le h_1 + h_2,$
$h_1 + h_2 + h_{\text{ит}} \le y \le h_1 + H$:

$$u(x, y, t) = v(x, y, t) = 0,$$

$$\left\{\begin{aligned} & T_i(x,\, y,\, t) = T_4(x,\, y,\, t), \\ & \lambda_i \frac{\partial T_i(x,\, y,\, t)}{\partial x^k} = \lambda_4 \frac{\partial T_4(x,\, y,\, t)}{\partial x^k}, \end{aligned}\right. \quad \left| \begin{aligned} & i = \overline{1, 3}, \\ & k = 1,\, 2. \end{aligned}\right.$$

$x = l_1, \; h_1 + h_2 \le y \le h_1 + h_2 + h_{\text{ит}}$:

$$T(x, y, t) = 303 \text{ K},$$

$y = h_1 + h_2, \; y = h_1 + h_2 + h_{\text{ит}}, \; l_1 \le x \le l_1 + l_{\text{ит}}; \; x = l_1 + l_{\text{ит}}, \; h_1 + h_2 \le y \le h_1 + h_2 + h_{\text{ит}}$:

$$u(x, y, t) = v(x, y, t) = 0,$$

$$T(x, y, t) = 303 \text{ K},$$

Здесь α — коэффициент теплообмена, ε — приведенная степень черноты, σ — постоянная Стефана — Больцмана.

Предполагалось, что источник тепловыделения имеет постоянную в течение всего времени температуру. Значения вихря скорости вычислены по формуле Вудса [5, 6].

Задача (6)–(9) с соответствующими граничными и начальными условиями решена методом конечных разностей [5–9].

Уравнения (6)–(9) решались последовательно, каждый временной шаг начинался с вычислений полей температуры, как в газовой, так и в твердой фазе (уравнения (8), (9)), затем решалось уравнение Пуассона для функции тока (7), далее определялись граничные условия для вектора вихря и решалось уравнение (6). Алгоритм реализован в виде конечно-разностной программы. Уравнение Пуассона решалось методом установления.

Исследования проведены при следующих значениях безразмерных комплексов: Sh = 1, Gr = 10^6, Pr = 0,71 и определяющих температур: T^e = 273 K, $T_{ит}$ = 303 K, T_0 = 283 K. Численный анализ проведен при следующих геометрических параметрах (см. рис. 1): l_1 = 0,6 м, $l_{ит}$ = 0,3 м, L = 1,8 м, h_1 = 0,3 м, h_2 = 0,4 м, $h_{ит}$ = 0,4 м, h_3 = 0,3 м, H = 1,4 м. Поскольку рассматривался существенно нестационарный процесс Sh = 1, для определения масштаба времени необходимо знать масштабы скорости и длины: $t_0 = \dfrac{L}{V_0} = \sqrt{\dfrac{L}{g\beta\Delta T}}$.

Следует отметить, что на границах источника тепловыделения не учитывается лучистый теплообмен, поскольку его роль менее существенна, чем конвективно-кондуктивная составляющая процесса теплопереноса. Если рассмотреть тепловые потоки за счет излучения, то $q = \sigma\varepsilon\left(T_{ит}^4 - T_0^4\right)$ ≈ 32,26 Вт/м^2, где σ = = 5,669·10^{-8} Вт/(м^4·K), ε = 0,3, а в случае конвективно-кондуктивного механизма, q = $\alpha(T_{ит} - T_0)$ ≈ 160 Вт/м^2, где α = 8 Вт/(м^2·K). Видно, что лучистый тепловой поток составляет около 20 % от конвективно-кондуктивного потока в рассматриваемом диапазоне изменения параметров.

АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 2 приведены типичные результаты решения сформулированной краевой задачи в виде поля скорости $\vec{V}(x, y)$ и линий тока.

На рис. 2 видно, что источник тепловыделения является причиной появления четырех циркуляционных потоков. Самый большой вихрь находится в центре воздушной полости и представляет собой движение воздуха по спирали. В окрестности источника тепловыделения поток поднимается, поскольку плотность теплого воздуха меньше плотности холодного, а у противоположной стены — опускается. В воздушной полости рассматриваемой области решения находятся еще три вихря: два — под источником тепловыделения, представляющие собой вторичные циркуляционные течения, а один — над источником. Появление этих дополнительных вихрей объясняется тем, что источник тепловыделения имеет конечные размеры. Области над источником и под ним можно рассматривать как зоны, одна из стенок которых имеет максимальную температуру. Из рисунка видно, что воздушные массы опускаются вдоль холодной стены, а поднимаются со стороны движения первого вихря.

На рис. 3 представлено поле вектора вихря для данного режима течения. Форма линий постоянных ω показывает распределение завихренности потока, которое характеризует распространение возмущений от стенки и от источника тепловыделения в глубь воздушной полости. Видно, что интенсивнее всего образование вихрей происходит у источника тепловыделения, это объясняется интенсификацией процессов переноса у нагретого участка.

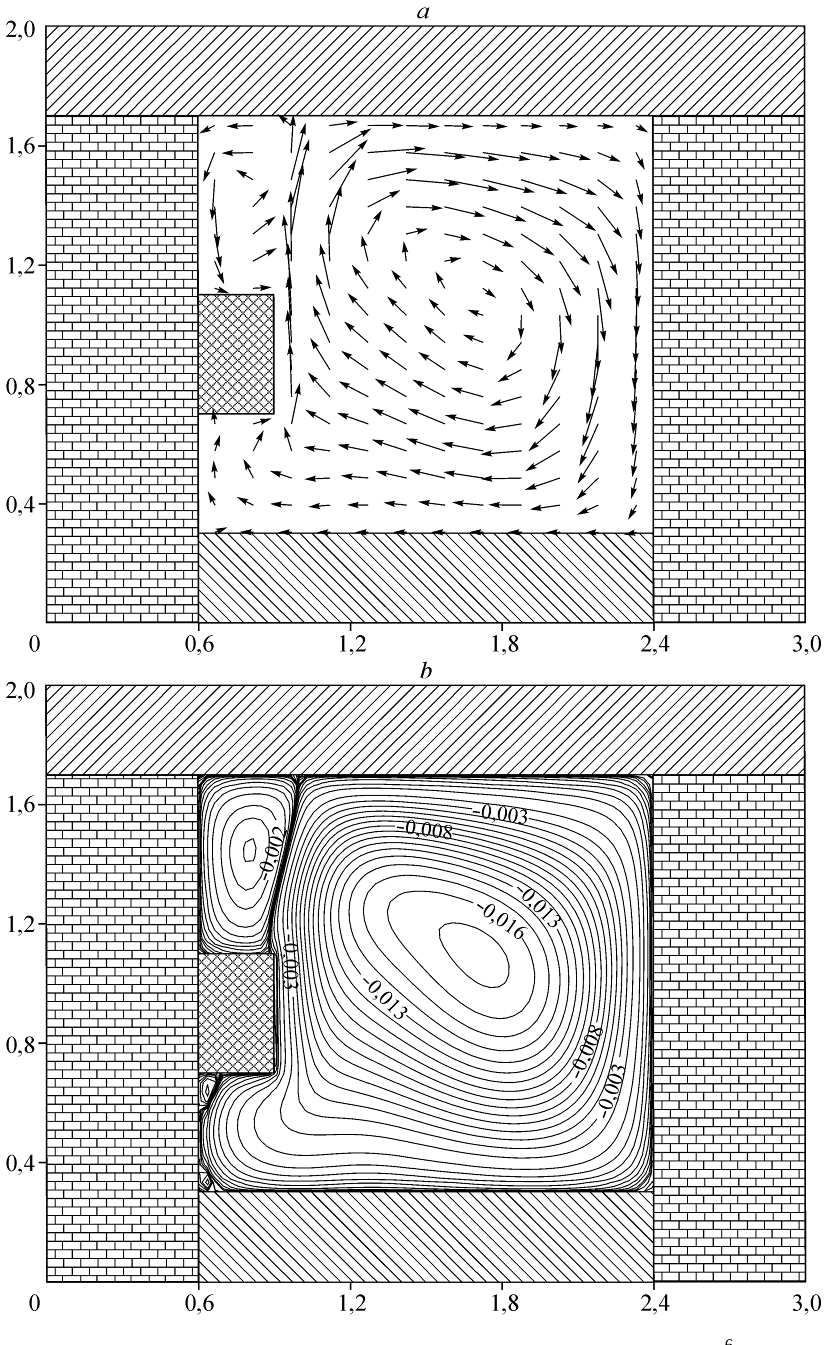


Рис. 2. Типичные поля скорости (*a*) и линии тока (*b*) при Sh = 1, Gr = 10^6, Pr = 0,71.

Распределение температуры наглядно демонстрирует влияние подъемной силы $g\beta\Delta T$, которая появляется вследствие неоднородности поля температуры [3].

Рисунок 4 показывает, что температура в газовой среде распределяется достаточно неравномерно из-за влияния архимедовой силы. Источник тепловыделения также оказывает влияние на распределение температуры на участке прямоугольной формы, у которого он находится. Распределение температуры в этой подобласти равномерно. Это объясняется тем, что в рассматриваемой постановке задачи среда в данной подобласти считалась изотропной. Поскольку рассматривается

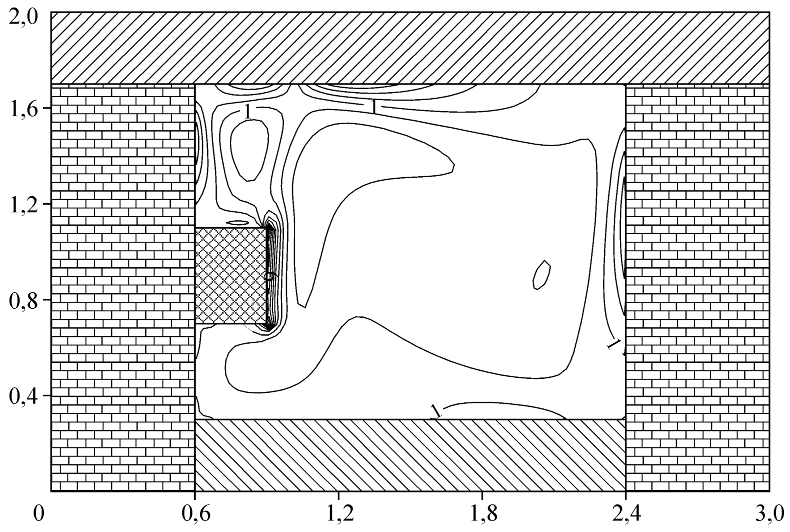


Рис. 3. Типичное поле вектора вихря при Sh = 1, Gr = 10^6, Pr = 0,71.

область с неоднородными теплофизическими характеристиками, то можно отметить, что изотермы с приближением к нижнему основанию рассматриваемой области выравниваются по границе раздела двух сред.

Силы внутреннего трения препятствуют возмущениям, исходящим от стенок. Объемные силы, наоборот, усиливают неупорядоченность течения. Следовательно, силы вязкого трения и объемные оказывают на течение противоположное влияние. Характер движения в рассматриваемой области связан с численным значением критерия Gr. Малым его значениям соответствует ламинарное течение. С возрастанием Gr устойчивость этого течения уменьшается; при некотором критическом значении $Gr_{кр}$ ламинарное движение переходит в турбулентное. Изменение характера движения влечет за собой изменение механизма переноса количества движения и тепла.

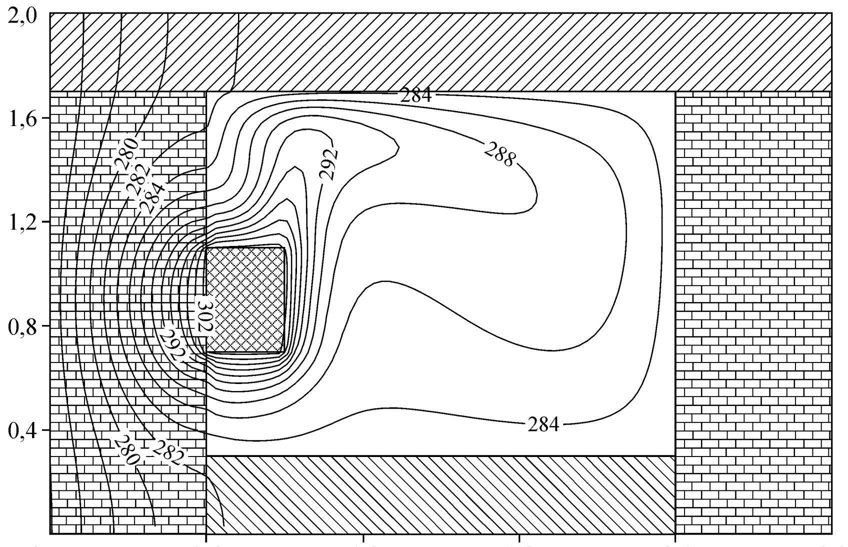


Рис. 4. Типичное поле температуры при Sh = 1, Gr = 10^6, Pr = 0,71.

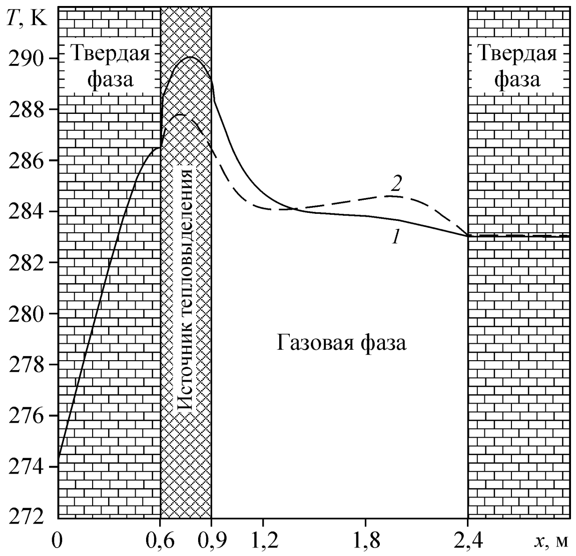


Рис. 5. Распределение температуры в сечении, проходящем под источником тепловыделения, $y = 0{,}5$ м. $\mathrm{Gr} = 10^5$ (*1*), 10^6 (*2*).

Рассмотрено влияние Gr на профиль температуры по длине области решения в трех характерных сечениях при значениях Gr, соответствующих ламинарному режиму течения [3]. Данные результаты получены при следующих определяющих температурах: $T^e = 273$ K, $T_{\text{ит}} = 303$ K, $T_0 = 283$ K.

На рис. 5 представлены профили температуры в сечении под источником тепловыделения $y = 0{,}5$ м. Видно, что возрастание Gr на один порядок величины приводит к уменьшению максимальной температуры непосредственно под источником тепловыделения на 2 K. В окрестности нагревателя $0{,}9 < x < 1{,}33$ температура в случае $\mathrm{Gr} = 10^6$ меньше, чем в случае $\mathrm{Gr} = 10^5$, а при $1{,}33 < x < 2{,}4$ — наоборот. Такое распределение температуры объясняется расположением сечения в рассматриваемой области, поскольку с ростом Gr возрастает роль подъемной силы, что приводит к уменьшению температуры в зонах у основания области.

В сечении, проходящем через источник тепловыделения $y = 0{,}9$ м, картина незначительно изменяется с ростом Gr. Профили температуры на рис. 6 показывают, что в окрестности источника тепловыделения, который является причиной свободно конвективного движения, Gr оказывает незначительное влияние. Из рис. 6 видно, что максимальная температура, соответствующая $\mathrm{Gr} = 10^6$, ниже, чем при $\mathrm{Gr} = 10^5$ на 4 K в зоне, близкой к источнику тепловыделения. При значениях $1{,}53 < x < 2{,}4$ картина меняется на противоположную, но незначительно. Такое изменение обусловлено влиянием возмущений от подобласти прямоугольной формы, расположенной в правой части области решения, т. е. происходит перераспределение температуры за счет интенсификации завихренности вектора скорости.

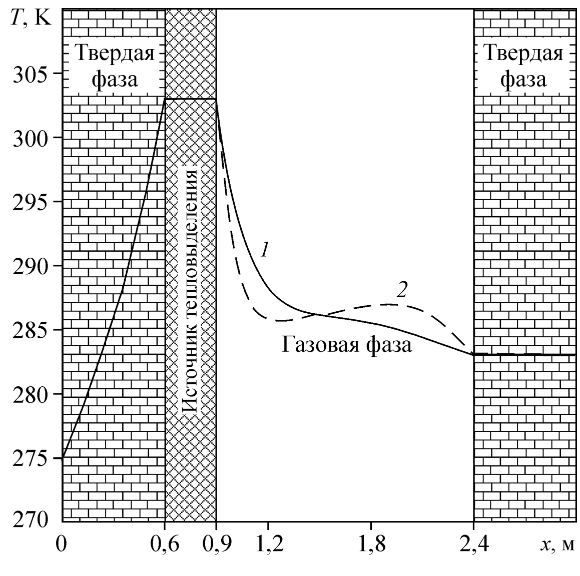
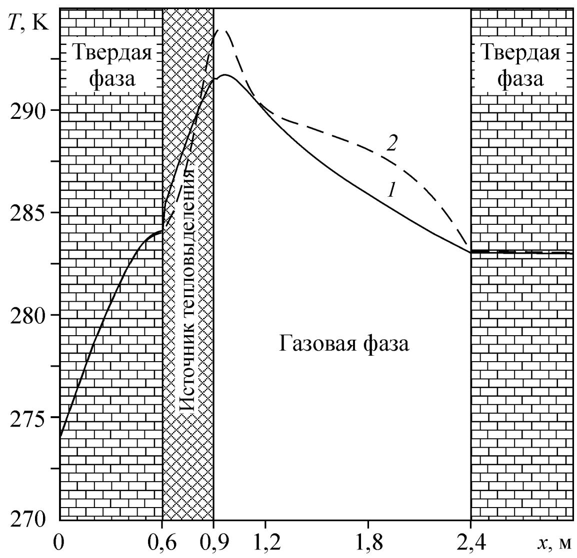


Рис. 6. Распределение температуры в сечении, проходящем по источнику тепловыделения, $y = 0{,}9$ м. $\mathrm{Gr} = 10^5$ (*1*), 10^6 (*2*).

Рис. 7. Распределение температуры в сечении, проходящем над источником тепловыделения, $y = 1{,}4$ м. $\mathrm{Gr} = 10^5$ (*1*), 10^6 (*2*).



На рис. 7 приведены распределения температуры в сечении над источником тепловыделения $y = 1{,}4$ м. Видно, что температура, соответствующая $\mathrm{Gr} = 10^6$, имеет неравномерный профиль, что объясняется большим влиянием подъемной силы. При $0{,}8 < x < 1{,}1$ разность максимальных температур составляет около 2 К, а при $1{,}2 < x < 2{,}4$ – 3 К.

На основе проведенного анализа изменений температуры по разным сечениям области решения при двух значениях Gr, можно сделать вывод о том, что изменение критерия Грасгофа в 10 раз приводит к заметному (≈2−4 К) перераспределению температуры в случае, когда $\mathrm{Gr} > 10^4$.

Было проведено сравнение влияния конвективного и кондуктивного теплопереносов на распределение температур [10, 11] при $T^e = 273$ К, $T_{\text{ит}} = 303$ К, $T_0 = 283$ К. В случае только кондуктивного теплопереноса температура распределяется равномерно, поскольку в данном случае не учитывается влияние подъемной силы, и изотермы представляют собой концентрические эллипсы, также как и в прямоугольной области, у которой находится источник тепловыделения. Сравнивая максимальные температуры в сечении под источником тепловыделения, в режимах кондуктивного и конвективного теплопереносов при $\mathrm{Gr} = 10^6$ получаем, что температура в случае кондуктивного теплопереноса наибольшая. В случае режима естественной конвекции — на 3 К меньше. В сечении, проходящем по источнику тепловыделения, разность максимальных температур при реализации кондуктивного и конвективного теплопереносов в области, близкой к нагревателю, равна 7 К. В сечении над зоной тепловыделения конвекция проявляется в полной мере, причем максимум температуры находится не строго по центру, а смещен в сторону источника тепловыделения. Разность максимальных температур для режимов конвекции и теплопроводности достигает 7 К.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Впервые решена задача сопряженного теплопереноса с учетом механизмов теплопроводности и естественной конвекции в замкнутой области прямоугольного сечения с локально сосредоточенным источником тепловыделения в условиях конвективно-радиационного теплообмена на одной из внешних границ области решения.

На основании проведенных численных исследований можно сделать вывод о том, что температурное поле в рассматриваемой области решения существенно неоднородно. Эта неоднородность объясняется влиянием подъемной силы на газовую среду, в результате чего в рассматриваемой области образуются четыре циркуляционных течения, которые приводят к неравномерному перераспределению температуры. Более отчетливо температурная неоднородность наблюдается в сечении над источником тепловыделения. Сравнение температурных полей, полученных в режиме только кондуктивного теплопереноса и естественной конвекции, показывает масштабы влияния конвекции на интенсивность теплопереноса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Иванов В.В., Карасева Л.В., Тихомиров С.А.** Моделирование процессов теплопереноса в многослойных ограждающих конструкциях // Тр. III Российской национальной конф. по теплообмену. Т. 7. — М.: Изд-во МЭИ, 2002. — С. 131–134.
2. **Матюхов Д.В., Низовцев М.И., Терехов В.И., Терехов В.В.** Определение теплозащитных характеристик теплоинерционных конструкций в условиях нестационарного теплообмена // Там же. — С. 184–187.
3. **Джалурия Й.** Естественная конвекция: Тепло- и массообмен. — М.: Мир, 1983. — 400 с.
4. **Соковишин Ю.А., Мартыненко О.Г.** Введение в теорию свободно-конвективного теплообмена. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1982. — 224 с.
5. **Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А.** Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. — М.: Наука, 1984. — 288 с.
6. **Роуч П.** Вычислительная гидродинамика. — М.: Мир, 1980. — 616 с.
7. **Ши Д.** Численные методы в задачах теплообмена. — М.: Мир, 1988. — 544 с.
8. **Самарский А.А.** Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977. — 656 с.
9. **Березин И.С., Жидков Н.П.** Методы вычислений. — М.: Физматгиз, 1962. — Т. 2. — 640 с.
10. **Лыков А.В.** Теория теплопроводности. — М.: Высшая школа, 1967. — 600 с.
11. **Кузнецов Г.В., Шеремет М.А.** Моделирование пространственного теплопереноса в замкнутом объеме с локально сосредоточенными источниками тепловыделения. // Изв. Томского политехн. ун-та. — 2003. — Т. 306, № 6. — С. 69–72.

Статья поступила в редакцию 30 июля 2004 г.