

Дифракция короткоимпульсного лагерр-гауссова пучка

В.А. Банах, Л.О. Герасимова*

Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634055, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1

Поступила в редакцию 4.02.2016 г.

На основе численного решения параболического волнового уравнения для комплексной спектральной амплитуды поля волны проведено исследование распространения короткоимпульсных вихревых оптических пучков в однородной среде на примере лагерр-гауссова пучка фемтосекундной длительности. Показано, что с уменьшением длительности импульса дифракционное расплывание лагерр-гауссовых пучков уменьшается по сравнению с пучками непрерывного излучения.

Ключевые слова: лагерр-гауссов пучок, импульсное излучение, параболическое волновое уравнение; Laguerre–Gaussian beam, short pulse, parabolic wave equation.

Введение

Замечательные свойства вихревых лазерных пучков: сохранение структуры распределения интенсивности в поперечной плоскости при распространении в свободном пространстве и наличие орбитального углового момента, вызывающего вращательное движение энергии излучения вокруг оси пучка, — открывают новые возможности для их практического использования. В частности, наличие орбитального углового момента позволяет при использовании вихревых пучков мультиплицировать число каналов оптических линий связи на одной частоте и тем самымкратно повысить их информационную емкость [1–3].

В последнее время уделяется значительное внимание методам генерации и исследованию свойств вихревых и, в частности, лагерр-гауссовых импульсных пучков со сверхкороткой длительностью импульса [4–9]. Так, в статьях [7–9] представлены данные о возможности генерации импульсов вихревых пучков вплоть до длительностей, составляющих всего 5,9 фс [9]. Возможность создания вихревых пучков импульсного излучения фемтосекундной длительности и потребности их практического использования определяют актуальность исследования особенностей распространения и дифракции импульсных вихревых пучков.

Результаты исследований распространения и дифракции гауссовых импульсных пучков со сверхкороткой длительностью импульса представлены, в частности, в [10–16]. В [15, 16] предложен алгоритм численного моделирования распространения короткоимпульсного лазерного излучения в турбулентной

атмосфере на основе решения параболического волнового уравнения для комплексной спектральной амплитуды поля волны методом расщепления по физическим факторам. Решение параболического уравнения осуществляется для гауссовых пучков излучения на частотах дискретного временного спектра, ширина которого определяется длительностью импульса.

В настоящей статье с использованием алгоритма [15, 16] проведены расчеты плотности энергии излучения для разных мод импульсного лагерр-гауссова пучка с фемтосекундной длительностью импульса, распространяющегося в свободном пространстве.

1. Формулировка задачи

Пусть импульсное лазерное излучение распространяется в однородной среде вдоль оси $x \geq 0$ и в начальной плоскости $x = 0$ напряженность электрического поля пучка допускает представление в виде

$$E(0, \rho, t) = E_{nm}^0(\rho) \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau_0^2} - 2\pi j f_0 t\right), \quad (1)$$

где комплексная амплитуда поля волны $E_{nm}^0(\rho)$ в точке $(x = 0, \rho)$ задается в виде лагерр-гауссова пучка [17]:

$$E_{nm}^0(\rho) = E_{nm}^0(0) (-j)^m \frac{1}{2} \left(-\frac{\rho}{a}\right)^m \times \\ \times \exp\left[-\frac{\rho^2}{2a^2} + j\psi_0 + jm\theta\right] L_n^m\left(-\frac{\rho^2}{a^2}\right), \quad (2)$$

* Виктор Арсентьевич Банах (banakh@iao.ru); Лилия Олеговна Герасимова (lilyan@iao.ru).

где a определяет ограниченность лаггеррова пучка в пространстве; $j = \sqrt{-1}$; ρ, θ – полярные координаты; $L_n^m = x^{-1} \exp(x) \frac{d^n}{dx^n} [x^{n+1} \exp(-x)]$ – полином

Лагерра, целые числа m и n определяют лаггерр-гауссовы моды $E_{nm}^0(\rho)$; ψ_0 – фаза волны, не зависящая от ρ и t , t – время; f_0 – частота в точке максимума спектра излучения; τ_0 – начальная длительность импульса, определяемая по спаданию $|E(0,0,t)|^2$ до уровня e^{-1} . Длительность импульса $\tau_P(x)$, определяемая по спаданию мощности $\int_{-\infty}^{+\infty} d^2\rho |E(x,\rho,t)|^2$ до

уровня $1/2$ справа и слева от точки максимума $t = t_{\max}$, в плоскости $x = 0$ связана с τ_0 соотношением $\tau_P(0) = 2\sqrt{\ln 2} \tau_0$. Условие $m = n = 0$ в уравнении (2) определяет низшую моду лаггерр-гауссова пучка – гауссов пучок вида

$$E_{00}^0(\rho) = E_{00}^0(0) \exp\left(\frac{\rho^2}{2a^2} + j\psi_0\right). \quad (3)$$

В (3) параметр a определяет радиус гауссова пучка в поперечной плоскости и рассчитывается как расстояние от оси, на котором интенсивность уменьшается до уровня e^{-1} от своего максимального значения; $\rho = \{y, z\}$ – радиус-вектор в плоскости, перпендикулярной оптической оси x .

Будем считать, что распространение импульсно-го излучения происходит в однородной среде с показателем преломления $n(x, \rho, f) = 1$, и введем спектральную амплитуду напряженности электрического поля:

$$\begin{aligned} \tilde{E}(x, \rho, f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt E(x, \rho, t) \exp(2\pi jft) = \\ &= U(x, \rho, f) \exp\left(\frac{2\pi jfx}{c}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь f – линейная частота; c – скорость света в вакууме.

В этом случае в соответствии с [18] для комплексной спектральной амплитуды поля волны $U(x, \rho, f)$ справедливо уравнение

$$\frac{j4\pi f}{c} \frac{\partial U(x, \rho, f)}{\partial x} + \Delta_{\perp} U(x, \rho, f) = 0 \quad (5)$$

с граничным условием согласно (1) и (4)

$$\begin{aligned} \tilde{E}(0, \rho, f) &= U(0, \rho, f) = \\ &= \sqrt{2\pi\tau_0} E_{nm}^0(\rho) \exp\left[-\frac{(f-f_0)^2 (2\pi\tau_0)^2}{2}\right], \end{aligned} \quad (6)$$

где $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ – поперечный оператор Лапласа.

2. Алгоритм численного решения уравнения для спектральной амплитуды

Алгоритм численного решения параболического уравнения (5) с граничным условием (6) основывается на быстром преобразовании Фурье.

Применив к спектральной амплитуде $U(x, \rho, f)$ двумерное преобразование Фурье по пространственной координате ρ

$$\tilde{U}(x, \mathbf{k}, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^2\rho U(x, \rho, f) \exp(-2\pi j\mathbf{k}\rho), \quad (7)$$

где $\mathbf{k} = \{k_y, k_z\}$ – вектор пространственных частот, из уравнения для $U(x, \rho, f)$ (5) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для $\tilde{U}(x, \mathbf{k}, f)$, решение которого с учетом (7) имеет вид

$$\tilde{U}(x, \mathbf{k}, f) = \tilde{U}(\mathbf{k}, f) \exp\left(-j\pi\mathbf{k}^2 x \frac{c}{f}\right). \quad (8)$$

После обратного двумерного преобразования Фурье к (8) рассчитывается спектральная амплитуда

$$U(x, \rho, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^2\mathbf{k} \tilde{U}(x, \mathbf{k}, f) \exp(2\pi j\mathbf{k}\rho). \quad (9)$$

Расчеты спектральной амплитуды $U(x, \rho, f)$ на основе этого алгоритма осуществляются для $K + 1$ пучков на частотах $f = f_0 + (k - K/2)\Delta f$ ($k = 0, 1, \dots, K$ и Δf – шаг по частоте) в узлах равномерной сетки $\rho = \{(m_y - M/2)h, (m_z - M/2)h\}$ с шагом дискретизации h ($m_{y,z} = 0, 1, \dots, M - 1$). Для вычисления $\tilde{U}(x, \mathbf{k}, f)$ в узлах расчетной сетки $\mathbf{k} = \{k_y/(Mh), k_z/(Mh)\}$ ($k_{y,z} = 0, 1, \dots, M - 1$) и $U(x, \rho, f)$ вместо интегрирования согласно формулам (7) и (9) применяется прямое и обратное двумерное быстрое преобразование Фурье соответственно. Значения K и M определяют размерность трехмерных массивов ($K \times M \times M$) рассчитываемых комплексных величин и объем требуемой оперативной памяти компьютера. Шаг по частоте Δf должен удовлетворять условиям: $\Delta f \ll \sigma_f$ и $K\Delta f \gg \sigma_f$, где $\sigma_f = (2\pi\tau_0)^{-1}$ – ширина спектра излучения, определяемая по спаданию $|\tilde{E}(0,0,f)|^2$ от точки максимума до уровня e^{-1} .

Алгоритм (7)–(9) использовался для расчета спектральной интенсивности

$$S_I(x, \rho, f) = |U(x, \rho, f)|^2 \quad (10)$$

и интегральной за время импульса плотности энергии пучка, определяемой как интеграл от спектральной интенсивности (10) по временным частотам [19]:

$$W(x, \rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} df S_I(x, \rho, f). \quad (11)$$

В расчетах интегрирование в (11) заменялось суммированием $U(x, \rho, f)$ по всем компонентам частотного спектра (по всем индексам k).

3. Результаты численного моделирования

Численное моделирование распределений $W(x, \rho)$ в однородной среде проводилось для мод E_{00}^0 , E_{02}^0 , E_{08}^0 лаггерр-гауссовых пучков с длительностью импульса $\tau_p(0) = 3$ фс ($\tau_0 = 1,8$ фс), 5 фс ($\tau_0 = 3$ фс) и ∞ ($\tau_0 \rightarrow \infty$). Для импульсов длительностью $\tau_p(0) = 3$ фс в каждом узле расчетной сетки $M \times M = 1024 \times 1024$ с шагом дискретизации $h = 4$ мм значения комплексной спектральной амплитуды $U(x, \rho, f)$ рассчитывались для 60 спектральных каналов шириной $\Delta f = 10$ ТГц, т.е. в дискретном представлении для частот $f = f_1 + k\Delta f$ при $f_1 = 10$ ТГц, $k = 0, 1, \dots, K$ и $K = 59$. Для импульсов длительностью $\tau_p(0) = 5$ фс значения $U(x, \rho, f)$ на расчетной сетке $M \times M = 1024 \times 1024$ с шагом $h = 4$ мм вычислялись для 41 спектрального канала $f = f_1 + k\Delta f$, $k = 0, 1, \dots, K$, начиная с частоты $f_1 = 100$ ТГц, с шагом $\Delta f = 10$ ТГц, $K = 40$. Третий рассмотренный случай при $\tau_p(0) = \infty$ ($\tau_0 \rightarrow \infty$) соответствует непрерывному излучению, интенсивность которого с частотой f_0 не изменяется, и, следовательно, $W(x, \rho)|_{\tau_0 \rightarrow \infty} = I(x, \rho)$.

На рис. 1 представлены результаты расчета нормированной плотности энергии $W(x, \rho)/W(x, 0)$ импульсного и нормированной интенсивности $I(x, \rho)/I(x, 0)$ непрерывных лаггерр-гауссовых пучков в зависимости от расстояния от оси пучка ρ . Расчеты проведены для мод E_{02}^0 и E_{08}^0 лаггерр-гауссова пучка длительностью $\tau_p(0) = 3$ фс ($\tau_0 = 1,8$ фс), 5 фс ($\tau_0 = 3$ фс) и ∞ ($\tau_0 \rightarrow \infty$), $\lambda_0 = 1$ мкм ($f_0 = 300$ ТГц), $a = 2$ см на трассе длиной $x = 1$ (рис. 1, а), 5 (рис. 1, б) и 10 км (рис. 1, в).

Из рис. 1 видно, что при распространении в однородной среде структура лаггерр-гауссова пучка сохраняется как для непрерывного (кривые 3, 3'), так и для импульсного излучения при различной длительности импульсов (кривые 1, 1', 2, 2'). С увеличением длины трассы распространения x увеличиваются поперечные размеры пучка тем больше, чем больше порядок лаггерр-гауссовой моды. Пространственные распределения плотности энергии пучков с одинаковым значением топологического заряда m , но с разной длительностью импульса отличаются. Так, радиус внутренней окружности кольца моды E_{08}^0 лаггерр-гауссова пучка импульсного излучения с $\tau_p(0) = 3$ фс (рис. 1, в, кривая 1') примерно на 9 и 16% меньше, чем радиусы внутренней окружности кольца импульсного с длительностью $\tau_p(0) = 5$ фс (рис. 1, в, кривая 2') и непрерывного (рис. 1, в, кривая 3') лаггерр-гауссовых пучков соответственно. При этом радиус внешней окружности кольца лаггерр-гауссова пучка увеличивается с уменьшением длительности импульса.

Максимум плотности энергии лаггерр-гауссовых мод E_{02}^0 и E_{08}^0 с уменьшением длительности импульса смещается к оси пучка. Для моды E_{02}^0 различие в радиусах внутренней и внешней окружностей кольца импульсного и непрерывного пучков мень-

ше (рис. 1, в, кривые 1, 2, 3), чем для моды E_{08}^0 . С уменьшением длины трассы распространения эти различия уменьшаются (рис. 1, б) и для трассы $x = 1$ км (рис. 1, а) различия между распределениями $W(x, \rho)/W(x, 0)$ импульсного и $I(x, \rho)/I(x, 0)$ непрерывного излучений нет.

Таким образом, результаты, представленные на рис. 1, наглядно показывают, что подобно гауссовым пучкам [10, 11] дифракционное расплывание лаггерр-гауссовых пучков с уменьшением длительности импульса становится меньше.

Эффект уменьшения дифракционного расплывания лаггерр-гауссовых пучков с уменьшением длительности импульса подтверждается и поведением комплексной спектральной амплитуды $U(x, \rho, f)$. На рис. 2 представлены результаты расчета нормированной спектральной амплитуды $U(x, 0, f)/U(x, 0, f_0)$ для моды E_{08}^0 импульсного лаггерр-гауссова пучка с длительностью импульса $\tau_p(0) = 3$ и 5 фс. Кривые 1 и 2 соответствуют форме спектра в начальной плоскости $x = 0$, кривые 1' и 2' — в конце трассы распространения длиной $x = 10$ км, 3 — спектральная амплитуда на несущей частоте $f_0 = 300$ ТГц.

Из рисунка видно, что с уменьшением длительности импульса точка максимума спектральной амплитуды и сам спектр сдвигаются в сторону больших частот. Так как частота $f \sim c/\lambda$, то эффективная длина волны широкополосного импульсного излучения уменьшается, а с уменьшением длины волны дифракционные эффекты проявляются в меньшей степени.

Рис. 3 иллюстрирует поведение спектральной амплитуды моды E_{08}^0 лаггерр-гауссова пучка с длительностью импульса $\tau_p(0) = 3$ фс при изменении длины трассы распространения. По оси абсцисс вместо частоты используется шкала длин волн.

Для наглядности на рис. 3, б результаты расчета спектра в области максимума представлены в более крупном масштабе, чем на рис. 3, а.

Видно, что с увеличением расстояния максимум спектра смещается в более коротковолновую область, т.е. эффективная длина волны широкополосного излучения уменьшается. Соответственно, уменьшается и дифракционное расплывание лаггерр-гауссовых пучков, как это показано на рис. 1.

Заключение

На основе численного решения параболического волнового уравнения для комплексной спектральной амплитуды поля волны проведено моделирование распространения широкополосных импульсных лаггерр-гауссовых пучков в однородной среде. Моделирование проводилось для мод E_{0m}^0 , $m = 0, 2, 8$, при длительностях импульсов 3 и 5 фс. Число и диапазон спектральных каналов, использовавшихся при моделировании, выбирались в зависимости от длительности импульса. Для импульсов длительностью 3 фс

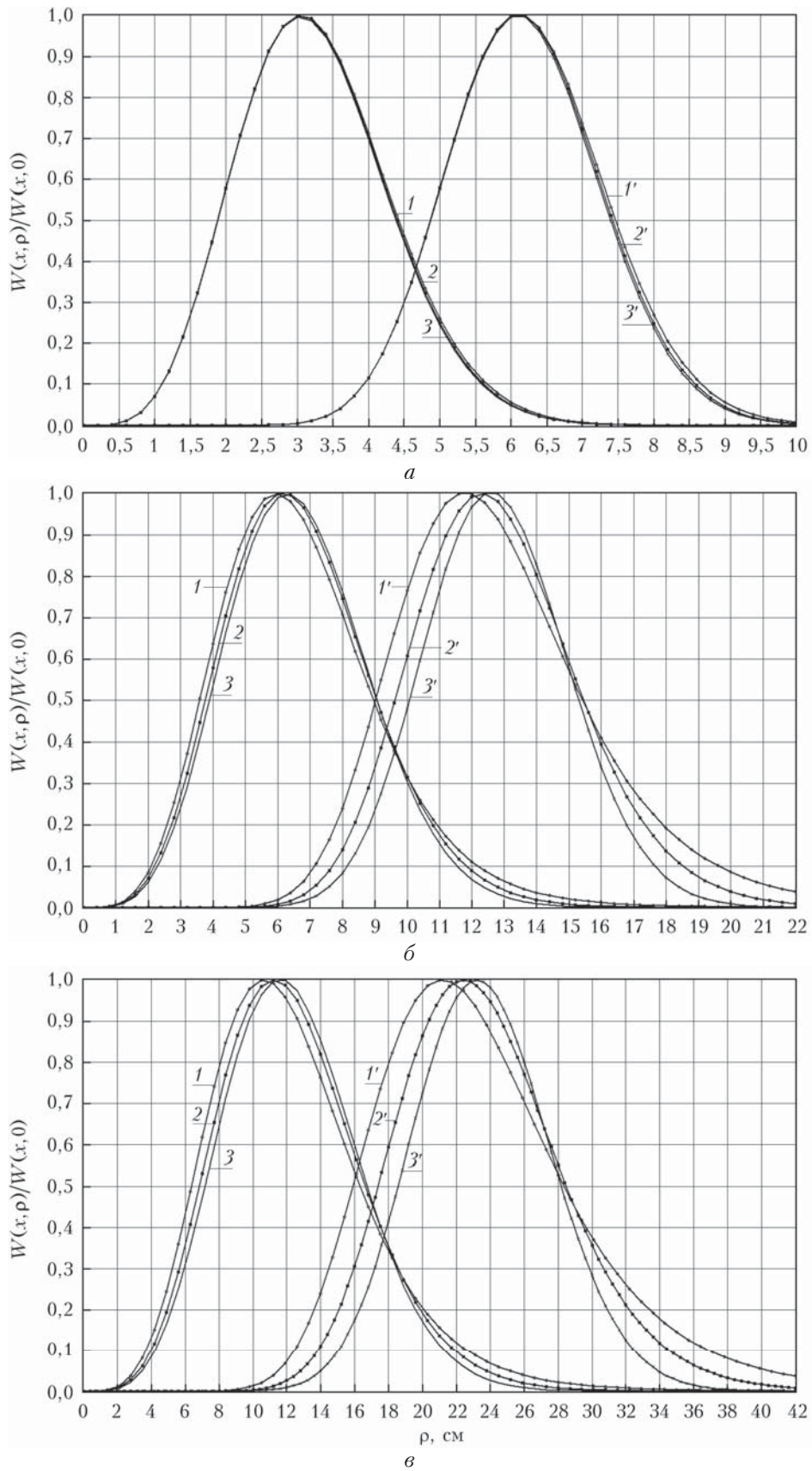


Рис. 1. Распределения нормированной плотности энергии импульсного (1, 1', 2, 2') и нормированной интенсивности непрерывного (3, 3') излучения мод E_{02}^0 (1, 2, 3) и E_{08}^0 (1', 2', 3') лаггер-гауссова пучка. Кривые 1, 1' соответствуют длительности импульса 3 фс, 2, 2' – 5 фс

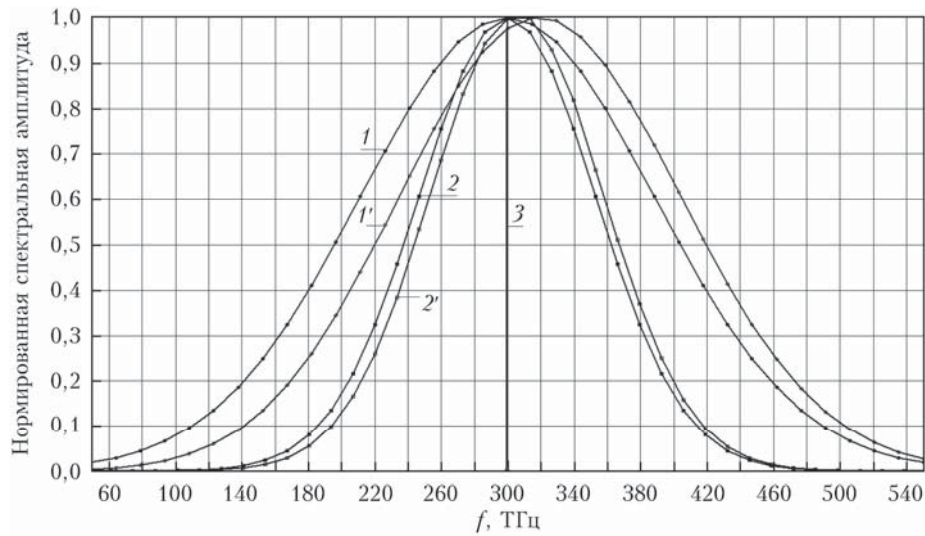


Рис. 2. Нормированная спектральная амплитуда непрерывного (3) и импульсного (1, 1', 2, 2') излучения моды E_{08}^0 лаггер-гауссова пучка. Кривые 1, 1' соответствуют длительности импульса 3 фс в начале (1) и в конце (1') трассы распространения длиной 10 км. Кривые 2, 2' соответствуют длительности импульса 5 фс в начале (2) и в конце (2') трассы длиной 10 км

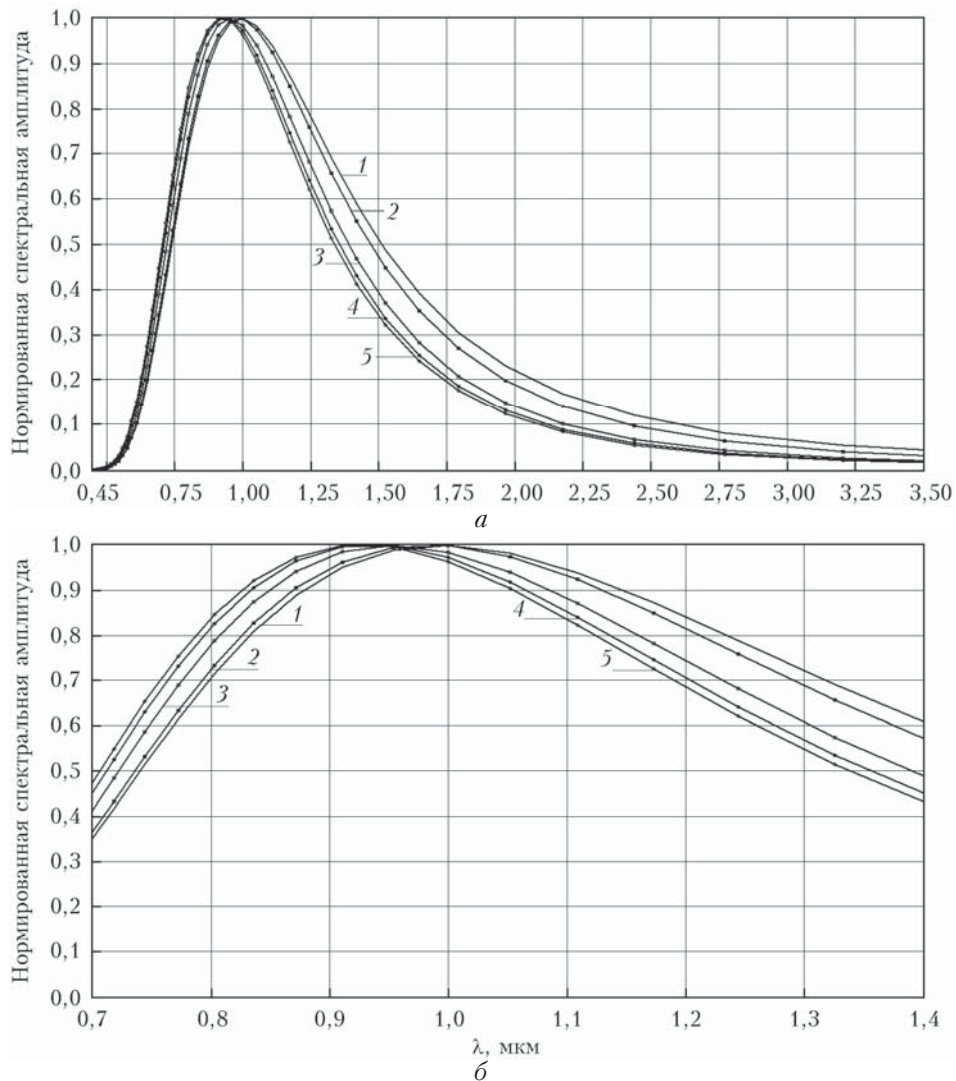


Рис. 3. Нормированная спектральная амплитуда поля моды E_{08}^0 импульсного ($\tau_p(0) = 3$ фс) лаггер-гауссова пучка при $x = 1$ (1), 2 (2), 5 (3), 10 (4), 40 км (5)

комплексная спектральная амплитуда рассчитывалась для 60 спектральных каналов, для импульсов длительностью 5 фс моделирование осуществлялось для 41 спектрального канала. Показано, что пространственные распределения плотности энергии импульсных лагерь-гауссовых пучков с одинаковым топологическим зарядом, но с разной длительностью импульса отличаются. С уменьшением длительности импульса дифракционное расплывание лагерь-гауссовых пучков становится меньше. Это происходит вследствие того, что с уменьшением длительности импульса максимум спектральной амплитуды и сам спектр излучения сдвигаются в более коротковолновую область. То есть эффективная длина волны широкополосного излучения уменьшается и дифракционные эффекты проявляются в меньшей степени.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 14-17-00386.

1. Willner A.E., Huang H., Yan Y., Ren Y., Ahmed N., Xie G., Bao C., Li L., Cao Y., Zhao Z., Wang J., Lavery M.P.J., Tur M., Ramachandran S., Molisch A.F., Ashrafi N., Ashrafi S. Optical communications using orbital angular momentum beams // *Adv. Opt. Photon.* 2015. V. 7. P. 66–106.
2. Wang J., Yang J.-Y., Fazal I.M., Ahmed N., Yan Y., Huang H., Ren Y., Yue Y., Dolinar S., Tur M., Willner A.E. Terabit free-space data transmission employing orbital angular momentum multiplexing // *Nature Photon.* 2012. V. 6. P. 488–496.
3. Yan Y., Xie G., Lavery M.P.J., Huang H., Ahmed N., Bao C., Ren Y., Cao Y., Li L., Zhao Z., Molisch A.F., Tur M., Padgett M.J., Willner A.E. High-capacity millimetre-wave communications with orbital angular momentum multiplexing // *Nature Commun.* 2014. V. 5. Article number: 4876. 9 p.
4. Mahon R.J., Murphy J.A. Diffraction of an optical pulse as an expansion in ultrashort orthogonal Gaussian beam modes // *J. Opt. Soc. Amer. A.* 2013. V. 30, N 2. P. 215–226.
5. Liu Y.-D., Gao Ch. Study on the time-varying and propagating characteristics of ultrashort pulse Laguerre–Gaussian beam // *Opt. Express.* 2010. V. 18, N 12. P. 12104–12110.
6. Liu Y.-D., Gao Ch. Study on the time-varying and propagating characteristics of ultrashort pulse Laguerre–Gaussian beam // *Opt. Soc. Amer.* 2010. V. 18, iss. 12. P. 2104–2110.
7. Zeylikovich I., Sztul H.I., Kartazayev V., Le T., Alfano R.R. Ultrashort Laguerre–Gaussian pulses with angular and group velocity dispersion compensation // *Opt. Lett.* 2007. V. 32, N 14. P. 2025–2027.
8. Schwarz A., Rudolph W. Dispersion-compensating beam shaper for femtosecond optical vortex beams // *Opt. Lett.* 2008. V. 33, N 24. P. 2970–2972.
9. Yamane K., Toda Y., Morita R. Ultrashort optical-vortex pulse generation in few-cycle regime // *Opt. Express.* 2012. V. 20, N 17. P. 18986–18993.
10. Залозная И.В., Фалиц А.В. Дифракционное сжатие коротких импульсов // *Оптика атмосф. и океана.* 2009. Т. 22, № 8. С. 734–738; Zalogznaya I.V., Falits A.V. Diffraction contraction of short pulses // *Atmos. Ocean. Opt.* 2009. V. 22, N 6. P. 590–594.
11. Banakh V.A. Diffraction free propagation of a focused delta-pulsed beam // *Opt. Lett.* 2011. V. 36, N 23. P. 4554–4556.
12. Герасимова Л.О., Залозная И.В. Пространственная и временная когерентность коротких импульсов // *Оптика атмосф. и океана.* 2011. Т. 24, № 3. С. 185–189.
13. Банах В.А., Герасимова Л.О., Залозная И.В., Тихомирова О.В. Дифракция широкополосных импульсных пучков света // *Оптика атмосф. и океана.* 2012. Т. 25, № 11. С. 941–947; Banakh V.A., Gerasimova L.O., Zalogznaya I.V., Tikhomirova O.V. Diffraction of broadband pulsed light beams // *Atmos. Ocean. Opt.* 2012. V. 26, N 3. P. 178–184.
14. Банах В.А., Герасимова Л.О. Распространение широкополосных световых пучков // *Оптика атмосф. и океана.* 2013. Т. 26, № 1. С. 5–10.
15. Banakh V.A., Smalikhov I.N. Fluctuations of energy density of short-pulse optical radiation in the turbulent atmosphere // *Opt. Express.* 2014. V. 22, N 19. P. 1–13.
16. Банах В.А., Герасимова Л.О., Смалыхо И.Н. Численное исследование распространения короткоимпульсного лазерного излучения в турбулентной атмосфере // *Квант. электрон.* 2015. Т. 45, № 3. С. 258–264.
17. Апаньев Ю.А. Оптические резонаторы и лазерные пучки. М.: Наука, 1990. 264 с.
18. Ахманов С.А., Выслоух В.А., Чиркин А.С. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. М.: Наука, 1988. 312 с.
19. Виноградова М.В., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979. 383 с.

V.A. Banakh, L.O. Gerasimova. Diffraction of short pulsed Laguerre–Gaussian beams.

Based on the numerical solution of the parabolic wave equation for the complex spectral amplitude of the wave field the propagation of a short pulsed Laguerre–Gaussian beam with femtosecond duration was studied. It has been shown that the diffraction broadening of the Laguerre–Gaussian beam decreases with the pulse duration in comparison with continuous wave radiation.