УДК 539.3, 539.4

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЧНОСТИ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

А. А. Семенов

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет,
190005 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: sw.semenov@gmail.com

Исследуется влияние геометрической нелинейности при анализе прочности ортотропных цилиндрических панелей. Приведены значения предельно допустимых нагрузок при линейном и нелинейном вариантах расчета конструкций из однонаправленных углепластиков, а также определены нагрузки, при которых происходит потеря устойчивости. Математическая модель учитывает поперечные сдвиги и геометрическую нелинейность и формулируется в форме функционала полной потенциальной энергии деформации. Расчеты проведены на основе метода продолжения решения по параметру. Для оценки прочности используется критерий максимальных напряжений.

Ключевые слова: оболочки, прочность, устойчивость, геометрическая нелинейность, цилиндрические панели, углепластик.

DOI: 10.15372/PMTF20170316

Введение. В последнее время интерес к исследованию оболочечных конструкций обусловлен не только появлением новых перспективных материалов, но и, прежде всего, развитием вычислительной техники [1].

Одним из свойств тонкостенных оболочек является их гибкость, т. е. способность к значительным упругим перемещениям (прогибам), существенно превышающим толщину оболочки [2]. Тонкостенные оболочки представляют собой широкий класс конструкций, которые могут быть использованы при решении различных инженерных задач [3]. Также представляет интерес исследование прочности и устойчивости цилиндрических панелей. В большинстве работ, посвященных изучению цилиндрических панелей, рассматривается деформирование конструкций из изотропных материалов [4–8], используется модель Кирхгофа — Лява и не учитывается возможность потери прочности материала конструкции (исследуется только устойчивость). Кроме того, обычно изучаются конструкции, находящиеся под действием осевого сжатия [4, 7], случаи внешней равномерно распределенной поперечной нагрузки рассматриваются существенно реже [6, 9, 10].

Постановка задачи. Целью данной работы является исследование прочности цилиндрических панелей из ортотропных материалов с учетом геометрической нелинейности.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ (проект № 3801).

Математическая модель. В данной работе математическая модель деформирования тонкой цилиндрической панели строится на основе функционала полной потенциальной энергии деформации и включает геометрические соотношения, связывающие деформации и перемещения, физические соотношения, связывающие напряжения и деформации, и граничные условия, выбираемые в зависимости от способа закрепления контура конструкции. Математическая модель деформирования ортотропных оболочек на основе функционала полной потенциальной энергии деформации с учетом геометрической нелинейности подробно рассмотрена в работе [11]. В модели учитываются поперечные сдвиги, сдвиговые и крутильные жесткости ребер жесткости. Важной особенностью модели является ее формулировка в безразмерных параметрах, являющихся универсальными для широкого класса оболочек вращения.

С учетом сказанного выше функционал полной потенциальной энергии деформации цилиндрической панели имеет вид [11]

$$\begin{aligned}\bar{E}_p = \int_0^1\int_0^1 \big[&\bar{\varepsilon}_x^2 + \bar{G}_2\bar{\varepsilon}_y^2 + (\mu_{21}+\bar{G}_2\mu_{12})\bar{\varepsilon}_x\bar{\varepsilon}_y + \bar{G}_{12}\bar{\lambda}^2\bar{\gamma}_{xy}^2 + \\ &+ \frac{1}{12}\,(\bar{\chi}_1^2 + \bar{G}_2\bar{\chi}_2^2 + (\mu_{21}+\bar{G}_2\mu_{12})\bar{\chi}_1\bar{\chi}_2 + 4\bar{G}_{12}\bar{\lambda}^2\bar{\chi}_{12}^2) + \bar{G}_{13}k\bar{A}^2(\bar{\Psi}_x-\bar{\theta}_1)^2 + \\ &+ \bar{G}_{23}k\bar{A}^2\bar{\lambda}^2(\bar{\Psi}_y-\bar{\theta}_2)^2 - 2(1-\mu_{12}\mu_{21})\bar{P}\bar{W}\big]\,\bar{A}\bar{B}\,d\xi\,d\eta, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{\partial\bar{U}}{\partial\xi} - k_\xi\bar{A}^2\bar{W} + \frac{1}{2}\,\bar{\theta}_1^2, \qquad \bar{\varepsilon}_y = \bar{\lambda}^2\,\frac{\partial\bar{V}}{\partial\eta} + \frac{1}{\bar{B}}\,\frac{\partial\bar{B}}{\partial\xi}\,\bar{U} - k_\eta\bar{A}^2\bar{W} + \frac{1}{2}\,\bar{\lambda}^2\bar{\theta}_2^2,$$

$$\bar{\gamma}_{xy} = \frac{\partial\bar{V}}{\partial\xi} + \frac{\partial\bar{U}}{\partial\eta} - \frac{1}{\bar{B}}\,\frac{\partial\bar{B}}{\partial\xi}\,\bar{V} + \bar{\theta}_1\bar{\theta}_2, \quad \bar{\theta}_1 = -\Big(\frac{\partial\bar{W}}{\partial\xi} + k_\xi\bar{U}\Big), \quad \bar{\theta}_2 = -\Big(\frac{\partial\bar{W}}{\partial\eta} + k_\eta\bar{V}\Big), \tag{2}$$

$$\bar{\chi}_1 = \frac{\partial\bar{\Psi}_x}{\partial\xi}, \quad \bar{\chi}_2 = \bar{\lambda}^2\,\frac{\partial\bar{\Psi}_y}{\partial\eta} + \frac{1}{\bar{B}}\,\frac{\partial\bar{B}}{\partial\xi}\,\bar{\Psi}_x, \quad 2\bar{\chi}_{12} = \frac{\partial\bar{\Psi}_y}{\partial\xi} + \frac{\partial\bar{\Psi}_x}{\partial\eta} - \frac{1}{\bar{B}}\,\frac{\partial\bar{B}}{\partial\xi}\,\bar{\Psi}_y, \quad k = \frac{5}{6},$$

$$\bar{G}_2 = \frac{E_2}{E_1}, \quad \bar{G}_{12} = \frac{G_{12}(1-\mu_{12}\mu_{21})}{E_1}, \quad \bar{G}_{13} = \frac{G_{13}(1-\mu_{12}\mu_{21})}{E_1}, \quad \bar{G}_{23} = \frac{G_{23}(1-\mu_{12}\mu_{21})}{E_1},$$

где E_1, E_2, μ_{12}, μ_{21}, G_{12}, G_{13}, G_{23} — механические характеристики материала: модули упругости, коэффициенты Пуассона и модули сдвига. Для ортотропного материала $E_1\mu_{21} = E_2\mu_{12}$.

В выражениях (1), (2) использованы следующие безразмерные параметры [11]:

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \bar{\lambda} = \frac{aA}{bB}, \quad k_\xi = hk_x, \quad k_\eta = hk_y, \quad \bar{U} = \frac{aUA}{h^2}, \quad \bar{V} = \frac{bVB}{h^2}, \quad \bar{W} = \frac{W}{h},$$

$$\bar{\Psi}_x = \frac{\Psi_x aA}{h}, \quad \bar{\Psi}_y = \frac{\Psi_y bB}{h}, \quad \bar{P} = \frac{a^4A^4q}{h^4E_1}, \quad \bar{A} = \frac{aA}{h}, \quad \bar{B} = \frac{bB}{h}, \quad \bar{z} = \frac{z}{h}.$$

Здесь a, b — размеры цилиндрической панели в направлениях осей x и y соответственно (рис. 1); h — толщина оболочки; $\bar{\lambda}$ — безразмерный коэффициент; $U = U(x,y)$, $V = V(x,y)$, $W = W(x,y)$ — компоненты вектора перемещений; $\Psi_x = \Psi_x(x,y)$, $\Psi_y = \Psi_y(x,y)$ — углы поворота нормали; k_x, k_y — главные кривизны оболочки (для цилиндрической панели $k_x = 0$, $k_y = 1/R$); A, B — параметры Ламе (для цилиндрической панели $A = 1$, $B = R$); q — нагрузка; E_1 — модуль упругости в направлении оси x; ξ, η, $\bar{z}$ — безразмерная система координат.

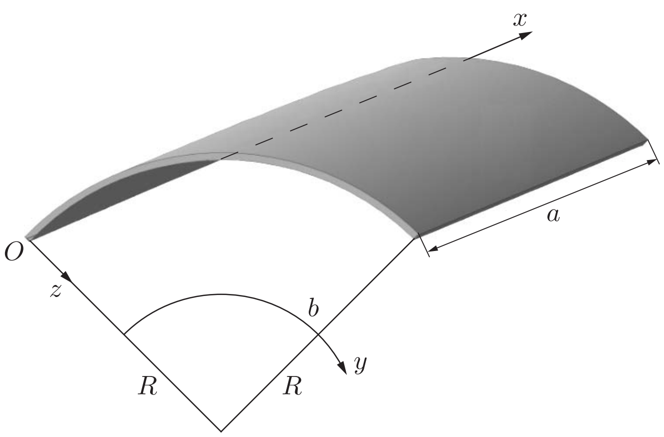

Рис. 1. Цилиндрическая панель

В данной работе приводятся результаты, полученные при использовании алгоритма, основанного на методе Ритца и методе продолжения решения по параметру [12]. При использовании адаптивной сетки такой подход позволяет находить верхние и нижние критические нагрузки, точки бифуркации, а также исследовать закритическое поведение конструкций. Верификация данной методики выполнена в работе [13].

В данной работе для исследования прочности ортотропных оболочечных конструкций используется критерий максимальных напряжений [14]

$$F_1^- \leqslant \sigma_x \leqslant F_1^+, \qquad F_2^- \leqslant \sigma_y \leqslant F_2^+, \qquad |\tau_{xy}| \leqslant F_{12}. \tag{3}$$

Здесь F_1^+, F_2^+ — пределы прочности при растяжении в направлениях x, y; F_1^-, F_2^- — пределы прочности при сжатии; F_{12} — предел прочности при сдвиге в плоскости xOy.

Критерий прочности должен быть инвариантным относительно системы координат. В работе [15] показано, что критерий максимальных напряжений (3) представляет собой вырожденный случай тензорно-полиномиального критерия и его коэффициенты удовлетворяют закону преобразования компонент тензора. Таким образом, данный критерий может быть использован при расчетах конструкций на прочность.

Результаты численных расчетов. Расчеты проводились при сохранении 16 членов разложения функций в ряды методом Ритца. Рассматриваются изготовленные из углепластиков цилиндрические панели, для которых направления осей ортотропии совпадают с направлениями осей локальной системы координат. Конструкции находятся под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки $q(x, y)$, приложенной по нормали к срединной поверхности. Закрепление контура панелей является шарнирно-неподвижным.

В табл. 1 приведены значения механических характеристик материалов, из которых изготовлены цилиндрические панели (E_1, E_2 — модули упругости в направлениях

Таблица 1

Механические характеристики углепластиков

Марка ортотропного углепластика	$E_1 \times 10^{-5}$, МПа	μ_{12}	$E_2 \times 10^{-4}$, МПа	$G_{12} \times 10^{-4}$, МПа	$G_{13} \times 10^{-4}$, МПа	$G_{23} \times 10^{-4}$, МПа	F_1^+, МПа	F_1^-, МПа	F_2^+, МПа	F_2^-, МПа	F_{12}, МПа
ЛУ-П/ЭНФБ	1,40	0,30	0,97	0,46	0,46	0,46	700	−600	27	−184	55,0
T300/Epoxy	1,25	0,34	0,78	0,44	0,44	0,44	1760	−1570	80	−168	98,0
M60J/Epoxy	3,30	0,32	0,59	0,39	0,39	0,39	1760	−780	30	−168	39,0
T300/976	1,40	0,29	0,97	0,55	0,55	0,33	1517	−1599	46	−253	41,4

Таблица 2

Параметры рассматриваемых цилиндрических панелей

Номер цилиндрической панели	a, м	a/h	b	R, м	R/h	h, м	λ_1
1	5 10 20	1000	$\pi/2$	2,7 5,4 10,8	540	0,005 0,010 0,020	1,179
2	5 10 20	1000	π	2,7 5,4 10,8	540	0,005 0,010 0,020	0,589
3	10 20 40	2000	$\pi/2$	2,7 5,4 10,8	540	0,005 0,010 0,020	2,357
4	10 20 40	2000	π	2,7 5,4 10,8	540	0,005 0,010 0,020	1,179

осей x, y; μ_{12} — коэффициент Пуассона; G_{12}, G_{13}, G_{23} — модули сдвига в плоскостях xOy, xOz, yOz соответственно) [16]. Будем считать, что оси ортотропии 1, 2 совпадают с направлениями осей координат x, y. В табл. 2 приведены геометрические параметры рассматриваемых вариантов цилиндрических панелей.

В зависимости от значения параметра $\lambda_1 = a/(Rb)$ рассматриваемые панели можно разделить на три группы: короткие, средние и длинные. Цилиндрическая панель 2 является короткой, панели 1 и 4 — панелями средней длины, панель 3 — длинной.

Рассмотрим цилиндрическую ортотропную панель 3 из углепластика марки Т300/976. На рис. 2 приведена зависимость нагрузки $\bar{P}$ от прогиба $\bar{W}$, а также особые точки, в которых определитель матрицы Якоби (матрицы системы нелинейных алгебраических уравнений) $\det J = 0$. Согласно используемой методике эти точки соответствуют критическим нагрузкам, при которых происходит потеря устойчивости (в точке A $\bar{P}_{cr} = 815\,331{,}61$, в точке C $\bar{P}_{cr} = 540\,980{,}06$). При достижении указанных нагрузок происходит переход в новое равновесное состояние (точки B и D соответственно), сопровождающийся “хлопком”.

При расчете данной конструкции установлено, что в соответствии с критерием максимальных напряжений потеря прочности материала конструкции происходит на нисходящей ветви кривой $\bar{P}(\bar{W})$. Нагрузки, соответствующие этой ветви, не реализуются. Таким образом, будем считать, что потеря прочности происходит в момент потери устойчивости при переходе панели из состояния, соответствующего точке A, в состояние, соответствующее точке B. Следовательно, потеря прочности материала конструкции происходит в момент резкого изменения прогиба панели.

На рис. 3 представлены поля прогибов до и после потери устойчивости (критическая нагрузка $\bar{P}_{cr} = 8{,}15 \cdot 10^5$, $q_{cr} = 0{,}007\,134$ МПа), отсчитываемые от опорной плоскости и от поверхности конструкции.

Анализ прочности данной конструкции, проведенный с использованием критерия максимальных напряжений, показал, что потеря прочности происходит вследствие существенного увеличения значений растягивающих напряжений в направлении оси y на краях панели.

В табл. 3 для всех исследованных вариантов цилиндрических панелей приведены полученные с использованием линейной и нелинейной моделей значения нагрузок, при которых

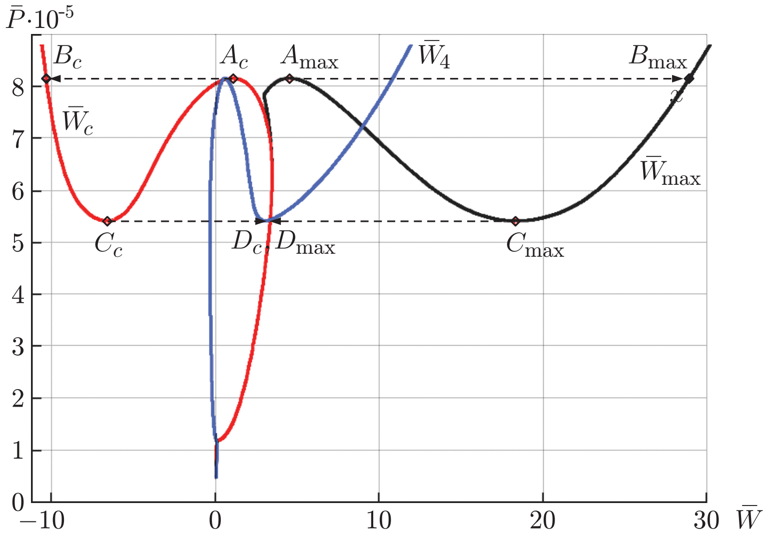

Рис. 2. Зависимость нагрузки $\bar{P}$ от прогиба $\bar{W}$ для цилиндрической панели 3 из углепластика марки T300/976:

$\bar{W}_{\max}$ — максимальный прогиб панели, $\bar{W}_c$ — прогиб в центре панели ($\xi = 0{,}5$, $\eta = 0{,}5$), $\bar{W}_4$ — прогиб панели в точке с координатами $\xi = 0{,}25$, $\eta = 0{,}25$; стрелки — переход из одного равновесного состояния в другое

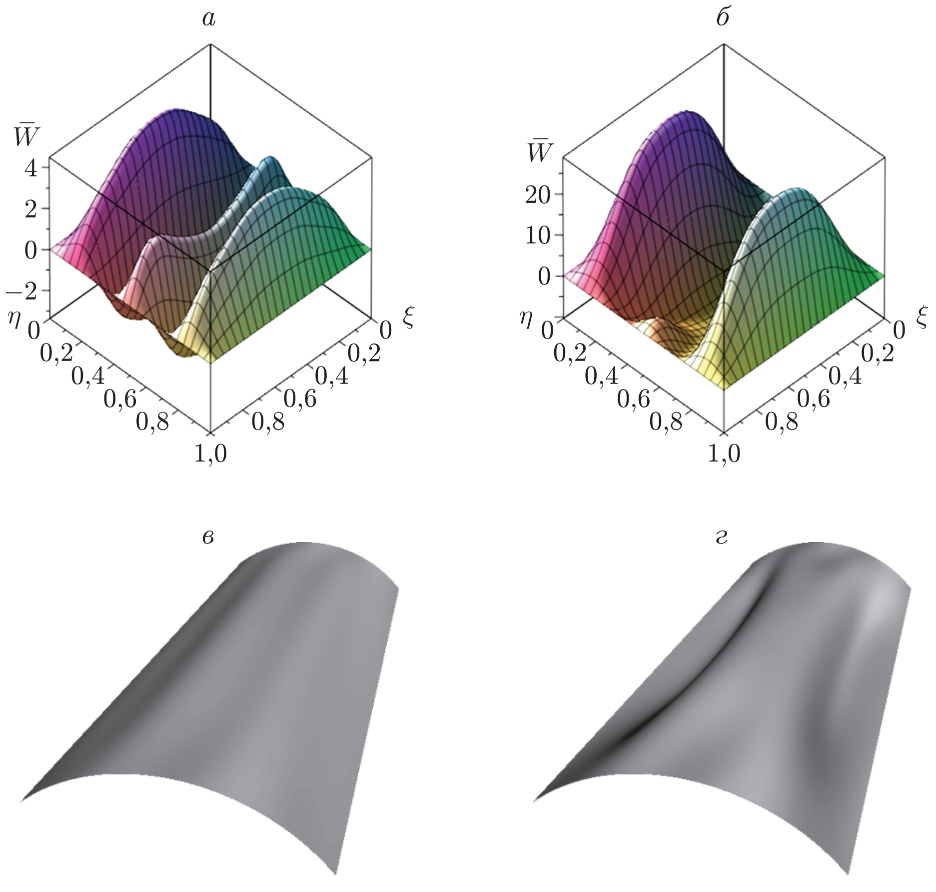

Рис. 3. Прогибы до (*а*, *в*) и после (*б*, *г*) потери устойчивости при нагрузке $\bar{P}_{cr} = 8{,}15 \cdot 10^5$ ($q_{cr} = 0{,}007\,134$ МПа), отсчитываемые от опорной плоскости (*а*, *б*) и от поверхности оболочки (*в*, *г*)

Таблица 3

Значения критических нагрузок, при которых происходит потеря прочности, и нагрузок, при которых происходит потеря устойчивости, для рассматриваемых цилиндрических панелей

Номер панели	Марка углепластика	Линейная модель		Нелинейная модель			$\frac{q_{lin}}{q_{nlin}}$
		q_{lin}, МПа	F	q_{nlin}, МПа	F	q_{cr}, МПа	
1	ЛУ-П/ЭНФБ	0,054	F_2^+	0,025	F_2^+	0,014	2,21
	T300/Epoxy	0,091	F_2^-	0,072	F_2^-	0,151	1,26
	M60J/Epoxy	0,053	F_2^+	0,033	F_2^+	0,072	1,59
	T300/976	0,108	F_2^+	0,045	F_2^+	0,194	2,42
2	ЛУ-П/ЭНФБ	0,059	F_2^+	0,063	F_2^+	0,443	0,94
	T300/Epoxy	0,105	F_2^-	0,089	F_2^-	0,377	1,18
	M60J/Epoxy	0,055	F_2^+	0,167	F_2^-	0,539	0,33
	T300/976	0,117	F_2^+	0,095	F_2^+	0,465	1,23
3	ЛУ-П/ЭНФБ	0,053	F_2^+	0,009	F_2^+	0,007	5,90
	T300/Epoxy	0,086	F_2^-	0,189	F_2^-	0,006	0,45
	M60J/Epoxy	0,051	F_2^+	0,060	F_{12}	0,005	0,85
	T300/976	0,105	F_2^+	0,016	F_{12}	0,007	6,47
4	ЛУ-П/ЭНФБ	0,054	F_2^+	0,034	F_2^+	0,632	1,59
	T300/Epoxy	0,105	F_2^-	0,072	F_2^-	0,445	1,46
	M60J/Epoxy	0,055	F_2^+	0,043	F_2^+	0,250	1,28
	T300/976	0,116	F_2^+	0,065	F_2^+	0,566	1,78

происходит потеря прочности, а также пределы прочности при растяжении и сжатии. Из данных, приведенных в табл. 3, следует, что при исследовании прочности панелей из ортотропных материалов необходимо учитывать геометрическую нелинейность, иначе предельно допустимые нагрузки будут существенно завышены. Для рассмотренных вариантов конструкций различие этих значений может превышать значение нагрузки в шесть раз.

Выводы. Результаты определения напряженно-деформированного состояния цилиндрических панелей с использованием линейной и нелинейной моделей позволяют сделать следующие выводы.

Для рассмотренных вариантов цилиндрических панелей в большинстве случаев сначала достигается предельное значение нормального напряжения (как правило, растягивающего) в направлении окружной координаты.

Для разных конструкций и материалов предельные значения напряжений достигались для разных компонент вектора напряжений.

При использовании линейной модели получаемые значения предельно допустимых нагрузок существенно завышены, поскольку в этом случае не учитывается нелинейный характер зависимости нагрузки от прогиба.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Qatu M. S., Asadi E., Wang W.** Review of recent literature on static analyses of composite shells: 2000–2010 // Open J. Composite Materials. 2012. V. 2. P. 61–86. DOI: 10.4236/ojcm.2012.23009.

2. **Аксельрад Э. Л.** Гибкие оболочки. М.: Наука, 1976.

3. **Maksimyuk V. A.** Study of the nonlinearly elastic state of an orthotropic cylindrical shell with a hole, using mixed functionals // Intern. Appl. Mech. 2001. V. 37, N 12. P. 1602–1606. DOI: 10.1023/a:1014849713889.
4. **Ashok R. B., Srinivasa C. V., Suresh Y. J., Prema Kumar W. P.** Buckling behaviour of cylindrical panels // Nonlinear Engng. 2015. N 4. P. 67–75. DOI: 10.1515/nleng-2014-0019.
5. **Zhou Y., Stanciulescu I., Eason T., Spottswood M.** Nonlinear elastic buckling and postbuckling analysis of cylindrical panels // Finite Elements Anal. Design. 2015. V. 96. P. 41–50. DOI: 10.1016/j.finel.2014.12.001.
6. **Yiotis A. J., Katsikadelis J. T.** Buckling of cylindrical shell panels: a MAEM solution // Arch. Appl. Mech. 2015. V. 85, iss. 9. P. 1545–1557. DOI: 10.1007/s00419-014-0944-9.
7. **Shariati M., Sedighi M., Saemi J., et al.** Experimental study on ultimate strength of CK20 steel cylindrical panels subjected to compressive axial load // Arch. Civil Mech. Engng. 2010. V. 10, N 2. P. 117–130. DOI: 10.1016/s1644-9665(12)60054-5.
8. **Железнов Л. П., Кабанов В. В.** Исследование нелинейного деформирования и устойчивости некруговых цилиндрических оболочек при осевом сжатии и внутреннем давлении // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 4. С. 155–160.
9. **Ganeeva M. S., Sachenkova G. V.** Large deflections and rigidity of a long cylindrical orthotropic glass-plastic panel subjected to intermittent-uniform loads // Polymer Mech. 1972. V. 8, iss. 5. P. 724–730. DOI: 10.1007/BF00856104.
10. **Jianqiao Y., Soldatos K. P.** Three-dimensional stress analysis of orthotropic and cross-ply laminated hollow cylinders and cylindrical panels // Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 1994. V. 117. P. 331–351. DOI: 10.1016/0045-7825(94)90121-X.
11. **Карпов В. В., Семенов А. А.** Безразмерные параметры в теории подкрепленных оболочек // Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика. 2015. № 3. С. 74–94. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.3.07.
12. **Shalashilin V. I.** Parametric continuation and optimal parametrization in applied mathematics and mechanics / V. I. Shalashilin, E. B. Kuznetsov. Dordrecht; Boston; L.: Kluwer Acad. Publ., 2003.
13. **Баранова Д. А., Карпов В. В., Семенов А. А.** Компьютерное моделирование местных и общих форм потери устойчивости тонкостенных оболочек // Вычисл. механика сплош. сред. 2015. Т. 8, № 3. С. 229–244. DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.3.19.
14. **Карпов В. В., Семенов А. А.** Критерии прочности для тонкостенных ортотропных оболочек. Ч. 2. Расчеты и анализ // Вестн. гражд. инженеров. 2015. № 1. С. 60–70.
15. **Wu E. M.** Phenomenological anisotropic failure criterion. N. Y.: Acad. Press, 1974. (Treatise on composite materials; V. 2.)
16. **Смердов А. А., Буянов И. А., Чуднов И. В.** Анализ оптимальных сочетаний требований к разрабатываемым углепластикам для крупногабаритных ракетно-космических конструкций // Изв. вузов. Машиностроение. 2012. № 8. С. 70–77.

Поступила в редакцию 12/II 2016 г.,
в окончательном варианте — 6/VII 2016 г.