УДК 622.235.5+539.3+541.126

О ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ В ДИЛАТИРУЮЩИХ И НЕДИЛАТИРУЮЩИХ СРЕДАХ

С. Г. Артышев, С. З. Дунин, Е. Е. Ловецкий

(*Москва*)

Диссипация энергии взрыва в грунте рассматривалась в работах [1, 2]. В данной работе анализируется распределение различных видов энергии в зависимости от времени и расстояния с учетом возможности разуплотнения среды (явление дилатансии), она опирается на результаты работы [3], в которой решена задача о движении фронта ударной волны и получены зависимости, характеризующие поведение дилатирующих и недилатирующих сред между фронтом ударной волны и расширяющейся полостью.

В случае сферической симметрии и при отсутствии теплопроводности уравнение для внутренней энергии сплошной среды имеет вид

$$\rho(\partial e/\partial t + u\partial e/\partial r) = \sigma_r \partial u/\partial r + 2\sigma_\varphi u/r, \tag{1}$$

где e — количество внутренней энергии на единицу массы; ρ — плотность среды; u — массовая скорость; σ_r — радиальное напряжение, σ_φ — тангенциальное напряжение; t — время; r — радиус, эйлерова координата. Уравнение (1) рассматривается в точках среды, расположенных между полостью $a(t)$ и фронтом ударной волны $R(t)$.

Уравнение дилатансии в предположениях сферической симметрии и $\partial u/\partial r \leqslant 0$ имеет вид

$$\partial u/\partial r + 2u/r = \Lambda(u/r - \partial u/\partial r),$$

где Λ — скорость дилатансии [4]. Условие пластичности среды за фронтом записывается в виде

$$\sigma_r - \sigma_\varphi = k + m(\sigma_r + 2\sigma_\varphi),$$

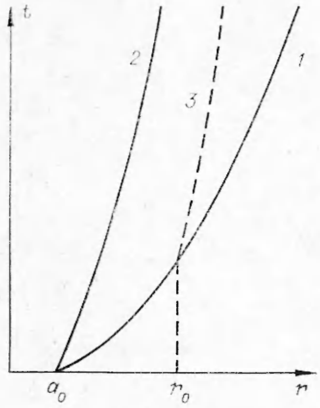
где k и m — известные постоянные. Переходя к лагранжевым координатам (r_0, t) и используя два последних соотношения, уравнение (1) можно записать в виде

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \left[(\alpha + n - 2)\, p - \frac{k\alpha}{3m}\right]\frac{u}{r\rho}, \tag{2}$$

где $n = (2 - \Lambda)/(1 + \Lambda)$; $\alpha = 6m/(2m + 1)$; $p = -\sigma_r$. Связь между лагранжевыми (r_0, t) и эйлеровыми (r, t) координатами показана на фиг. 1, где кривая *1* описывает движение фронта ударной волны $R(t)$, *2* — движение полости $a(t)$, *3* соответствует изменению со временем эйлеровой координаты r точки среды с лагранжевой координатой $r_0 = \text{const}$; a_0 — начальный радиус полости. Интегрирование уравнения (2) вдоль кривой *3* (фиг. 1) дает

$$e_\text{п}(r_0, t) \equiv e(r_0, t) - e_\text{ф}(r_0) = \int\limits_{t_1(r_0)}^{t} \left[(\alpha + n - 2)\, p - \frac{k\alpha}{3m}\right]\frac{u}{r\rho}\, d\tau, \tag{3}$$

где $t_1(r)$ — функция, обратная к функции $R(t)$; $e_\text{п}(r_0, t)$ — энергия пластического деформирования; $e_\text{ф}(r_0) = e_\text{у}(r_0) + e_0$ — энергия на фронте; $e_\text{у}(r_0)$— энергия ударного сжатия; e_0 — внутренняя энергия среды перед фронтом. Таким образом, внутренняя энергия частицы среды с лагранжевой координатой r_0 в момент времени t равна $e_\text{п}(r_0, t) + e_\text{у}(r_0) + e_0$. Все наз-



Фиг. 1

ванные выше энергии относятся к единице массы.

Энергия ударного сжатия $e_у(r_0)$ определяется обычным образом из законов сохранения массы, импульса и энергии на фронте. В наших обозначениях она имеет вид

$$(4) \qquad e_у(r_0) = (\varepsilon_ф/\rho_0)[p_0 + \varepsilon_ф\rho_0\dot{R}^2(t_1(r_0))/2],$$

где ρ_0, p_0 — соответственно плотность и давление в невозмущенной среде; $\varepsilon_ф = 1 - \rho_0/\rho_ф$ — скачок плотности на фронте; $\rho_ф$ — плотность на фронте; $\dot{R}(t)$ — скорость фронта.

Для вычисления (3) надо учесть, что

$$\int\limits_{t_1(r_0)}^{t} \frac{u(r_0, \tau)}{r(r_0, \tau)\,\rho(r_0, \tau)}\,d\tau = \begin{cases} (1/\rho - 1/\rho_ф)/(2-n), & \text{если } n \neq 2, \\ (1/\rho_ф)\ln(r/r_0), & \text{если } n = 2, \end{cases}$$

так как $u(r_0, t) = \partial r(r_0, t)/\partial t$, а $\rho(r_0, t) = \rho_ф(r_0/r)^{2-n}$ [3]. Из работы [3] следует, что в функциях $p(r_0, t)$, $r(r_0, t)$ зависимость от времени осуществляется через радиус фронта $R(t)$: $p(r_0, t) \equiv p_1(r_0, R(t))$,

$$(5) \qquad r(r_0, t) \equiv r_1(r_0, R(t)) = \left[(1-\varepsilon_ф)\,r_0^{n+1} + \varepsilon_ф R^{n+1}(t)\right]^{\frac{1}{n+1}}.$$

После указанной замены переменной в интеграле из формулы (3) для энергии пластического деформирования получается следующее выражение, удобное при численном счете.

$$(6) \qquad e_п(r_0, t) = \frac{(\alpha + n - 2)\,\varepsilon_ф}{\rho_ф r_0^{2-n}} \int\limits_{r_0}^{R(t)} \frac{p_1(r_0, q)}{r_1^{2n-1}(r_0, q)}\,q^n dq - \frac{k\alpha}{3m(2-n)}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_ф}\right),$$

если среда дилатирует ($n \neq 2$), и

$$(7) \qquad e_п(r_0, t) = \frac{\alpha\varepsilon_ф}{\rho_ф} \int\limits_{r_0}^{R(t)} \frac{p_1(r_0, q)}{r_1^3(r_0, q)}\,q^2 dq - \frac{k\alpha}{3m\rho_ф}\ln\frac{r}{r_0},$$

если среда не дилатирует ($n = 2$).

Кинетическая энергия, отнесенная к единице массы, есть $e_к(r_0, t) = u^2(r_0, t)/2$, где, как известно [3],

$$(8) \qquad u(r_0, t) = \varepsilon_ф R^n(t)\dot{R}(t)/r^n(r_0, t).$$

Поэтому вся энергия на единицу массы для частицы с лагранжевой координатой r_0 в момент времени t будет $e_п(r_0, t) + e_у(r_0) + e_к(r_0, t) + e_0$. Сумма первых двух членов есть приращение внутренней энергии, а сумма первых трех — приращение всей энергии относительно начальной энергии e_0 невозмущенного состояния. Полная энергия $E_п(t)$, приходящаяся на пластическое деформирование, полная энергия $E_у(t)$, приходящаяся на ударное сжатие, а также полные кинетическая $E_к(t)$ и начальная $E_0(t)$

энергии к моменту времени t соответственно равны

$$E_{\text{п(у,к,0)}}(t) = 4\pi\rho_0 \int\limits_{a_0}^{R(t)} r_0^2 e_{\text{п(у,к,0)}}(r_0, t)\, dr_0.$$

Окончательные формулы имеют вид

$$(9) \qquad E_{\text{п}}(t) = \frac{4\pi(\alpha + n - 2)\rho_0\varepsilon_{\text{ф}}}{\rho_{\text{ф}}} \int\limits_{a_0}^{R(t)} r_0^n \left\{ \int\limits_{r_0}^{R(t)} \frac{p_1(r_0, q)}{r_1^{2n-1}(r_0, q)} q^n dq \right\} dr_0 - $$
$$- \frac{4\pi k\alpha}{9m(2-n)} \left[(1-\varepsilon_{\text{ф}}) a_0^3 + \varepsilon_{\text{ф}} R^3(t) - r^3(a_0, t) \right],$$

если $n \neq 2$, и

$$(10) \qquad E_{\text{п}}(t) = \frac{4\pi\alpha\rho_0\varepsilon_{\text{ф}}}{\rho_{\text{ф}}} \int\limits_{a_0}^{R(t)} r_0^2 \left\{ \int\limits_{r_0}^{R(t)} \frac{p_1(r_0, q)}{r_1^3(r_0, q)} q^2 dq \right\} dr_0 -$$
$$- \frac{4\pi k\alpha}{9m} \left[\varepsilon_{\text{ф}} R^3(t) \ln \frac{R(t)}{r(a_0, t)} - \frac{\rho_0}{\rho_{\text{ф}}} a_0^3 \ln \frac{r(a_0, t)}{a_0} \right],$$

если $n = 2$;

$$(11) \qquad E_{\text{у}}(t) = (4/3)\pi\varepsilon_{\text{ф}} p_0 \left(R^3(t) - a_0^3 \right) + 2\pi\rho_0\varepsilon_{\text{ф}}^2 \int\limits_0^t R^2(s) \dot{R}^3(s)\, ds;$$

$$(12) \qquad E_{\text{к}}(t) = 2\pi\rho_0\varepsilon_{\text{ф}}^2 R^{2n}(t) \dot{R}^2(t) \int\limits_{a_0}^{R(t)} \frac{r_0^2}{r^{2n}(r_0, t)} dr_0,$$

последний интеграл в случае отсутствия дилатансии берется и при $n = 2$ имеет вид

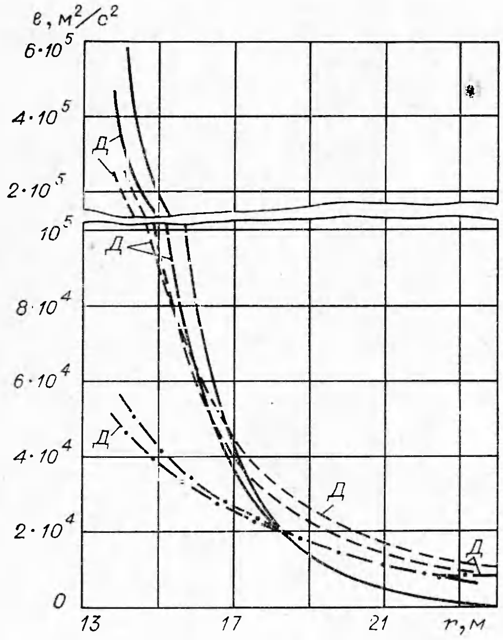
$$(13) \qquad E_{\text{к}}(t) = 2\pi\rho_{\text{ф}}\varepsilon_{\text{ф}}^2 R^4(t) \dot{R}^2(t) \left(1/r(a_0, t) - 1/R(t) \right),$$
$$E_0(t) = (4/3)\pi\rho_0 \left(R^3(t) - a_0^3 \right) e_0.$$

Значения $R(t)$, $p_1(r_0, R(t))$, необходимые при вычислениях по формулам (4), (6), (7), (9) — (13), определяются с помощью уравнения для $R(t)$ из работы [3].

Полное приращение всей внутренней энергии $E_{\text{в}}(t) = E_{\text{п}}(t) + E_{\text{у}}(t)$, а $E(t) = E_{\text{в}}(t) + E_{\text{к}}(t)$ есть полное приращение всей энергии и должно равняться работе $A(t)$ продуктов взрыва, совершаемой над средой. Равенство $A(t) = E_{\text{п}}(t) + E_{\text{у}}(t) + E_{\text{к}}(t)$ может быть использовано как объективная проверка правильности вычислений. Для работы $A(t)$ с учетом формул (5), (8) имеем выражение

$$(14) \qquad A(t) \equiv 4\pi \int\limits_{a_0}^{r(a_0, t)} p(a_0, \tau) r^2(a_0, \tau)\, dr(a_0, \tau) =$$
$$= 4\pi\varepsilon_{\text{ф}} \int\limits_{a_0}^{R(t)} p_1(a_0, q) \left[(1-\varepsilon_{\text{ф}}) a_0^{n+1} + \varepsilon_{\text{ф}} q^{n+1} \right]^{\Lambda} q^n dq.$$

Задача о распространении сферически-симметричной ударной волны в пластической среде делается замкнутой, если, кроме законов сохранения, задано изменение давления в полости $p(a_0, t) \equiv p_1(a_0, R(t))$. Предпола-



Фиг. 2

гается, что взрывная полость расширяется адиабатически с постоянной адиабаты γ [2, 3], т. е.

$$p_1(a_0, R(t)) = p_{\text{к}0}[a_0/r_1(a_0, R(t))]^{3\gamma},$$

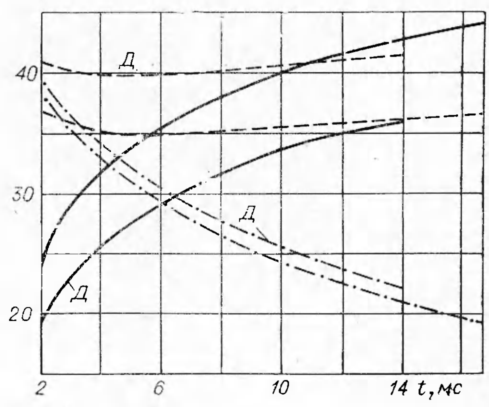
где $p_{\text{к}0}$ — начальное давление в полости. Тогда интеграл в формуле (14) берется и для работы продуктов взрыва $A(t)$ имеем выражение

$$A(t) = \begin{cases} (4/3)\,\pi a_0^3 p_{\text{к}0}\left[1 - \right. \\ \left. - (r(a_0, t)/a_0)^{3-3\gamma}\right], \\ \qquad \text{если } \gamma \neq 1, \\ 4\pi a_0^3 p_{\text{к}0} \ln (r(a_0, t)/a_0), \\ \qquad \text{если } \gamma = 1. \end{cases}$$

На фиг. 2, 3 и в таблице приводятся некоторые результаты вычислений, выполненных при следующих исходных данных: $p_{\text{к}0} = 62$ кбар; $p_0 = 0{,}25$ кбар; $\rho_0 = 2{,}5$ г/см³, $a_0 = 7$ м; $\varepsilon_{\text{ф}} = 0{,}2$; $k = 0{,}35$ кг/см²; $m = 0{,}45$; $\gamma = 1{,}5$; $\Lambda = 0{,}14$ или $\Lambda = 0$. Буквой *Д* на фиг. 2, 3 отмечены кривые, дающие зависимости с учетом дилатансии ($\Lambda = 0{,}14$). Сплошные кривые характеризуют энергию пластического деформирования, штриховые — энергию ударного сжатия, штрихпунктирные — кинетическую энергию. Приводимые на фиг. 2 и в таблице результаты относятся к моменту времени $t = 14$ мс. В этот момент времени при наличии дилатансии ($\Lambda = 0{,}14$) $R = 24$ м, $a = 13{,}8$ м, $\dot{R} = 636$ м/с, ускорение $\ddot{R} = 30{,}8$ км/с²; соответствующие цифры без учета разуплотнения ($\Lambda = 0$) будут: $R = 23{,}4$ м, $a = 14{,}1$ м, $\dot{R} = 605$ м/с, $\ddot{R} = 29{,}5$ км/с².

На фиг. 2 даются зависимости внутренних энергий $e_{\text{п}}$, $e_{\text{у}}$, $e_{\text{к}}$ от эйлерового радиуса r. Как видно, приращение внутренней энергии на единицу массы $e_{\text{п}} + e_{\text{у}}$ особенно велико вблизи взрывной полости. Учет явления дилатансии крутизну этой зависимости несколько сглаживает.

В таблице приведены значения полных энергий, $|A - E|$ есть абсолютная погрешность вычисления, $100\,|A - E|/A$ — относительная погрешность. На фиг. 3 приводится в процентах доля различных видов полной энергии в зависимости от времени, т. е. построены графики функций $100\ E_{\text{п}}(t)/E(t)$, $100\ E_{\text{у}}(t)/E(t)$, $100\ E_{\text{к}}(t)/E(t)$. Расчеты показали, что в указанном промежутке времени доля энергии ударного сжатия примерно постоянна: 40—41% для дилатирующей среды и 35 —



Фиг. 3

Вид полной энергии, Дж	$\Lambda=0,14$	$\Lambda=0$	Вид полной энергии, Дж	$\Lambda=0,14$	$\Lambda=0$
$E_п$	$4,03\cdot10^{12}$	$4,88\cdot10^{12}$	$E=E_в+E_к$	$1,11\cdot10^{13}$	$1,14\cdot10^{13}$
$E_у$	$4,63\cdot10^{12}$	$4,10\cdot10^{12}$	A	$1,11\cdot10^{13}$	$1,14\cdot10^{13}$
$E_к$	$2,46\cdot10^{12}$	$2,40\cdot10^{12}$	$\|A-E\|$	$4,89\cdot10^{9}$	$6,12\cdot10^{9}$
$E_в=E_п+E_у$	$8,66\cdot10^{12}$	$8,98\cdot10^{12}$	$\frac{100\,\|A-E\|}{A}$	0,04%	0,05%

37% — для недилатирующей. С увеличением времени полная доля кинетической энергии падает, а полная доля энергии пластического деформирования растет. Учет дилатансии уменьшает долю энергии пластического деформирования.

Поступила 4 XII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сагомонян А. Я.** Рассеяние энергии взрыва в грунтах.— Вестн. МГУ. Сер. матем. механ., 1966, № 5.
2. **Кошелев Э. А.** О диссипации энергии при подземном взрыве.— ПМТФ, 1972, № 5.
3. **Артышев С. Г., Дунин С. З.** Ударные волны в дилатирующих и недилатирующих средах.— ПМТФ, 1978, № 4.
4. **Николаевский В. П.** О связи объемных и сдвиговых пластических деформаций и ударных волнах в мягких грунтах.— Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 5.

УДК 539.374.1

ПЛАСТИЧНОСТЬ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАГРУЖЕНИЯХ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ *

В. В. Колокольчиков, В. В. Москвитин, Б. Л. Сидоров

(*Куйбышев, Москва*)

В работе [1] предложены основные деформационные уравнения циклических нагружений и доказаны теоремы циклических нагружений изотропных пластических материалов. В изотропной пластичности используются также принцип Мазинга [2] и соотношения Р. М. Шнейдеровича [3]. Феноменологическая модель упругого тела, поляризующегося и намагничивающегося без гистерезиса, с учетом гиромагнитных эффектов и конечности деформаций построена в работе [4]. Модели сплошной среды с электромагнитными моментами и с учетом эффектов магнитного гистерезиса, пластических деформаций в рамках теории относительности сформулированы в [5]. В работе [6] на основе вариационного уравнения механики сплошных сред [7] рассматриваются модели магнитоупругих сред с учетом магнитного гистерезиса и пластических деформаций. Возникает также задача, обсуждаемая ниже, о развитии деформационной теории циклических нагружений для анизотропных ферромагнитных и сегнетоэлектрических материалов.

1. Рассматривается твердое ферромагнитное или сегнетоэлектрическое тело произвольной формы объема V, ограниченное поверхностью S. В недеформирующейся системе координат x_i введем $u_{i(n)}$— компоненты вектора n-го перемещения и $\varepsilon_{ij(n)}$ — компоненты тензора деформаций при n-м нагружении. Все величины при n-м нагружении отмечаются индексом n.

---

* Доложено на IV Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике. Киев, май 1976 г.