

УДК 532.542.4

СЛОЙ СМЕШЕНИЯ В ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

В. Ю. Ляпидевский

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Построена математическая модель эволюции слоя смешения в течениях со сдвигом скорости. Найдено решение задачи о слое смешения с градиентом давления, в частности, получено распределение скорости и основных характеристик турбулентного течения в слое смешения.

1. МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Для расчета сдвиговых течений однородной жидкости широкое применение нашли модели, построенные Прандтлем [1], Тейлором [2] на основе “градиентной гипотезы”, а также их развитие с привлечением уравнений для турбулентной энергии и масштаба турбулентности Роди [3]. Другая гипотеза о пропорциональности напряжений Рейнольдса кинетической энергии турбулентности в развитом турбулентном потоке лежит в основе “гиперболических” моделей Таунсенда [4], Бредшоу [5]. Следует отметить, что течения со свободными границами (внутренними и внешними) даже в случае несжимаемой жидкости обладают рядом свойств, характерных для решений гиперболических систем уравнений. Границы, разделяющие области потенциального и турбулентного течений, выражены весьма резко, и возмущения течения, связанные с деформацией этих границ, носят волновой характер и распространяются с конечной скоростью. Волны на границах являются причиной еще одной важной особенности течений — перемежаемости потока [6]. В полупэмпирических теориях турбулентности этот эффект обычно связывается с турбулентной диффузией и моделируется соответствующими “диффузионными” членами в уравнении энергии. Получающиеся уравнения представляют собой сложную нелинейную систему, для которой построение даже автомодельных решений аналитическими методами затруднено. Для однородной жидкости имеется ограниченное число точных решений, в основном для простейших моделей, использующих гипотезу пути перемешивания. К ним относятся решения Толлмина и Гёртлера для слоев смешения и струй, решения Шлихтинга и Тейлора для следов [7].

Целью данной работы является анализ достаточно простых уравнений, описывающих нестационарное взаимодействие среднего течения и мелкомасштабных движений жидкости. Основная рассматриваемая система получена из известных моделей [4–6, 8] дальнейшим упрощением.

В работе [9] на примере задачи об эволюции тангенциального разрыва в однородной жидкости показано, что построенная нелинейная гиперболическая система отражает процесс поперечного переноса импульса “большими вихрями”, генерируемыми сдвигом скорости. Решение этой системы определяет также закон распространения турбулизованной жидкости в невозмущенном течении. Средние характеристики течения с учетом перемежаемости находятся из решения линейной гиперболической системы после отыскания распределения турбулентных компонент скорости и энергии. Несмотря на увеличение числа

уравнений, структура их достаточно проста, для того чтобы найти автомодельное решение о распаде тангенциального разрыва в однородной жидкости в явном виде. В работе [10] этот анализ переносится на стационарные течения, строится автомодельное решение задачи о слое смешения.

В [11, гл. 4] аналогичный подход использован для стратифицированных течений. Выведенная в [11] модель турбулентного перемешивания описывает взаимодействие крупных вихрей в однородных слоях и прослоечных волн со средним течением. Линейный анализ эволюции возмущений этой системы на стационарном “скользящем” течении показывает, что в произвольном сдвиговом течении амплитуда мелкомасштабных колебаний увеличивается. Это приводит к “проскальзыванию” однородных слоев относительно прослоек и создает условия для возбуждения прослоечных волн. Генерация волн в термоклине также может быть описана в рамках этой модели.

В данной работе строится комбинированная модель турбулентного перемешивания, пригодная для описания эволюции слоя смешения с градиентом давления. Основная особенность этой модели состоит в том, что сначала определяются средние по слою параметры течения путем решения нелинейной системы уравнений, а затем из решения полулинейной системы уравнений восстанавливается распределение средней скорости и турбулентных характеристик течения поперек слоя смешения.

2. СВОБОДНАЯ СДВИГОВАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Приближение пограничного слоя. Рассматриваются плоскопараллельные движения эффективно невязкой однородной несжимаемой жидкости ($\rho \equiv 1$). Пусть вертикальная компонента средней скорости v мала по сравнению с горизонтальной компонентой u . Тогда при наличии вертикального сдвига скорости u в потоке перенос импульса по вертикали осуществляется напряжением Рейнольдса $\tau = -u'v'$. В развитом турбулентном течении экспериментальным данным соответствует зависимость [6]

$$\tau = \sigma q^2, \quad \sigma = \sigma_0 \operatorname{sign} u_y, \quad \sigma_0 = \text{const}, \quad (2.1)$$

где $q^2 = \overline{u'^2 + v'^2 + w'^2}$ — кинетическая энергия пульсационного движения; u' , v' , w' — горизонтальная, вертикальная, поперечная пульсационные составляющие скорости. Так как величина σ_0 мала ($\sigma_0 \approx 0,15$), то скорость переноса в вертикальном направлении также мала по сравнению со скоростью в горизонтальном направлении и можно перейти к приближению пограничного слоя при помощи следующего растяжения переменных:

$$x \rightarrow x, \quad y \rightarrow \sigma_0 y, \quad t \rightarrow \sigma_0^{-1/2} t, \quad u \rightarrow \sigma_0^{1/2} u, \quad v \rightarrow \sigma_0^{3/2} v, \quad p \rightarrow \sigma_0 p, \quad q \rightarrow \sigma_0^{1/2} q$$

(p — давление, t — время, x , y — горизонтальная и вертикальная координаты). “Диффузионные члены” в уравнении энергии считаются величинами более высокого порядка по σ_0 по сравнению с q^3 :

$$\overline{(u'^2 + v'^2 + w'^2)u'} + pu' = o(\sigma_0)q^3, \quad \overline{(u'^2 + v'^2 + w'^2)v'} + pv' = o(\sigma_0)q^3.$$

Кроме того, полагаем $\overline{u'^2} = \overline{v'^2} + O(\sigma_0)q^2$.

Приравнивая члены с одинаковыми степенями σ_0 в уравнениях Рейнольдса, приходим к уравнениям пограничного слоя

$$\begin{aligned} u_x + v_y = 0, \quad P_y = 0, \quad u_t + (u^2 + P)_x + (uv - \sigma q^2)_y = 0, \\ \left(\frac{u^2}{2} + \frac{q^2}{2}\right)_t + \left(\left(\frac{u^2}{2} + \frac{q^2}{2}\right)u + Pu\right)_x + \left(\left(\frac{u^2}{2} + \frac{q^2}{2}\right)v + Pv - \sigma q^2 u\right)_y = -\varepsilon. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $P = \overline{p + u'^2}$, $\sigma = \operatorname{sign} u_y$.

Так как в турбулентном движении участвуют вихри различных масштабов, под величиной q^2 будем понимать энергию ориентированных плоских вихрей. Тогда величина ε в уравнении энергии определяет скорость оттока энергии в движения меньших масштабов и может быть задана в виде $\varepsilon = \omega q^2 = q^3/l$, где ω — характерная частота (ω^{-1} — время релаксации); l — масштаб турбулентности. Для замыкания системы (2.2) необходимо задать распределение ω или l в потоке. В общем случае эти величины описываются уравнениями, аналогичными уравнению энергии в (2.2). Однако для свободной турбулентности, порожденной тангенциальным разрывом в жидкости (в частности, для класса автомодельных решений, рассмотренных ниже), частота ω в частице жидкости убывает как t^{-1} : $\omega = \varkappa t^{-1}$, $\varkappa = \text{const}$, где t — время с момента образования тангенциального разрыва. Таким образом, замыкание системы (2.2) завершается выбором постоянной \varkappa , характеризующей скорость передачи энергии по спектру в зависимости от относительного положения рассматриваемой совокупности вихрей среди всех возбуждаемых вихревых движений.

Перенос “примеси”. Любая скалярная величина φ (температура, концентрация “примеси”, плотность и т. д.), сохраняющаяся при ламинарном течении в частице, в турбулентном потоке переносится вихрями. Уравнения для φ и ψ могут быть получены аналогично системе (2.2) из уравнений сохранения в частице величин φ и φ^2 , если принять следующую гипотезу [4] ($\psi^2 = \overline{\varphi'^2}$):

$$-\overline{\varphi'v'} = \sigma\psi q. \quad (2.3)$$

Малость σ_0 позволяет применить указанное выше растяжение к осредненным уравнениям для $\overline{\varphi}$ и $\overline{\varphi^2}$ и в предположении $\overline{\varphi'^2 u'} = o(\sigma_0)\psi^2 q$, $\overline{\varphi'^2 v'} = o(\sigma_0)\psi^2 q$, $\overline{\varphi' u'} = O(\sigma_0)\psi q$ получить аналогично (2.2) уравнения переноса “примеси” (черта над φ опускается)

$$\begin{aligned} \varphi_t + (\varphi u)_x + (\varphi v - \sigma\psi q)_y &= 0, \\ \left(\frac{\varphi^2}{2} + \frac{\psi^2}{2}\right)_t + \left(\left(\frac{\varphi^2}{2} + \frac{\psi^2}{2}\right)u\right)_x + \left(\left(\frac{\varphi^2}{2} + \frac{\psi^2}{2}\right)v - \sigma\varphi\psi q\right)_y &= -\chi. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Скорость диссипации χ среднеквадратичных флуктуаций поля полагается равной $\chi = \omega_c \varphi^2$, $\omega_c \sim q/l$.

Таким образом, распределение “примеси” в потоке может быть найдено после построения решения (2.2). Значение параметра растяжения в рассматриваемой модели фиксировано и не слишком мало, поэтому отбрасывание этих членов на основании сделанных выше допущений неправомерно.

Однако структура окончательных уравнений такова, что процесс турбулентной диффузии связывается с явлением перемежаемости потока в сдвиговом течении. Другая особенность полученных уравнений состоит в том, что частота ω или ω_c входит только в правую часть уравнений и характеризует состояние турбулентности в выделенном движущемся объеме, что позволяет рассматривать взаимодействие турбулентных потоков с различными свойствами без привлечения дополнительной информации о распределении масштаба турбулентности во всем течении.

Перемежаемость потока. Как правило, свободные турбулентные течения ограничены областью потенциального течения. Под действием больших вихрей резко выраженная граница совершает колебания с амплитудой, сравнимой с поперечным размером турбулентного потока [6]. Это приводит к чередованию в фиксированной точке интенсивного пульсационного движения с потенциальным, т. е. к перемежаемости потока. Коэффициент перемежаемости λ , характеризующий относительное время пребывания в полностью турбулизованной жидкости, может быть использован для нахождения среднего напряжения

$$\tilde{\tau} = \lambda\sigma q^2, \quad (2.5)$$

где q — энергия крупных вихрей, которая может быть найдена условным осреднением по области, занятой этими вихрями, движущимися со средней скоростью u . Из-за перемежаемости потока средние по фиксированному объему скорость \tilde{u} и энергия \tilde{q}^2 отличаются от турбулентных компонент u , q^2 .

Полагая, что размеры энергосодержащих вихрей много меньше размеров вихрей, осуществляющих вертикальный перенос в сдвиговых течениях, т. е. энергосодержащие вихри играют пассивную роль “примеси”, уравнения для \tilde{u} , \tilde{q} , \tilde{v} , \tilde{P} могут быть выведены аналогично уравнениям распространения “примеси” (2.4):

$$\tilde{\tau} = \sigma \tilde{q} q. \quad (2.6)$$

В приближении пограничного слоя уравнения для средних величин принимают вид

$$\begin{aligned} \tilde{u}_x + \tilde{v}_y = 0, \quad \tilde{P}_y = 0, \quad \tilde{u}_t + (\tilde{u}^2 + \tilde{P})_x + (\tilde{u}\tilde{v} - \sigma q \tilde{q})_y = 0, \\ \left(\frac{\tilde{u}^2}{2} + \frac{\tilde{q}^2}{2}\right)_t + \left(\left(\frac{\tilde{u}^2}{2} + \frac{\tilde{q}^2}{2}\right)\tilde{u} + \tilde{P}\tilde{u}\right)_x + \left(\left(\frac{\tilde{u}^2}{2} + \frac{\tilde{q}^2}{2}\right)\tilde{v} + \tilde{P}\tilde{v} - \sigma q \tilde{q}\tilde{u}\right)_y = -\tilde{\omega}\tilde{q}^2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Система (2.7) может быть решена после нахождения q из (2.2). Перемежаемость λ определяется из (2.5), (2.6).

Движения, однородные по горизонтали. Если средние величины в (2.2) и (2.7) не зависят от x , в частности $P \equiv \text{const}$, $v \equiv 0$, приходим к системе, изученной в [9]. В работе [9] показано, что в этом случае уравнения (2.2), (2.7) образуют нелинейную гиперболическую систему. Простейшей задачей для такого класса течений является задача о распаде тангенциального разрыва. Задача формулируется следующим образом. Пусть при $t = 0$ два слоя потенциальной жидкости движутся со скоростями u^\pm , границей между которыми является линия $y = 0$:

$$u(0, y) = \begin{cases} u^+, & y > 0, \\ u^-, & y < 0, \end{cases} \quad q(0, y) = 0. \quad (2.8)$$

Требуется найти решение (2.2), (2.8) при $t > 0$. Следует отметить, что функции u , q , определяемые (2.8), являются стационарным решением (2.2), однако решением неустойчивым. Автомодельное решение ищется в виде $u = u(\xi)$, $q = q(\xi)$, $\omega = \alpha t^{-1}$, $\xi = y/t$. При описании эволюции больших вихрей можно пренебречь их диссипацией, т. е. положить $\alpha = 0$. При этом решение (2.2), (2.8) имеет простой вид

$$u = \frac{u^+ + u^-}{2}, \quad q = \frac{|u^+ - u^-|}{2}, \quad |\xi| < q. \quad (2.9)$$

При $|\xi| > q$ течение невозмущено и $l = 2qt$ ($\sigma_0 = 1$ после растяжения переменных). Автомодельные решения $\tilde{\omega} = 2\beta q/l = \beta/t$, $\tilde{u} = \tilde{u}(\xi)$, $\tilde{q} = \tilde{q}(\xi)$ уравнения (2.7) с начальными условиями (2.8) также задаются явным выражением в области $|\xi| < q$:

$$\tilde{u}(\xi) = u + \beta q_0 \int_0^\zeta (1 - s^2)^{\beta/2-1} ds, \quad \tilde{q} = q_0(1 - \zeta^2)^{\beta/2}, \quad |\zeta| < 1, \quad \zeta = \xi/q. \quad (2.10)$$

Постоянная q_0 находится из условия $\tilde{u}(q) = u^+$, обеспечивающего непрерывность функции \tilde{u} по ξ . Выбор параметра β определяет распределение средней скорости \tilde{u} и напряжения Рейнольдса $\tilde{\tau}$. Ниже устанавливается соответствие между стационарными решениями системы (2.2), (2.7) и нестационарными, однородными по x решениями этой же системы, позволяющее осуществить выбор этого параметра по экспериментальным данным о слоях смешения.

3. СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ БЕЗ ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ

Уравнения движения. Стационарные решения системы (2.2) без градиента давления ($P \equiv \text{const}$) описываются следующей системой уравнений:

$$u_x + v_y = 0, \quad uu_x + vu_y - (\sigma q^2)_y = 0, \quad q(uq_x + vq_y - \sigma qu_y) = -\omega q^2, \quad (3.1)$$

где $\sigma = \text{sign } u_y$. Переходя к переменным x, ψ с функцией тока $\partial\psi/\partial x = -v, \partial\psi/\partial y = u$ в качестве независимой переменной, получаем систему

$$u(u_x - (\sigma q^2)_\psi) = 0, \quad uq(q_x - \sigma qu_\psi) = -\omega q^2, \quad (3.2)$$

в главной части совпадающую с уравнениями нестационарных и однородных по x движений. Система для осредненных величин \tilde{u}, \tilde{q} записывается аналогично в переменных $x, \tilde{\psi}$, где $\partial\tilde{\psi}/\partial x = -\tilde{v}, \partial\tilde{\psi}/\partial y = \tilde{u}$. Однако для построения решения необходимо также, чтобы выполнялись условия склейки с невозмущенным решением на границе потенциального и турбулентного движений, сформулированным в исходных переменных. Зависимость граничных условий от компоненты скорости v , исключенной из (3.2), существенно усложняет структуру стационарного решения. Рассмотрим более подробно задачу о слое смешения.

Слой смешения. Стационарный плоский слой смешения образуется при слиянии в точке $x = 0$ двух однородных горизонтальных потоков со скоростями u^-, u^+ ($u^+ > u^-$) (рис. 1). В отличие от задачи о распаде контактного разрыва внешний поток оказывает существенное влияние на слой смешения. Если слой смешения FOE реализуется в качестве начального участка плоской струи, то на оси симметрии AB и, следовательно, во всей невозмущенной области течения $FOAB$ $v \equiv 0$, что приводит к следующей постановке задачи ($\sigma = 1$): найти автомодельное решение $u = u(\xi), v = v(\xi), q = q(\xi), \tilde{u} = \tilde{u}(\xi), \tilde{q} = \tilde{q}(\xi), \tilde{v} = \tilde{v}(\xi), \xi = y/x, D_0 \leq \xi \leq D_1$ систем (2.2), (2.7), удовлетворяющее на границе $\xi = D, D = D_i$ ($i = 0, 1$) условиям на разрывах

$$\begin{aligned} D[u] &= [v], & D[u^2] &= [uv - q^2], & D\left[\left(\frac{u^2}{2} + \frac{q^2}{2}\right)u\right] &= \left[\left(\frac{u^2}{2} + \frac{q^2}{2}\right)v - q^2u\right], \\ D[\tilde{u}] &= [\tilde{v}], & D[\tilde{u}^2] &= [\tilde{u}\tilde{v} - q\tilde{q}], & D\left[\left(\frac{\tilde{u}^2}{2} + \frac{\tilde{q}^2}{2}\right)\tilde{u}\right] &= \left[\left(\frac{\tilde{u}^2}{2} + \frac{\tilde{q}^2}{2}\right)\tilde{v} - q\tilde{q}\tilde{u}\right]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

При $\xi > D_1$ $u = u^+, q = 0, v = 0, \tilde{u} = u^+, \tilde{q} = 0, \tilde{v} = 0$. При $\xi < D_0$ $u = u^-, q = 0, \tilde{u} = u^-, \tilde{q} = 0$. Здесь $[f] = f(D+0) - f(D-0), D = D_i, i = 0, 1$.

Границы слоя смешения D_i определяются вместе с решением задачи. Для построения решения поставленной задачи необходимо задать распределение частот $\omega, \tilde{\omega}$ в потоке. Как и для задачи о распаде тангенциального разрыва, в качестве системы вихрей, осуществляющей вертикальный перенос, выберем вихри, сравнимые по размеру с толщиной слоя смешения. В этом случае их диссипацией можно пренебречь, т. е. $\omega = 0$. Будем считать, что

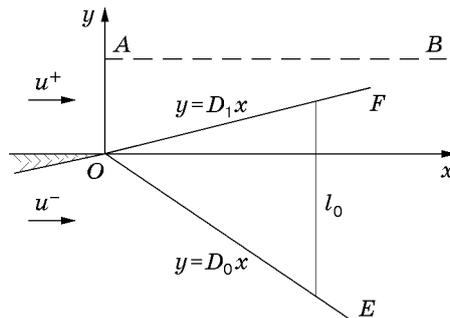


Рис. 1

в свободных турбулентных течениях величина $\tilde{\omega}$ представляется в виде $\tilde{\omega} = 2\beta q/l$. При $\omega = 0$ система (3.2) формально совпадает с уравнениями нестационарного, однородного по x перемешивания, поэтому можно использовать решение (2.9) задачи о распаде тангенциального разрыва, т. е. положить $u = (u^- + u^+)/2$, $q = (u^+ - u^-)/2$ при $D_0 \leq \xi \leq D_1$. Между граничными условиями для этих систем также имеется соответствие. Так как величина $D^\pm = \pm q$ является скоростью распространения разрывов нестационарной системы, то, переходя к стационарному случаю, имеем

$$D^+ = D_1 u - v = D_1 u^+ - v_1 = D_1 u^+ = (u^+ - u^-)/2, \quad D^- = D_0 u^- - v_0 = D_0 u - v = -(u^+ - u^-)/2$$

или

$$D_1 = \frac{u^+ - u^-}{2u^+}, \quad D_0 = -\frac{u^+ - u^-}{u^+ + u^-} \left(\frac{u^+ - u^-}{2u^+} + 1 \right), \quad v = -\frac{(u^+ - u^-)^2}{4u^+}.$$

Найденное решение показывает, что границы течения расположены несимметрично относительно оси x . Слой смешения отклоняется в сторону более медленного потока. Максимальное отклонение наблюдается при истечении однородного потока со скоростью u^+ в покоящуюся жидкость. При этом $D_1 = 1/2$, $D_0 = -3/2$, или, возвращаясь к исходным переменным, $D_1 = (1/2)\sigma_0$, $D_0 = -(3/2)\sigma_0$, $\sigma_0 = 0,15$.

Из-за неоднородности уравнений для величин \tilde{u} , \tilde{v} , \tilde{q} решение (2.7), удовлетворяющее условиям (3.3), зависит от параметра $r = u^-/u^+$, $0 \leq r \leq 1$. На интервале $D_0 < \xi < D_1$ это решение определяется системой уравнений

$$\frac{dz}{d\xi} = \tilde{u}, \quad \frac{d\tilde{u}}{d\xi} = \frac{\beta u q \tilde{q}}{q^2 - z^2}, \quad \frac{d\tilde{q}}{d\xi} = -\frac{\beta u z \tilde{q}}{q^2 - z^2}, \quad (3.4)$$

где $z = \xi \tilde{u} - \tilde{v}$; $q = (u^+ - u^-)/2$; $u = (u^+ + u^-)/2$. Граничными условиями для системы (3.4) являются соотношения (3.3):

$$[z] = 0, \quad [\tilde{u}] = (-1)^i [\tilde{q}] \quad \text{при} \quad \xi = D_i, \quad i = 0, 1. \quad (3.5)$$

Так как в силу постановки задачи значение v , а следовательно, и z должно быть задано только с одной стороны слоя смешения, например при $\xi > D_1$, то для системы (3.4) имеем три граничных условия. Случай $v = 0$ при $\xi > D_1$ является особым, так как при этом $z(D_1 + 0) = D_1 u^+ = q$, и решение (3.4) при $\xi \rightarrow D_1 - 0$ в силу (3.5) попадает в особую точку. В особой точке $\tilde{q} = 0$, а следовательно, и $[\tilde{u}] = 0$, т. е. решение на правом конце непрерывно. Необходимый произвол в одну постоянную обеспечивается тем, что в особую точку входит однопараметрическое семейство решений.

Параметр β определяется на основе экспериментальных данных. Значение $\beta = 6$ достаточно точно описывает распределение скорости и напряжений Рейнольдса в слое смешения, как показано в [10]. В то же время решение слабо зависит от β , и при $\beta = 4$ автомодельное решение (2.10) также удовлетворительно передает распределение искомых величин в слое смешения. Так, при $\beta = 6$ имеем $\tilde{\tau}_{\max} = 1,18 \cdot 10^{-2} (u^+ - u^-)^2$, а при $\beta = 4$ — $\tilde{\tau}_{\max} = 1,41 \cdot 10^{-2} (u^+ - u^-)^2$. Заметим, что для четных натуральных значений параметра β выражения (2.10) дают явное представление решения в виде полиномов от автомодельной переменной [10].

Из решений (3.3), (3.4) для различных значений параметра r также может быть определен закон расширения слоя смешения. В рассматриваемой модели за толщину слоя естественно принять величину $l_0 = (D_1 - D_0)x$, т. е. в исходных переменных $dl_0/dx = 2\sigma_0 R = 0,3R$, где $R = (u^+ - u^-)/(u^+ + u^-)$. Однако для сравнения с экспериментальными данными обычно выбирается величина $l_1 = y_{0,95} - y_{0,1}$, где $y_{0,95}$, $y_{0,1}$ — значения y , при которых $\tilde{u} - u^- = 0,95(u^+ - u^-)$ и $\tilde{u} - u^- = 0,1(u^+ - u^-)$ соответственно.

Заметим, что эффективная ширина слоя смешения l_1 вдвое меньше максимальной толщины l_0 [10].

Граничные условия для системы (2.2). В силу нелинейности уравнений движения непрерывное примыкание турбулентного ($q \neq 0$) и потенциального ($q = 0$) решений системы (2.2) невозможно [11]. Поэтому необходимо рассмотреть разрывные решения. Несложно получить условия на разрывах для общего случая. Для целей данной статьи достаточно получить их для горизонтально-однородного и стационарного течений.

В случае горизонтально-однородных течений система (2.2) для $u = u(t, y)$, $q = q(t, y)$, $v \equiv 0$, $P \equiv \text{const}$ имеет вид ($\omega \equiv 0$)

$$u_t - (\sigma q^2)_y = 0, \quad \left(\frac{u^2}{2} + \frac{q^2}{2}\right)_t - (\sigma u q^2)_y = 0, \quad \sigma = \text{sign } u_y. \quad (3.6)$$

Уравнения (3.6) представляют собой нелинейную гиперболическую систему. Ее характеристики задаются уравнениями $dy/dt = \pm\sqrt{2}q$. Нелинейность и гиперболичность уравнений (3.6) приводит к возникновению в решениях разрывов, т. е. резких фронтов, разделяющих области турбулентного и потенциального течений. На линиях разрывов, распространяющихся со скоростью $D = dy/dt$, выполнены условия Гюгонио

$$D[u] = -[\sigma q^2], \quad D[u^2/2 + q^2/2] = -[\sigma u q^2]. \quad (3.7)$$

Здесь $\sigma = \text{sign } [u]$; $[f] = f(t, y + 0) - f(t, y - 0)$.

Функции (2.9) удовлетворяют как системе (3.6), так и условиям на разрывах (3.7). Таким образом, (2.9) является обобщенным решением задачи (2.8). Следует также отметить, что условие устойчивости разрывов Лакса также выполнено [12]. Таким образом, (2.9) является устойчивым обобщенным решением задачи (2.8), (3.7) и описывает распространение поперек потока “больших вихрей”, порожденных неустойчивостью Кельвина — Гельмгольца.

Для стационарных течений система (3.1) уже не является гиперболической относительно переменной x . Однако после исключения функции v переходом к переменным x , ψ она становится гиперболической относительно этой переменной. Более того, при $\omega = 0$ система (3.2) совпадает с (3.6). Условия на разрывах для системы (3.1) также могут быть сведены к нестационарному случаю. Замена переменной $z = Du - v$ приводит систему (3.3) к виду

$$z = Du(x, y - 0) - v(x, y - 0) = Du(x, y + 0) - v(x, y + 0), \quad (3.8)$$

$$z[u] = -[\sigma q^2], \quad z[u^2/2 + q^2/2] = -[\sigma u q^2].$$

Условия (3.8) совпадают с (3.7), и решение задачи о слое смешения находится из решения (2.9).

4. СЛОЙ СМЕШЕНИЯ С ГРАДИЕНТОМ ДАВЛЕНИЯ

В пп. 2, 3 построено автомодельное решение задач о распаде контактного разрыва и слое смешения без градиента давления. При этом генерация “больших вихрей” определялась решением (2.9). Заметим, что средние значения скорости и уровня турбулентности при распаде контактного разрыва в слое смешения без градиента давления совпадают с точным решением (2.9). Кроме того, из (2.9) следует, что скорость вовлечения в турбулентную прослойку пропорциональна скорости “больших вихрей”:

$$\eta_t + (\eta \bar{u})_x = 2\sigma \bar{q}, \quad (4.1)$$

где η — толщина прослойки; \bar{u} , \bar{q} — средние значения скорости течения и скорости “больших вихрей”. Таким образом, для слоев смешения закон вовлечения (4.1) позволяет описать свойства решений более полной модели (2.2). Для течений однородной и стратифицированной жидкости с градиентом давления в рамках модели (2.2) вертикальное распределение скорости и энергии “больших вихрей” уже становится неоднородным. Тем не менее применение закона вовлечения жидкости из однородных слоев в турбулентную прослойку, задаваемого уравнением (4.1) для различных типов течений, показало эффективность такого подхода при определении средних характеристик течения. На основе (4.1) в работах [13, 14] построена модель трехслойной мелкой воды, описывающая эволюцию турбулентного слоя в течениях однородной и стратифицированной жидкостей со сдвигом скорости.

Следует отметить, что роль уравнений многослойной мелкой воды не исчерпывается возможностью нахождения средних величин в потоке. Как и в случае слоя смешения без градиента давления, средняя скорость “больших вихрей” \bar{q} определяет вертикальное распределение напряжений Рейнольдса $\tilde{\tau}$ в потоке по формуле (2.6), а в качестве масштаба турбулентности l может быть выбрана толщина турбулентного слоя η . При этом вертикальное распределение скорости и турбулентной энергии в приближении пограничного слоя описывается системой (2.7).

Трехслойная модель. Рассмотрим задачу о формировании слоя смешения в однородной жидкости в канале конечной глубины. Пусть течение ограничено двумя горизонтальными плоскостями, расстояние между которыми равно H , и канал заполнен жидкостью. Действие силы тяжести можно исключить введением модифицированного давления $p^* = p + \rho g(H - y) = p^*(t, x)$. Для описания эволюции средних величин в слое смешения применимы уравнения трехслойной мелкой воды, в которых наряду с обычными уравнениями мелкой воды для однородных слоев используются полные законы сохранения импульса и энергии, необходимые для определения параметров течения в турбулентной прослойке [13, 14].

Уравнения стационарного течения для средних значений по слоям имеют вид ($\rho \equiv 1$)

$$\begin{aligned} (h^+ + \eta + h^-)_x &= 0, & (h^\pm u^\pm)_x &= -\sigma \bar{q}, & (\eta \bar{u})_x &= 2\sigma \bar{q}, \\ ((u^\pm)^2/2 + p^*)_x &= 0, & (h^+(u^+)^2 + \eta \bar{u}^2 + h^-(u^-)^2 + p^*H)_x &= 0, \\ (h^+(u^+)^3 + \eta \bar{u}(\bar{u}^2 + \bar{q}^2) + h^-(u^-)^3 + 2\bar{Q}p^*)_x &= 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где h^+ , h^- , η — глубины, u^+ , u^- , \bar{u} — скорости в верхнем, нижнем слоях и прослойке соответственно; $\bar{Q} = h^+u^+ + \eta \bar{u} + h^-u^- \equiv \text{const}$.

Пусть при $x = 0$ стационарный слой смешения образуется из двух равномерных потоков глубиной h_0^\pm , движущихся со скоростью u_0^\pm (рис. 2). Следствием (4.2) являются

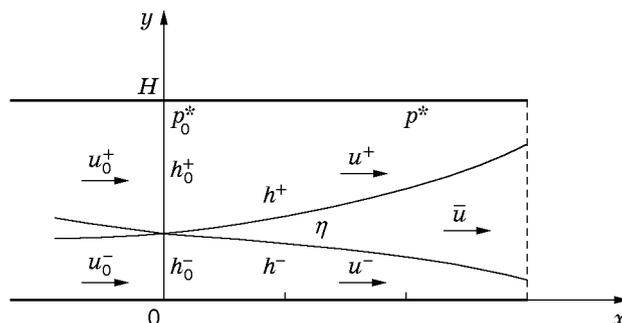


Рис. 2

следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
h^+ + \eta + h^- &= H, & h^+ u^+ + \eta \bar{u}/2 &= h_0^+ u_0^+, & h^- u^- + \eta \bar{u}/2 &= h_0^- u_0^-, \\
(u^+)^2/2 + p^* &= (u_0^+)^2/2 + p_0^*, & (u^-)^2/2 + p^* &= (u_0^-)^2/2 + p_0^*, \\
h^+(u^+)^2 + \eta \bar{u}^2 + h^-(u^-)^2 + p^* H &= h_0^+(u_0^+)^2 + h_0^-(u_0^-)^2 + p_0^* H, \\
h^+(u^+)^3 + \eta \bar{u}(\bar{u}^2 + \bar{q}^2) + h^-(u^-)^3 + 2\bar{Q}p^* &= h_0^+(u_0^+)^3 + h_0^-(u_0^-)^3 + 2\bar{Q}p_0^*,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

где $\bar{Q} = h_0^+ u_0^+ + h_0^- u_0^-$.

Из (4.3) неизвестные η , h^\pm , u^\pm , \bar{u} , $p^* - p_0^* = \Delta p$, \bar{q} могут быть выражены как функции одной переменной, например $Q = \eta \bar{u}$. В силу нелинейности системы эти зависимости могут быть неоднозначными. Систему (4.3) для заданного значения $Q \geq 0$ можно свести к одному уравнению относительно величины $a = (u^+ + u^-)/2$ следующим образом.

Пусть $a \geq 0$ задано. Тогда $(u^+)^2 - (u^-)^2 = (u_0^+)^2 - (u_0^-)^2$ или $\gamma = \gamma_0 a_0/a$, где $\gamma = (u^+ - u^-)/2$; $\gamma_0 = (u_0^+ - u_0^-)/2$; $a_0 = (u_0^+ + u_0^-)/2$. Далее,

$$\begin{aligned}
u^+ &= a + \gamma, & u^- &= a - \gamma, & h^+ &= (h_0^+ u_0^+ - Q/2)/u^+, & h^- &= (h_0^- u_0^- - Q/2)/u^-, \\
\eta &= H - h^+ - h^-, & \bar{u} &= Q/\eta, & \Delta p &= p^* - p_0^* = ((u_0^+)^2 - (u_0^-)^2)/2.
\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в закон сохранения полного импульса, приходим к уравнению $P(a, Q) = h^+(u^+)^2 + \eta \bar{u}^2 + h^-(u^-)^2 - h_0^+(u_0^+)^2 - h_0^-(u_0^-)^2 + \Delta p H = 0$, из которого может быть найдена зависимость $a = a(Q)$ и восстановлены значения допустимых параметров течения ($h^\pm > 0$, $\eta > 0$, $u^\pm > 0$). Зависимость $q^2 = q^2(Q)$ определяется из уравнения энергии, и, наконец, распределение параметров течения по оси x может быть найдено из уравнения $dQ/dx = 2\sigma q(Q)$.

Распределение скорости в слое смешения. Выше найдено распределение осредненных величин в слое смешения. В частности, из уравнений (4.3) находятся границы $y = h^-(x)$ и $y = h^-(x) + \eta(x)$ слоя смешения, скорость “больших вихрей” $\bar{q} = \bar{q}(x)$ и давление на верхней крышке канала $p^* = p^*(x)$. Поэтому для горизонтальной и вертикальной компонент вектора скорости $u = \tilde{u}(x, y)$ и $v = \tilde{v}(x, y)$, а также для среднеквадратичной скорости $q = \tilde{q}(x, y)$ уравнения (2.7) стационарного течения в приближении пограничного слоя принимают вид ($\rho \equiv 1$)

$$\tilde{u}_x + \tilde{v}_y = 0, \quad \tilde{u}\tilde{u}_x + \tilde{v}\tilde{u}_y - \sigma \bar{q}\tilde{q}_x + p_x^* = 0, \quad \tilde{u}\tilde{q}_x + \tilde{v}\tilde{q}_y - \sigma \bar{q}\tilde{u}_y = -\beta \bar{q}\tilde{q}/\eta, \tag{4.4}$$

где $\sigma = \sigma_0 \text{sign } \tilde{u}_y$.

Требуется найти решение (4.4) в слое смешения $h^-(x) < y < h^-(x) + \eta(x)$, так как в областях потенциального течения $0 < y < h^-(x)$ и $H - h^+(x) < y < H$ вертикальный перенос “большими вихрями” отсутствует ($\bar{q} = 0$) и скорость $u = u^\pm(x)$ не зависит от y . Вертикальная компонента v в этих областях однозначно восстанавливается из уравнения неразрывности и условия непротекания на границах

$$\begin{aligned}
\tilde{v}(x, y) &= -yu_x^- & \text{при } 0 \leq y < h^-(x), \\
\tilde{v}(x, y) &= (H - y)u_x^+ & \text{при } H - h^+(x) < y \leq H,
\end{aligned}$$

а турбулентность отсутствует ($\tilde{q} \equiv 0$). Поскольку строится непрерывное решение в полосе $0 < y < H$, на границе области смешения решение (4.4) известно. Пусть $u_0^+ > u_0^-$ и профиль скорости монотонный ($\tilde{u}_y \geq 0$). Тогда $\sigma \equiv \sigma_0$. Для построения решения внутри слоя смешения удобно перейти к переменным x, ψ (ψ — функция тока). Как и в рассмотренном выше случае слоя смешения без градиента давления, уравнения (4.4) трансформируются в полулинейную систему

$$\tilde{u}_x - \sigma \bar{q}\tilde{q}_\psi = -p_x^*/\tilde{u}, \quad \tilde{q}_x - \sigma \bar{q}\tilde{u}_\psi = -\beta \bar{q}\tilde{q}/(\eta \tilde{u}). \tag{4.5}$$

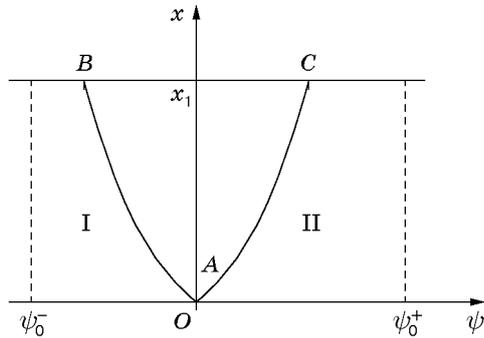


Рис. 3

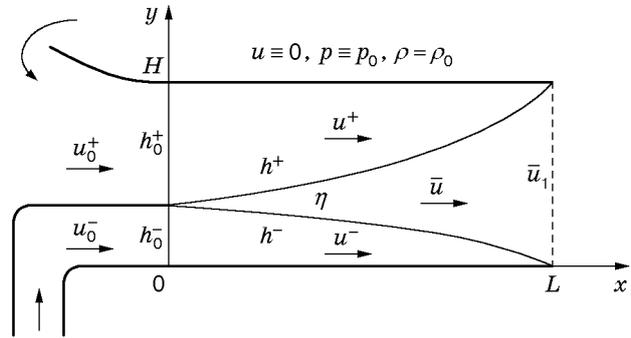


Рис. 4

Решение (4.5) ищется в полуплоскости $x \geq 0, \psi_0^- \leq \psi \leq \psi_0^+$, где

$$\psi_0^- = - \int_0^{h_0^-} \tilde{u}(0, y) dy = -h_0^- u_0^-; \quad \psi_0^+ = \int_{h_0^-}^H \tilde{u}(0, y) dy = h_0^+ u_0^+.$$

Значению $\psi = 0$ соответствует линия тока, проходящая через точку A слияния однородных потоков (рис. 3). Граница слоя смешения задается линиями AB и AC. Левее линии AB (область I) решение $\tilde{u} = u^-(x), \tilde{q} = \bar{q} = 0$ известно. Аналогично правее линии AC (в области II) решение имеет вид $\tilde{u} = u^+(x), \tilde{q} = \bar{q} = 0$. Требуется определить непрерывное вплоть до границы решение (4.5) в области BAC. Линии AB и AC, задаваемые уравнениями $\psi = \psi^-(x)$ и $\psi = \psi^+(x)$, являются характеристиками системы (4.5):

$$\frac{d\psi^-(x)}{dx} = -\sigma \bar{q}(x), \quad \frac{d\psi^+(x)}{dx} = \sigma \bar{q}(x).$$

Таким образом, требуется найти решение задачи Гурса с данными на характеристиках для полулинейной гиперболической системы (4.5) ($\bar{q}(x) > 0$). Если в области I ($0 < x < x_1$) функция $u^-(x) \geq u_{\min} > 0$, то для монотонного профиля скорости в слое смешения ($\tilde{u}_\psi \geq 0$) в области BAC справедлива априорная оценка $\tilde{u}(x, \psi) \geq u_{\min} > 0$ и единственную трудность при решении (4.4) представляет особенность в правой части уравнений, так как $\eta(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$. Заметим, что решение системы (4.2), построенное выше, имеет ограниченные производные, т. е. при $x \rightarrow 0$ функция p_x^* ограничена. Поэтому в окрестности точки A слияния потоков асимптотическое представление решения дает автомодельное решение без градиента давления, рассмотренное в п. 3.

Если же в результате нарастания давления p^* в процессе развития слоя смешения в канале конечной глубины возникает возвратное течение ($u^-(x) < 0$), постановка задачи меняется. В данной работе она не рассматривается.

Задача о форсунке. В качестве примера применения модели формирования слоя смешения с градиентом давления рассмотрим задачу о плоской форсунке.

Пусть в плоский канал глубиной H и длиной L помещена форсунка (рис. 4). Канал погружен в покоящуюся несжимаемую жидкость плотностью $\rho_0 = 1$ и свободно соединяется с ней. Из форсунки параллельно дну канала (которое может рассматриваться как плоскость симметрии течения) вытекает равномерная струя идеальной несжимаемой жидкости толщиной h_0^- , имеющей плотность ρ_0 и скорость u_0^- . В результате развития слоя смешения жидкость в верхнем слое разгоняется и реализуется стационарное течение. Требуется определить параметры течения, распределение скорости на выходе из канала, а также “оптимальное” расположение форсунки, т. е. значения h_0^-/H и L/H , при которых слой

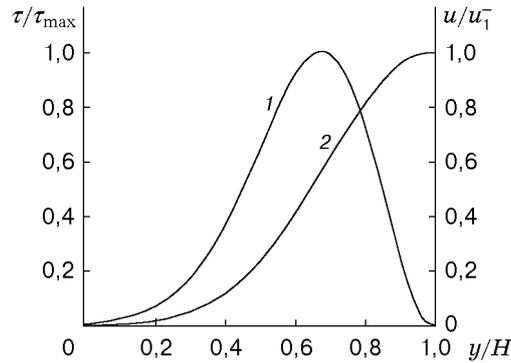


Рис. 5

смешения полностью перекрывает сечение на выходе из канала. Для того чтобы свести задачу к рассмотренной выше, достаточно к уравнениям (4.3) добавить соотношение

$$(u_0^+)^2/2 + p_0^* = p_0, \quad (4.6)$$

следующее из условия потенциальности течения в верхнем слое. Здесь p_0 — давление в покоящейся жидкости. Неизвестными являются величины u^\pm , \bar{u} , h^\pm , η , $\Delta p = p^* - p_0^*$, u_0^+ . На выходе из канала выполнены условия $p_1^* = p_0$ и $u^+ = 0$. Здесь не рассматривается случай, когда слой смешения выходит на крышку канала ($h_1^+ = 0$), так как при этом он переходит в затопленную струю. Если длина L канала известна, то дополнительное соотношение

$$L = \int_0^{Q_1} \frac{1}{2\sigma\bar{q}(Q)} dQ \quad (4.7)$$

следует из закона вовлечения жидкости в слой смешения. Из (4.3), (4.6) может быть найдена зависимость искомых величин $Q_1 = \eta_1\bar{u}_1$ и $\bar{q} = \bar{q}(Q)$ ($0 < Q < Q_1$) от параметра u_0^+ , из (4.7) — зависимость $L = L(u_0^+)$, из которой и находится значение u_0^+ . Действительно, при $u_1^+ = 0$ имеем ($0 < u_0^+ < u_0^-$)

$$\begin{aligned} Q_1 &= \eta_1\bar{u}_1 = 2h_0^+u_0^+, & (u_1^-)^2 &= (u_0^-)^2 - (u_0^+)^2, \\ h_1^- &= \frac{h_0^-u_0^- - Q_1/2}{u_1^-} = \frac{h_0^-u_0^- - h_0^+u_0^+}{u_1^-}, & \Delta p &= p_0 - p_0^* = u_0^+/2, \\ \eta_1 &= Q_1/\bar{u}_1, & \bar{u}_1 &= \frac{h_0^+(u_0^+)^2 + h_0^-(u_0^-)^2 - h_1^-(u_1^-)^2 - H(u_0^+)^2/2}{2h_0^+u_0^+}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Зависимость $q^2 = q^2(Q, u_0^+)$ при $0 < Q < Q_1$ находится из (4.3) аналогично рассмотренному выше слою смешения, а из (4.7) для заданного значения u_0^+ может быть определена длина канала $L = L(u_0^+)$.

Для “оптимальной” форсунки ($h_1^+ = 0$, $h_1^- = 0$) из (4.8) получаем следующее уравнение для искомой величины $z = h_0^-/H$:

$$4z - 1 + z(z - 1/2)/(1 - z)^2 = 0,$$

из которого может быть вычислен единственный корень $z_* \approx 0,267$. Далее, из (4.7), (4.8) определяются безразмерные параметры течения и “оптимальная” длина канала. В частности, $L/H \simeq 5,38$. На рис. 5 изображено распределение средней скорости (кривая 1) и напряжений Рейнольдса (кривая 2) на выходном сечении “оптимального” канала для $\beta/(2\sigma) = 6$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Абрамович Г. Н., Гиршович Т. А., Крашенинников С. Ю. и др.** Теория турбулентных струй. М.: Наука, 1984.
2. **Taylor G. I.** The transport of vorticity and heat through fluids in turbulent motion // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1932. V. 135. P. 685–705.
3. **Rodi W.** Turbulence models and their application in hydraulics: IAHN state of the art paper. 1980.
4. **Townsend A. A.** The effects of the radiative transfer on turbulent flow of a stratified fluid // J. Fluid Mech. 1958. V. 4, N 4. P. 361–375.
5. **Bradshaw P., Ferris D. H., Atwell N. P.** Calculation of boundary-layer development using the turbulent energy equation // J. Fluid Mech. 1967. V. 28, N 3. P. 593–616.
6. **Таунсенд А. А.** Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
7. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
8. **Тернер Дж.** Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977.
9. **Ляпидевский В. Ю.** Модель турбулентного перемешивания в течениях однородной жидкости со сдвигом скорости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1985. Вып. 72. С. 50–59.
10. **Ляпидевский В. Ю.** Задача о слое смешения в однородной жидкости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1986. Вып. 74. С. 38–54.
11. **Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.
12. **Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.** Системы квазилинейных уравнений и их приложение к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
13. **Ляпидевский В. Ю.** Влияние эффектов перемешивания и дисперсии на структуру нелинейных волн в двухслойной жидкости. Новосибирск, 1998. (Препр. / СО РАН. Ин-т гидродинамики; № 1-98).
14. **Ляпидевский В. Ю.** Структура турбулентного бора в однородной жидкости // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 56–68.

Поступила в редакцию 27/X 1999 г.
