УДК 536.3

ВЛИЯНИЕ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ СМЕШАННО-КОНВЕКЦИОННОГО ПОТОКА ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ ВЕРТИКАЛЬНО РАСТЯГИВАЕМОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ НАЛИЧИИ НЕОДНОРОДНОГО МАССООБМЕНА

Н. Самукта, Р. Равиндран, М. Ганапатирао*

Национальный технологический институт, 620015 Тируччираппалли, Индия
* Национальный институт информационных технологий, 301705 Нимрана, Индия
E-mails: samyupsgk@gmail.com, G.Maradana@niituniversity.in

Проведено исследование влияния химической реакции, выделения и поглощения тепла на характеристики стационарного смешанно-конвекционного потока в пограничном слое на вертикально растягиваемой пластине при наличии неравномерного вдува (отсоса) через щелевое отверстие. С помощью группы неавтомодельных преобразований исходные уравнения для пограничного слоя с граничными условиями преобразованы к безразмерному виду. В результате численного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными получены неавтомодельные решения. Проведены расчеты скорости, температуры и концентрации, локального коэффициента трения поверхности, локального числа Нуссельта и числа Шервуда при различных значениях безразмерных параметров. Показано, что при неравномерном отсосе через щелевое отверстие локальные числа Нуссельта и Шервуда увеличиваются, а при неравномерном вдуве через щелевое отверстие — уменьшаются. Установлено, что при выделении тепла локальное число Нуссельта уменьшается, в то время как при его поглощении — увеличивается.

Ключевые слова: неравномерный массообмен через щелевое отверстие, смешанно-конвекционный поток, растягиваемая пластина, химическая реакция, выделение тепла.

DOI: 10.15372/PMTF20170113

Введение. Процессы, происходящие в пограничном слое на непрерывно движущихся поверхностях, применяются в обрабатывающей промышленности и различных технологических процессах (производство стекловолокна, волочение проволоки, производство бумаги, лужение медных проводов, производство коаксиальных кабелей телевидения, металло- и полимерообрабатывающее производство и т. д.).

Впервые течение в пограничном слое на непрерывно движущейся поверхности исследовано в работе [1]. В [2] экспериментально показано, что такой поток существует, и изучены его основные характеристики. В работе [3], являющейся продолжением [1], учитывались вдув или отсос на поверхности пластины. В [4] исследовалось обтекание растягивающейся пластины при постоянной температуре. В [5] проведен анализ задачи о течении на растягиваемой пластине при постоянной температуре на поверхности при наличии вдува (отсоса), а в [6] изучено течение при постоянной скорости растяжения поверхности и температуре, меняющейся по степенному закону. В [7] рассмотрен случай течения на неизометрично растягиваемой пластине. Характеристики теплопереноса на пластине, растягиваемой по линейному закону, при температуре, меняющейся по степенному закону, исследованы в [8]. В [9] получено автомодельное решение для растягиваемой пластины в случае, когда скорость и температура поверхности изменяются по степенному закону. В [10] исследовано влияние сил плавучести на характеристики потока и перенос тепла от наклонной пластины с равномерно распределенной на стенке температурой либо при наличии равномерного потока тепла вдоль поверхности. В работах [11, 12] изучен ламинарный пограничный слой на движущейся параллельно потоку поверхности при $U_w > U_\infty$ или $U_w < U_\infty$ и сформулированы две краевые задачи, в [13] сформулирована краевая задача, описывающая оба случая. Поток на растягиваемой пластине изучен в работе [14] с использованием компоненты скорости $U(x) = U_w(x)$. Автомодельное решение задачи для скорости в ламинарном пограничном слое, образующемся при растяжении поверхности, получено в [15] с использованием представления для скорости в виде $U = U_w + U_\infty$. Во всех указанных выше работах найдены автомодельные решения. В работе [16] получено неавтомодельное решение для смешанно-конвекционного течения на движущейся вертикально растягиваемой пластине при наличии паралелльно набегающего потока. В [17] с учетом неравномерного распределения температуры на стенке и концентрации исследовано течение при наличии равномерного вдува (отсоса).

Вдув (отсос) (через щелевое отверстие в стенке) в пограничном слое используется для тепловой защиты, стабилизации пограничных слоев при неблагоприятных градиентах давления, уменьшения поверхностного трения высокоскоростных летательных аппаратов и т. д. Конечные разрывы в течении возникают на передней и задней кромках при равномерном вдуве (отсосе) через щелевое отверстие, и их появления можно избежать, выбрав соответствующий режим неравномерного вдува (отсоса) через щелевое отверстие. Неравномерный вдув (отсос) через щелевое отверстие в смешанно-конвекционный поток в пограничном слое, обтекающий вертикальный конус, изучался в работе [18]. Существуют процессы переноса, зависящие от тепловой и массовой диффузии, возникающей при наличии химической реакции (сушка в химической и пищевой промышленности, испарение на поверхности водоема, замерзание сельскохозяйственных культур, перенос энергии в градирне, течения в кондиционерах испарительного типа и др.) Влияние химических реакций и выделения (поглощения) тепла на смешанно-конвекционный поток, обтекающий вертикальный клин или конус, при наличии неравномерного вдува (отсоса) через щелевое отверстие изучалось соответственно в работах [19, 20].

В данной работе исследуется влияние химической реакции, выделения или поглощения тепла в смешанно-конвекционном потоке в пограничном слое на вертикально растягиваемой пластине при наличии неоднородного вдува (отсоса) через щелевое отверстие.

1. Математическая постановка задачи. Рассмотрим стационарный смешанно-конвекционный двумерный ламинарный поток жидкости в пограничном слое, направленный вдоль вертикально растягиваемой пластины, которая движется вверх. Ось x направлена вдоль пластины, ось y — перпендикулярно ей [17]. Предполагается, что скорость свободного потока U_∞ и скорость пластины U_w одинаково направлены, растягиваемая поверхность движется со скоростью, подчиняющейся степенному закону $U_w(x) = U_{w0}x^m$ (m — степенной параметр скорости), и имеет температуру, удовлетворяющую степенному закону $T_w(x) = T_\infty + Bx^n$ (T_∞ — равномерно распределенная температура окружающей среды; B — константа), и концентрацию на стенке, подчиняющуюся степенному закону $C_w(x) = C_\infty + B^*x^n$ (C_∞ — равномерная концентрация окружающей среды; B^* — постоянная; n — степенной параметр температуры и концентрации). Предполагается также, что на поверхности пластины поддерживаются переменные температура T_w и концентрация C_w, при этом значения $B > 0$ ($T_w > T_\infty$) соответствуют нагретой пластине ("способствующий" поток), $B < 0$ ($T_w < T_\infty$) — охлажденной пластине ("препятствующий" поток) и $B^* > 0$ ($C_w > C_\infty$). Сила плавучести возникает вследствие разности температур и концентраций в жидкости. Концентрация диффундирующих соединений полагается пренебрежимо малой по сравнению с концентрацией химических соединений, находящихся вдали от поверхности пластины. Следовательно, можно пренебречь эффектами Соре и Дюфура. Для комбинированной задачи тепло- и массообмена используется приближение Буссинеска [21]. При этих предположениях уравнения сохранения массы, импульса, энергии и концентрации задаются следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \qquad (1)$$

$$u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} = U_e\,\frac{\partial U_e}{\partial x} + \nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\big[\beta(T - T_\infty) + \beta^*(C - C_\infty)\big],$$

$$u\,\frac{\partial T}{\partial x} + v\,\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{\mathrm{Pr}}\,\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{Q_0}{\rho c_p}\,(T - T_\infty), \qquad (2)$$

$$u\,\frac{\partial C}{\partial x} + v\,\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\nu}{\mathrm{Sc}}\,\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - k_1(C - C_\infty),$$

граничные условия для уравнений задачи имеют вид

$$y = 0: \qquad u(x,0) = U_w(x), \quad v(x,0) = v_w(x), \quad T = T_w(x), \quad C = C_w(x),$$

$$y \to \infty: \qquad u(x,\infty) \to U_\infty(x), \quad T \to T_\infty, \quad C \to C_\infty.$$

Здесь u, v — компоненты вектора скорости в направлениях осей x и y; U_e — скорость на границе пограничного слоя; c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении; C — концентрация вещества; $C_w(x)$ — концентрация вещества на стенке; T — температура жидкости; $T_w(x)$ — температура жидкости на стенке; g — ускорение свободного падения; k_1 — скорость химической реакции; Pr — число Прандтля; Q_0 — коэффициент выделения тепла; Sc — число Шмидта; ν — кинематическая вязкость; ρ — плотность жидкости; β, β^* — температурный и концентрационный коэффициенты объемного расширения соответственно. Скорости растягиваемой пластины U_w и свободного потока U_∞, температура стенки T_w и концентрация жидкости на стенке C_w задаются следующим образом:

$$U_w(x) = U_{w0}x^m, \quad U_\infty(x) = U_{\infty 0}x^m, \quad T_w(x) = T_\infty + Bx^n, \quad C_w(x) = C_\infty + B^*x^n.$$

Скорость потока определяется по формуле

$$U(x) = U_w(x) + U_\infty(x) = U_0 x^m,$$

где $U_0 = U_{w0} + U_{\infty 0} \ne 0$. С использованием преобразований

$$\eta = y\Big(\frac{U(x)}{\nu x}\Big)^{1/2}, \qquad \xi = \Big(\frac{U(x)x}{\nu}\Big)^{1/2},$$

$$\psi(x,y) = (\nu x U(x))^{1/2} f(\xi,\eta), \qquad u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

$$u = U_0 x^m F(\xi,\eta), \qquad f_\eta(\xi,\eta) = F(\xi,\eta),$$

$$v = -2^{-1}(\nu U_0)^{1/2} x^{(m-1)/2}[(m+1)(f + \xi f_\xi) + (m-1)\eta F],$$

$$T - T_\infty = (T_w - T_\infty)G(\xi,\eta), \qquad C - C_\infty = (C_w - C_\infty)H(\xi,\eta)$$

уравнение (1) выполняется тождественно, а уравнения (2) принимают следующий вид:

$$F_{\eta\eta} + \frac{m+1}{2} fF_\eta + m(\varepsilon^2 - F^2) + \lambda(G + NH) = \frac{m+1}{2}\xi(FF_\xi - F_\eta f_\xi); \tag{3}$$

$$G_{\eta\eta} + \mathrm{Pr}\,\frac{m+1}{2} fG_\eta - n\,\mathrm{Pr}\,FG + \mathrm{Pr}\,\xi^2 SG = \mathrm{Pr}\,\frac{m+1}{2}\xi(FG_\xi - G_\eta f_\xi); \tag{4}$$

$$H_{\eta\eta} + \mathrm{Sc}\,\frac{m+1}{2} fH_\eta - n\,\mathrm{Sc}\,FH - \mathrm{Sc}\,\xi^2 \Delta H = \mathrm{Sc}\,\frac{m+1}{2}\xi(FH_\xi - H_\eta f_\xi). \tag{5}$$

Здесь

$$\lambda = \frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}_x^2}, \qquad \mathrm{Gr} = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)x^3}{\nu^2},$$

$$\mathrm{Re}_x = \frac{U_0 x^{m+1}}{\nu}, \qquad N = \frac{\lambda^*}{\lambda}, \qquad \lambda^* = \frac{\mathrm{Gr}^*}{\mathrm{Re}_x^2}, \qquad \mathrm{Gr}^* = \frac{g\beta^*(C_w - C_\infty)x^3}{\nu^2},$$

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}, \qquad \mathrm{Sc} = \frac{\nu}{D}, \qquad S = \frac{Q_0\nu}{U^2\rho c_p}, \qquad \Delta = \frac{k_1\nu}{U^2},$$

ξ, η — новые переменные; α — температуропроводность; Δ — параметр химической реакции; D — коэффициент диффузии; f — безразмерная функция тока вдоль оси x; G — безразмерная температура; H — безразмерная концентрация; S — параметр выделения (поглощения) тепла; Re_x — локальное число Рейнольдса; N — отношение сил плавучести, или отношение чисел Грасгофа; λ, λ^* — параметры плавучести, соответствующие температуре и концентрации; Gr, Gr* — локальные числа Грасгофа, соответствующие температуре и концентрации.

Параметр смешанной конвекции (плавучести) $\lambda > 0$ ($T_w > T_\infty$) соответствует “способствующему” потоку, $\lambda < 0$ ($T_w < T_\infty$) — “препятствующему” потоку, $\lambda = 0$ ($T_w = T_\infty$) — случаю вынужденного потока. Безразмерный параметр N представляет собой соотношение между температурными и концентрационными силами плавучести ($N = 0$ в отсутствие плавучести, обусловленной массовой диффузией, $N = \infty$ в отсутствие плавучести, обусловленной тепловой диффузией, $N = 1$ в случае, когда температурные и концентрационные силы плавучести равны, $N > 0$ в случае одинаково направленных сил плавучести, $N < 0$ в случае противоположно направленных сил плавучести). Параметр $S > 0$ в случае выделения тепла, $S < 0$ в случае поглощения тепла, $S = 0$ в случае отсутствия источника тепла. Параметр химической реакции $\Delta > 0$ в случае выделения частиц, $\Delta < 0$ в случае поглощения частиц, $\Delta = 0$ в случае отсутствия химической реакции.

Граничные условия принимают вид

$$\begin{gathered} \eta = 0\colon \qquad F = 1 - \varepsilon, \quad G = 1, \quad H = 1, \\ \eta = \eta_\infty\colon \qquad F = \varepsilon, \quad G = 0, \quad H = 0, \end{gathered} \tag{6}$$

где η_∞ — граница пограничного слоя; ε — константа, соответствующая отношению скорости набегающего потока к составной скорости:

$$\varepsilon = \frac{U_\infty(x)}{U(x)} = \frac{U_{\infty 0}}{U_{w0} + U_{\infty 0}}.$$

Преобразование подобия составной скорости $U(x)$ впервые использовано в работе [11].

Постановка задачи включает следующие частные случаи.

1. При $\varepsilon = 1$, т. е. $U_w = 0$ (классическая задача Блазиуса обтекания плоской пластины), пластина находится в состоянии покоя, а жидкость движется.

2. При $\varepsilon = 0$, т. е. $U_\infty = 0$, жидкость вне пограничного слоя находится в состоянии покоя, а движение в нем создается движением пластины. Этот случай рассмотрен в работе [6], уравнения для растягиваемой пластины предложены в [14].

3. При $0 < \varepsilon < 1$, т. е. $U_w > 0$ и $U_\infty > 0$, пластина и жидкость движутся в одном и том же направлении.

Предполагается, что скорость растягиваемой пластины $U_w(x)$ и скорость свободного потока $U_\infty(x)$ сонаправлены и $\varepsilon = 0{,}5$.

Из граничных условий следует

$$f = \int\limits_0^\eta F\,d\eta + f_w,$$

где функция f_w определяется из уравнения

$$(m+1)f_w + 2(U_0/\nu)^{m/(m+1)}\xi^{2m/(m+1)}(f_\xi)_w = -(m+1)(v_w/U_0)\xi$$

и выражение для нее имеет вид

$$f_w = -\frac{2}{(m+1)U_0}\Big(\frac{U_0}{\nu}\Big)^{m/(m+1)}\int\limits_0^\xi v_w\xi^{(1-m)/(1+m)}\,d\xi,$$

v_w — скорость массообмена на поверхности (значения $v_w < 0$ соответствуют отсосу, $v_w > 0$ — вдуву, $v_w = 0$ — отсутствию вдува и отсоса). В данной работе исследуется неравномерный вдув (отсос) через одно или два щелевых отверстия в смешанно-конвекционном потоке в пограничном слое, обтекающем вертикально растягиваемую пластину.

2. Случай вдува (отсоса) через одно щелевое отверстие. В случае одного отверстия скорость вдува (отсоса) задается следующим образом:

$$v_w = \begin{cases} 0, & \xi \leqslant \xi_0, \\ -U_0\,\dfrac{m+1}{2}\Big(\dfrac{\nu}{U_0}\Big)^{m/(m+1)}A\xi^{-1}\omega^*\sin{[\omega^*(\xi-\xi_0)]}, & \xi_0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0^*, \\ 0, & \xi \geqslant \xi_0^*. \end{cases}$$

Тогда функция f_w принимает вид

$$f_w = \begin{cases} 0, & \xi \leqslant \xi_0, \\ A\xi^{-1}\{1-\cos{[\omega^*(\xi-\xi_0)]}\}, & \xi_0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0^*, \\ A\xi^{-1}\{1-\cos{[\omega^*(\xi_0^*-\xi_0)]}\}, & \xi \geqslant \xi_0^*. \end{cases}$$

Здесь ω^*, ξ_0 — свободные параметры, определяющие длину и положение отверстий соответственно. Функция v_w непрерывна при любых значениях ξ и имеет ненулевые значения только в интервале $[\xi_0, \xi_0^*]$.

3. Случай вдува (отсоса) через два щелевых отверстия. В случае двух отверстий функция v_w выбирается в виде

$$v_w = \begin{cases} 0, & \xi \leqslant \xi_1, \\ -U_0\,\dfrac{m+1}{2}\Big(\dfrac{\nu}{U_0}\Big)^{m/(m+1)}A\xi^{-1}\omega^*\sin{[\omega^*(\xi-\xi_1)]}, & \xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_1^*, \\ 0, & \xi_1^* \leqslant \xi \leqslant \xi_2, \\ -U_0\,\dfrac{m+1}{2}\Big(\dfrac{\nu}{U_0}\Big)^{m/(m+1)}A\xi^{-1}\omega^*\sin{[\omega^*(\xi-\xi_2)]}, & \xi_2 \leqslant \xi \leqslant \xi_2^*, \\ 0, & \xi \geqslant \xi_2^*. \end{cases}$$

Используя v_w, можно выразить f_w следующим образом:

$$f_w = \begin{cases} 0, & \xi \leqslant \xi_1, \\ A\xi^{-1}\{1 - \cos[\omega^*(\xi - \xi_1)]\}, & \xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_1^*, \\ A\xi^{-1}\{1 - \cos[\omega^*(\xi_1^* - \xi_1)]\}, & \xi_1^* \leqslant \xi \leqslant \xi_2, \\ A\xi^{-1}\{1 - \cos[\omega^*(\xi_1^* - \xi_1)]\} + A\xi^{-1}\{1 - \cos[\omega^*(\xi - \xi_2)]\}, & \xi_2 \leqslant \xi \leqslant \xi_2^*, \\ A\xi^{-1}\{1 - \cos[\omega^*(\xi_1^* - \xi_1)]\} + A\xi^{-1}\{1 - \cos[\omega^*(\xi_2^* - \xi_2)]\}, & \xi \geqslant \xi_2^*. \end{cases}$$

Здесь ξ_1, ξ_2 — параметры, определяющие левую границу первого и второго отверстий соответственно. Таким образом, непрерывная функция v_w имеет ненулевое значение только в интервалах $[\xi_1, \xi_1^*]$ и $[\xi_2, \xi_2^*]$.

При исследовании тепло- и массообмена основными характеристиками являются локальный коэффициент поверхностного трения C_{fx}, локальное число Нуссельта Nu_x и локальное число Шервуда Sh_x, которые определяют касательные напряжения на стенке, скорость теплопереноса и скорость массообмена соответственно.

Выражение для локального коэффициента поверхностного трения на стенке записывается в виде

$$C_{fx} = \frac{2}{\rho U^2}\left[\mu\,\frac{\partial u}{\partial y}\right]\Big|_{y=0},$$

или

$$C_{fx}(\mathrm{Re}_x)^{1/2} = 2F_\eta(\xi, 0).$$

Коэффициент теплопереноса на стенке можно выразить через локальное число Нуссельта:

$$\mathrm{Nu}_x = -\frac{1}{T_w - T_\infty}\left[x\,\frac{\partial T}{\partial y}\right]\Big|_{y=0},$$

или

$$\mathrm{Nu}_x(\mathrm{Re}_x)^{-1/2} = -G_\eta(\xi, 0),$$

а коэффициент массообмена на стенке — через локальное число Шервуда:

$$\mathrm{Sh}_x = -\frac{1}{C_w - C_\infty}\left[x\,\frac{\partial C}{\partial y}\right]\Big|_{y=0},$$

или

$$\mathrm{Sh}_x(\mathrm{Re}_x)^{-1/2} = -H_\eta(\xi, 0).$$

4. Метод решения. Связанные нелинейные дифференциальные уравнения (3)–(5) с граничными условиями (6) представляют собой двухточечную краевую задачу для дифференциальных уравнений с частными производными, которая решается численно с помощью неявной конечно-разностной схемы и метода квазилинеаризации [18, 20, 22, 23].

Используя метод квазилинеаризации, заменяем нелинейную систему дифференциальных уравнений в частных производных (3)–(5) на следующую линейную систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{gathered} F_{\eta\eta}^{i+1} + X_1^i F_\eta^{i+1} + X_2^i F^{i+1} + X_3^i G^{i+1} + X_4^i F_\xi^{i+1} + X_5^i H^{i+1} = X_6^i, \\ G_{\eta\eta}^{i+1} + Y_1^i G_\eta^{i+1} + Y_2^i G^{i+1} + Y_3^i F^{i+1} + Y_4^i G_\xi^{i+1} = Y_5^i, \\ H_{\eta\eta}^{i+1} + Z_1^i H_\eta^{i+1} + Z_2^i H^{i+1} + Z_3^i F^{i+1} + Z_4^i H_\xi^{i+1} = Z_5^i. \end{gathered} \tag{7}$$

Функции с индексом i известны, а функции с индексом $i+1$ необходимо определить.

В результате квазилинеаризации граничные условия принимают вид

$$\eta = 0: \qquad F^{i+1} = 1 - \varepsilon, \quad G^{i+1} = 1, \quad H^{i+1} = 1,$$

$$\eta = \eta_\infty: \qquad F^{i+1} = \varepsilon, \quad G^{i+1} = 0, \quad H^{i+1} = 0.$$

Коэффициенты в уравнениях (7) задаются следующим образом:

$$X_1^i = f\,\frac{m+1}{2} + \frac{m+1}{2}\,\xi f_\xi, \quad X_2^i = -2mF - \frac{m+1}{2}\,\xi F_\xi, \quad X_3^i = \lambda,$$

$$X_4^i = -\frac{m+1}{2}\,\xi F, \quad X_5^i = N\lambda, \quad X_6^i = -\frac{m+1}{2}\,\xi F F_\xi - m(\varepsilon^2 + F^2),$$

$$Y_1^i = \mathrm{Pr}\,\Big(\frac{m+1}{2}\,f + \frac{m+1}{2}\,\xi f_\xi\Big), \quad Y_2^i = \mathrm{Pr}(S\xi^2 - nF), \quad Y_3^i = -\mathrm{Pr}\,\Big(\frac{m+1}{2}\,\xi G_\xi + nG\Big),$$

$$Y_4^i = -\mathrm{Pr}\,\frac{m+1}{2}\,\xi F, \qquad Y_5^i = -\mathrm{Pr}\,\Big(\frac{m+1}{2}\,\xi F G_\xi + nFG\Big),$$

$$Z_1^i = \mathrm{Sc}\,\Big(\frac{m+1}{2}\,f + \frac{m+1}{2}\,\xi f_\xi\Big), \quad Z_2^i = -\mathrm{Sc}\,(\Delta\xi^2 + nF), \quad Z_3^i = -\mathrm{Sc}\,\Big(\frac{m+1}{2}\,\xi H_\xi + nH\Big),$$

$$Z_4^i = -\mathrm{Sc}\,\frac{m+1}{2}\,\xi F, \qquad Z_5^i = -\mathrm{Sc}\,\Big(\frac{m+1}{2}\,\xi F H_\xi + nFH\Big).$$

Полученная с использованием конечно-разностной схемы система линейных алгебраических уравнений с блочной трехдиагональной матрицей решается с помощью алгоритма Варги [24].

Выбраны размеры шагов по ξ- и η-направлениям $\Delta\xi = 0{,}005$, $\Delta\eta = 0{,}01$. При решении системы уравнений используется следующий критерий сходимости:

$$\max\big\{|(F_\eta)_w^{i+1} - (F_\eta)_w^i|, |(G_\eta)_w^{i+1} - (G_\eta)_w^i|, |(H_\eta)_w^{i+1} - (H_\eta)_w^i|\big\} < 10^{-5}.$$

5. Результаты исследования и их обсуждение. Расчеты проводились при следующих значениях параметров: $0{,}7 \leqslant \mathrm{Pr} \leqslant 100{,}0$; $-0{,}5 \leqslant A \leqslant 1{,}0$; $-0{,}5 \leqslant \lambda \leqslant 7{,}0$; $-1{,}0 \leqslant S \leqslant 1{,}0$; $-5{,}0 \leqslant \Delta \leqslant 3{,}0$; $0{,}22 \leqslant \mathrm{Sc} \leqslant 0{,}60$; $0 \leqslant m \leqslant 1{,}0$; $-2{,}0 \leqslant n \leqslant 2{,}0$; $N = 0{,}5$; $\varepsilon = 0{,}5$. Во всех расчетах положение границы пограничного слоя выбирается в интервале $4 \leqslant \eta_\infty \leqslant 8$ в зависимости от значений параметров. Для проверки точности расчетов, выполненных с использованием предлагаемого численного метода, проведено сравнение результатов вычисления параметра переноса тепла через поверхность $-G_\eta(\xi, 0)$, скорости F и температуры G с данными работ [2, 6–10, 15–17]. Следует отметить, что результаты, полученные в настоящей работе, хорошо согласуются с известными данными (табл. 1, 2 и рис. 1, 2). Из табл. 1 следует, что при увеличении числа Прандтля Pr параметр переноса тепла через поверхность $-G_\eta(\xi, 0)$ значительно увеличивается, поскольку в жидкости с бóльшим числом Прандтля формируется тепловой пограничный слой меньшей толщины. Из табл. 2 следует, что при увеличении степенного параметра температуры n температурный градиент увеличивается.

На рис. 1 представлены профили скорости F. Видно, что при увеличении параметра ε от 0 до 1 происходит изменение формы профиля скорости. На рис. 2 показано влияние степенного параметра температуры n на температуру G. Видно, что увеличение параметра n приводит к уменьшению толщины теплового пограничного слоя.

Влияние параметра плавучести λ и числа Прандтля Pr на скорость F и температуру G показано на рис. 3. Представлены случаи “способствующего” ($\lambda > 0$) и “препятствующего” ($\lambda < 0$) потоков. Видно, что для жидкости с малым числом Прандтля $\mathrm{Pr} = 0{,}7$ (воздух) при $\lambda > 0$ скорость F вблизи пластины увеличивается. При $\lambda > 0$ возникает благоприятный градиент давления, что приводит к увеличению скорости. При $\lambda < 0$ возникает

Таблица 1

Значения $-G_\eta(\xi,0)$ при $\lambda=0$, $\xi=0$, $\varepsilon=0$, $m=0$, $n=0$, $N=0$, $S=0$, $\Delta=0$, $\mathrm{Sc}=0$, $A=0$ и различных значениях Pr

Pr	$-G_\eta(\xi,0)$							
	Данные [2]	Данные [6]	Данные [7]	Данные [9]	Данные [10]	Данные [16]	Данные [17]	Данные настоящей работы
0,7	0,3492	0,3508	0,349 25	0,3476	0,349 24	0,350 04	0,352 215	0,3542
1,0	0,4438	—	0,443 75	0,4416	—	0,444 01	0,444 428	0,4445
2,0	—	0,6831	0,683 24	—	—	0,683 14	0,683 024	0,6830
7,0	—	—	1,386 19	—	1,387 03	1,386 25	1,386 861	1,3869
10,0	1,6804	1,6808	1,680 08	1,6713	—	1,680 11	1,680 150	1,6802
100,0	5,5450	—	5,544 00	—	—	5,546 10	5,547 512	5,5475

Таблица 2

Значения скорости теплообмена $-G_\eta(\xi,0)$ при $m=1$, $\lambda=0$, $\xi=0$, $\varepsilon=0$, $N=0$, $S=0$, $\Delta=0$, $\mathrm{Sc}=0$, $A=0$ и различных значениях Pr и n

Pr	$-G_\eta(\xi,0)$								
	Данные настоящей работы			Данные [7]			Данные [8]		
	$n=-2$	$n=0$	$n=2$	$n=-2$	$n=0$	$n=2$	$n=-2$	$n=0$	$n=2$
0,72	−0,7202	0,4637	1,0902	−0,720 00	0,463 15	1,088 53	−0,72	0,4631	1,0855
1,00	−0,9959	0,5821	1,3333	−1,000 03	0,581 99	1,333 34	−1,00	0,5820	1,3333
3,00	−2,9995	1,1654	2,5097	−3,000 46	1,165 23	2,509 72	−3,00	1,1652	2,5097
7,00	−7,0026	1,8955	3,9716	−7,002 40	1,895 37	3,971 50	—	—	—
10,00	−9,9963	2,3083	4,7969	−10,004 70	2,307 96	4,796 86	−10,00	2,3080	4,7969
100,00	−100,2990	7,7745	15,7124	−100,310 00	7,765 36	15,711 80	−100,00	7,7657	15,7120

неблагоприятный градиент давления, что приводит к уменьшению скорости потока. Влияние параметра λ на температуру является незначительным (см. рис. 3,*б*). Кроме того, из рис. 3,*б* следует, что при больших числах Прандтля толщина теплового пограничного слоя мала, поскольку жидкость с большим числом Прандтля $\mathrm{Pr}=7{,}0$ (вода) имеет низкую теплопроводность.

На рис. 4 показано влияние параметра поверхностного массопереноса A и степенного параметра температуры n на температуру G. В случае вдува ($A<0$) угол наклона профиля температуры вблизи растягиваемой пластины уменьшается, а в случае отсоса ($A>0$) — увеличивается. При линейном законе изменения температуры на поверхности ($n=1$) толщина теплового пограничного слоя уменьшается, в то время как при постоянной температуре поверхности ($n=0$) — увеличивается.

Влияние параметра поверхностного массообмена A и степенного параметра скорости m на скорость F показано на рис. 5. Следует отметить, что в случае линейного растяжения поверхности ($m=1$) скорость увеличивается, а в случае равномерного движения ($m=0$) — уменьшается. Влияние параметра m на температуру G и концентрацию H является незначительным.

На рис. 6 показано влияние параметра химической реакции Δ и числа Шмидта Sc на концентрацию H. При $\Delta<0$ толщина концентрационного пограничного слоя увеличивается, а при $\Delta>0$ — уменьшается. Значения числа Шмидта выбираются близкими к реальным и соответствуют водороду ($\mathrm{Sc}=0{,}22$) и водяному пару ($\mathrm{Sc}=0{,}60$) при $T=25\,^\circ\mathrm{C}$

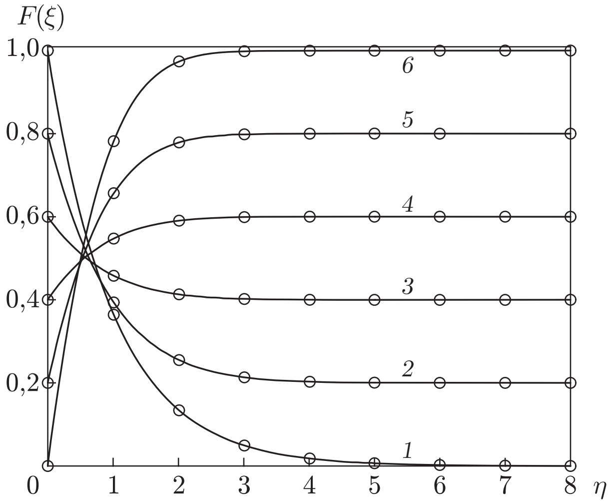

Рис. 1

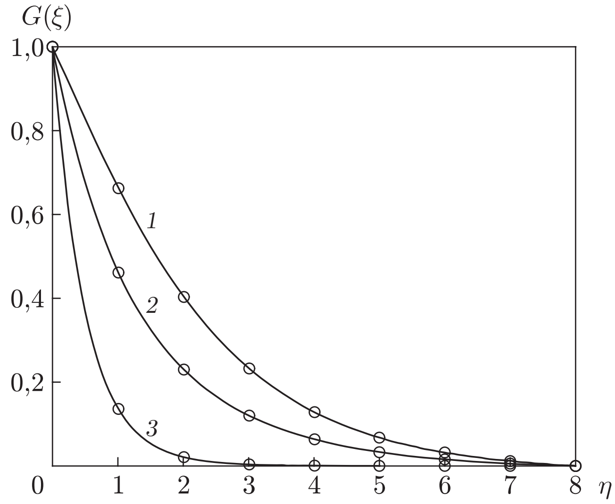

Рис. 2

Рис. 1. Зависимость скорости от координаты η при $\lambda = 0$, $n = 1{,}0$, $\xi = 0$, $A = 0$, $m = 1{,}0$, $N = 0$, $S = 0$, $\mathrm{Sc} = 0$, $\mathrm{Pr} = 0$, $\Delta = 0$ и различных значениях параметра ε:

линии — данные настоящей работы, точки — данные [15]; *1* — $\varepsilon = 0$, *2* — $\varepsilon = 0{,}2$, *3* — $\varepsilon = 0{,}4$, *4* — $\varepsilon = 0{,}6$, *5* — $\varepsilon = 0{,}8$, *6* — $\varepsilon = 1{,}0$

Рис. 2. Зависимость температуры от координаты η при $\lambda = 0$, $\varepsilon = 0$, $\xi = 0$, $A = 0$, $m = 0$, $N = 0$, $S = 0$, $\mathrm{Sc} = 0$, $\mathrm{Pr} = 0{,}7$, $\Delta = 0$ и различных значениях степенного параметра температуры n:

линии — данные настоящей работы, точки — данные [6]; *1* — $n = 0$, *2* — $n = 1$, *3* — $n = 2$

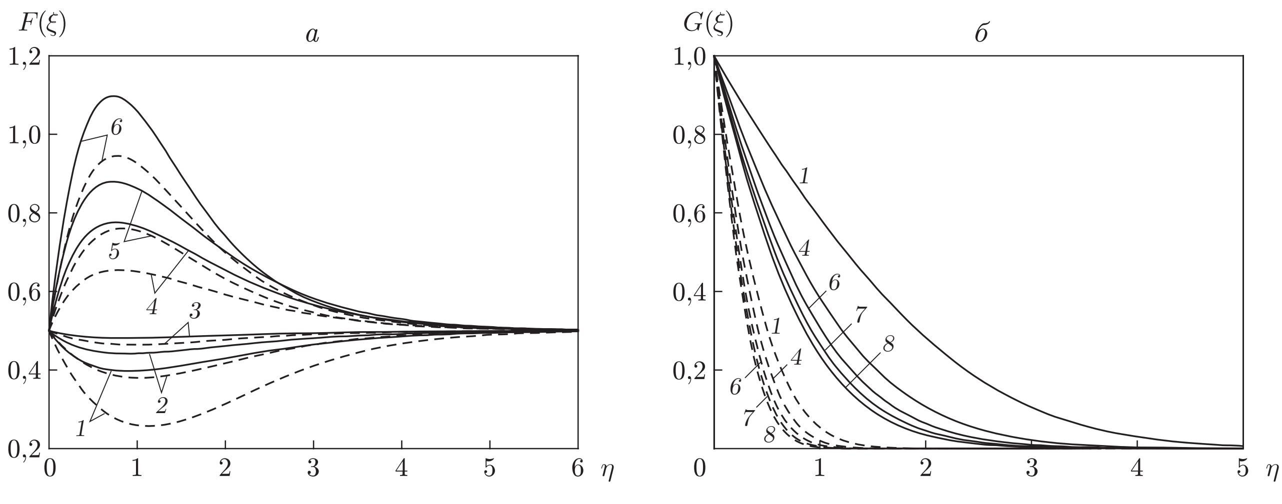

Рис. 3. Зависимости скорости (*а*) и температуры (*б*) от координаты η при $\varepsilon = 0{,}5$, $\omega^* = 2\pi$, $S = 0{,}5$, $N = 0{,}5$, $m = 1{,}0$, $n = 1{,}0$, $A = 0{,}5$, $\Delta = 0{,}5$, $\mathrm{Sc} = 0{,}22$, $\xi = 0{,}75$ и различных значениях параметра плавучести λ и числа Прандтля Pr:

сплошные линии — $\mathrm{Pr} = 0{,}7$, штриховые — $\mathrm{Pr} = 7{,}0$; *1* — $\lambda = -0{,}5$, *2* — $\lambda = -0{,}3$, *3* — $\lambda = -0{,}1$, *4* — $\lambda = 1{,}0$, *5* — $\lambda = 2{,}0$, *6* — $\lambda = 3{,}0$, *7* — $\lambda = 5{,}0$, *8* — $\lambda = 7{,}0$

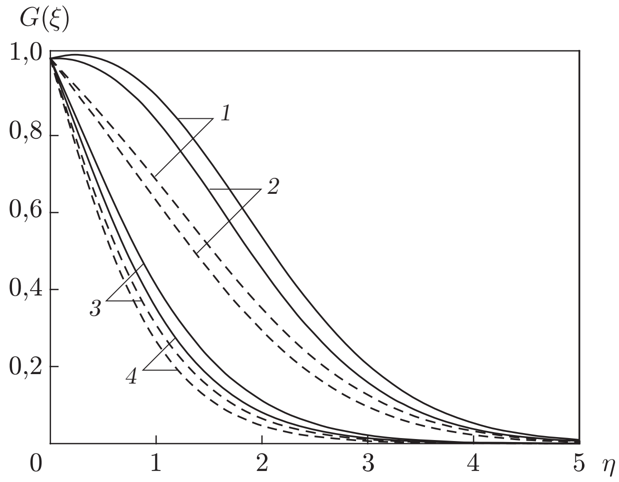

Рис. 4

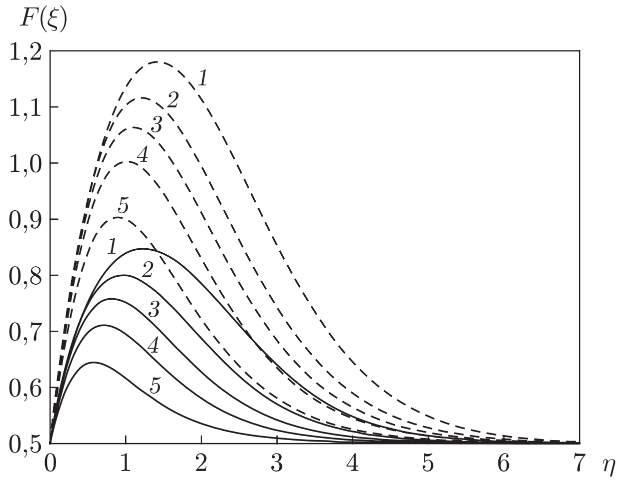

Рис. 5

Рис. 4. Зависимость температуры от координаты η при $\varepsilon = 0{,}5$, $S = 0{,}5$, $N = 0{,}5$, $m = 1{,}0$, $\lambda = 1{,}0$, $\mathrm{Pr} = 0{,}7$, $\Delta = 0{,}5$, $\mathrm{Sc} = 0{,}22$, $\xi = 1{,}0$, $\omega^* = 2\pi$ для отверстия, границы которого имеют координаты $\xi_0 = 0{,}5$, $\xi_0^* = 1{,}0$:
сплошные линии — $n = 0$, штриховые — $n = 1$; *1* — $A = -0{,}5$, *2* — $A = -0{,}4$, *3* — $A = 0$, *4* — $A = 0{,}3$

Рис. 5. Зависимость скорости от координаты η при $\varepsilon = 0{,}5$, $S = 0{,}5$, $N = 0{,}5$, $n = 1{,}0$, $\lambda = 1{,}0$, $\mathrm{Pr} = 0{,}7$, $\Delta = 1{,}0$, $\mathrm{Sc} = 0{,}22$, $\xi = 1{,}0$, $\omega^* = 2\pi$ для отверстия, границы которого имеют координаты $\xi_0 = 0{,}5$, $\xi_0^* = 1{,}0$:
сплошные линии — $m = 0$, штриховые — $m = 1$; *1* — $A = -0{,}5$, *2* — $A = -0{,}2$, *3* — $A = 0$, *4* — $A = 0{,}2$, *5* — $A = 0{,}5$

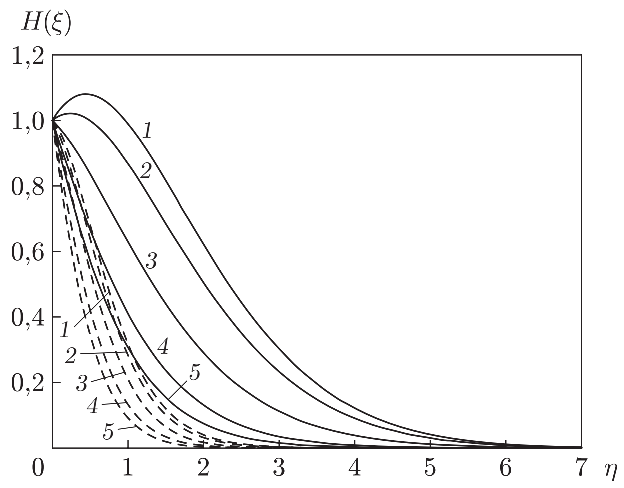

Рис. 6. Зависимость концентрации от координаты η при $\varepsilon = 0{,}5$, $\omega^* = 2\pi$, $S = 0{,}5$, $N = 0{,}5$, $n = 1{,}0$, $\lambda = 1{,}0$, $\mathrm{Pr} = 0{,}7$, $m = 1{,}0$, $A = 1{,}0$, $\xi = 1{,}0$ и различных значениях числа Шмидта Sc и параметра химической реакции Δ:
сплошные линии — $\mathrm{Sc} = 0{,}22$, штриховые — $\mathrm{Sc} = 0{,}60$; *1* — $\Delta = -5{,}0$, *2* — $\Delta = -4{,}5$, *3* — $\Delta = -3{,}0$, *4* — $\Delta = 0$, *5* — $\Delta = 3{,}0$

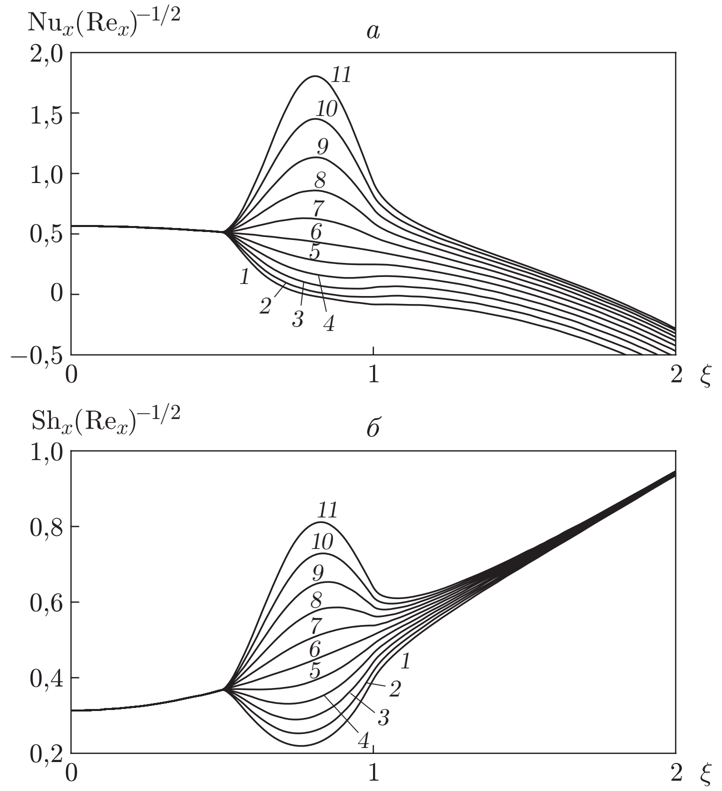

Рис. 7. Зависимости локальных чисел Нуссельта $\mathrm{Nu}_x(\mathrm{Re}_x)^{-1/2}$ (*а*) и Шервуда $\mathrm{Sh}_x(\mathrm{Re}_x)^{-1/2}$ (*б*) от координаты ξ при $\mathrm{Pr} = 0{,}7$, $\lambda = 1{,}0$, $S = 0{,}5$, $N = 0{,}5$, $m = 1{,}0$, $n = 1{,}0$, $\varepsilon = 0{,}5$, $\Delta = 1{,}0$, $\mathrm{Sc} = 0{,}22$, $\omega^* = 2\pi$ для отверстия, границы которого имеют координаты $\xi_0 = 0{,}5$, $\xi_0^* = 1{,}0$:
1 — $A = -0{,}5$, *2* — $A = -0{,}4$, *3* — $A = -0{,}3$, *4* — $A = -0{,}2$, *5* — $A = -0{,}1$, *6* — $A = 0$, *7* — $A = 0{,}1$, *8* — $A = 0{,}2$, *9* — $A = 0{,}3$, *10* — $A = 0{,}4$, *11* — $A = 0{,}5$

и давлении $p = 10^5$ Па. Очевидно, что увеличение числа Шмидта Sc приводит к уменьшению толщины концентрационного пограничного слоя. Это обусловлено тем, что бо́льшие значения Sc соответствуют меньшей массовой диффузии. Влияние Sc на скорость F и температуру G является незначительным, поскольку этот параметр содержится только в уравнении концентрации.

На рис. 7 показано влияние неоднородного отсоса ($A > 0$) и вдува ($A < 0$) через одно щелевое отверстие, начало которого находится в точке $\xi_0 = 0{,}5$, на локальные числа Нуссельта $\mathrm{Nu}_x(\mathrm{Re}_x)^{-1/2}$ и Шервуда $\mathrm{Sh}_x(\mathrm{Re}_x)^{-1/2}$. В случае неравномерного отсоса через щелевое отверстие ($A > 0$) локальные числа Нуссельта и Шервуда постепенно увеличиваются, достигая максимума, а затем уменьшаются. В случае неравномерного вдува через щелевое отверстие локальные числа Нуссельта и Шервуда уменьшаются в области щели.

На рис. 8 показано влияние параметра плавучести λ и степенного параметра температуры n на локальный коэффициент поверхностного трения $C_{fx}(\mathrm{Re}_x)^{1/2}$. Видно, что с увеличением параметра плавучести локальный коэффициент поверхностного трения увеличивается. Это обусловлено тем, что наличие сил плавучести при $\lambda > 0$ приводит к возникновению благоприятного градиента давления и увеличению скорости потока. В результате уменьшается толщина импульсного пограничного слоя и, следовательно, увеличивается коэффициент поверхностного трения на стенке. В частности, при $\lambda = 1$ и $\xi = 0{,}7$ коэффициент поверхностного трения увеличивается приблизительно на 19 %.

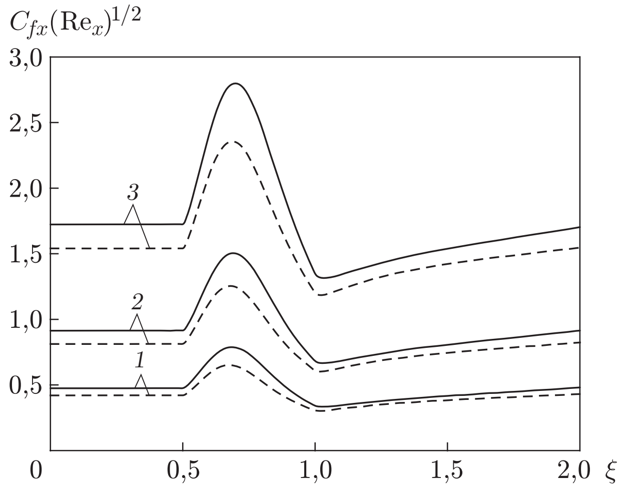

Рис. 8

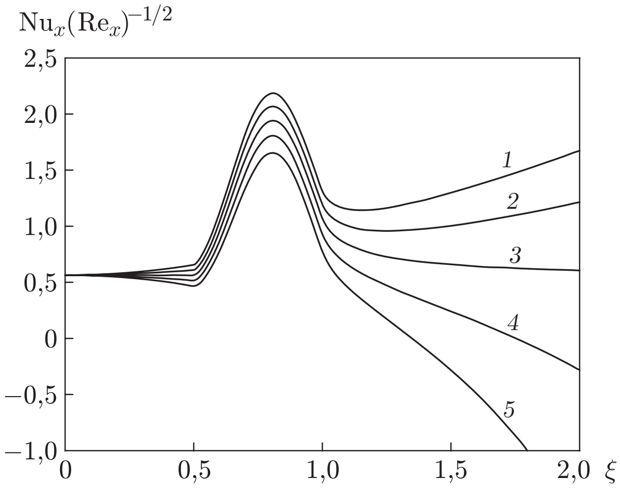

Рис. 9

Рис. 8. Зависимость локального коэффициента поверхностного трения $C_{fx}(\mathrm{Re}_x)^{1/2}$ от координаты ξ при $\mathrm{Pr} = 0{,}7$, $A = 0{,}5$, $S = 0{,}5$, $N = 0{,}5$, $m = 1{,}0$, $\varepsilon = 0{,}5$, $\Delta = 1{,}0$, $\mathrm{Sc} = 0{,}22$, $\omega^* = 2\pi$ для отверстия, границы которого имеют координаты $\xi_0 = 0{,}5$, $\xi_0^* = 1{,}0$:
сплошные линии — $n = 0$, штриховые — $n = 1$; *1* — $\lambda = 0{,}25$, *2* — $\lambda = 0{,}5$, *3* — $\lambda = 1{,}0$

Рис. 9. Зависимость локального числа Нуссельта $\mathrm{Nu}_x(\mathrm{Re}_x)^{-1/2}$ от координаты ξ при $\lambda = 1{,}0$, $A = 0{,}5$, $\Delta = 1{,}0$, $N = 0{,}5$, $m = 1{,}0$, $n = 1{,}0$, $\varepsilon = 0{,}5$, $\mathrm{Pr} = 0{,}7$, $\mathrm{Sc} = 0{,}22$, $\omega^* = 2\pi$ для отверстия, границы которого имеют координаты $\xi_0 = 0{,}5$, $\xi_0^* = 1{,}0$:
1 — $S = -1{,}0$, *2* — $S = -0{,}5$, *3* — $S = 0$, *4* — $S = 0{,}5$, *5* — $S = 1{,}0$

На рис. 9 показано влияние параметра выделения и поглощения тепла S на локальное число Нуссельта $\mathrm{Nu}_x(\mathrm{Re}_x)^{-1/2}$. Видно, что при выделении тепла ($S > 0$) локальное число Нуссельта уменьшается, а при поглощении тепла ($S < 0$) — увеличивается. Это обусловлено тем, что в случае выделения тепла ($S > 0$) температура жидкости и толщина теплового пограничного слоя увеличиваются, соответственно скорость теплообмена уменьшается. При $S = 0{,}5$; $1{,}0$ скорость теплообмена становится отрицательной. В случае поглощения тепла ($S < 0$) температура жидкости и толщина теплового пограничного слоя уменьшаются, следовательно, скорость теплообмена увеличивается.

На рис. 10 показано влияние наравномерного вдува (отсоса) через два щелевых отверстия на локальные числа Нуссельта $\mathrm{Nu}_x(\mathrm{Re}_x)^{-1/2}$ и Шервуда $\mathrm{Sh}_x(\mathrm{Re}_x)^{-1/2}$. В случае отсоса через два щелевых отверстия локальные числа Нуссельта и Шервуда увеличиваются в окрестности первого и второго щелевых отверстий. При неравномерном вдуве через два щелевых отверстия эти параметры уменьшаются в окрестности отверстий.

Заключение. В работе проведено исследование задачи о стационарном смешанноконвекционном потоке в пограничном слое на вертикально растягиваемой пластине при наличии химических реакций, выделения или поглощения тепла и неравномерного вдува (отсоса) через щелевое отверстие. Из результатов численных расчетов следует, что для жидкости с малым числом Прандтля ($\mathrm{Pr} = 0{,}7$) скорость вблизи границы пограничного слоя значительно больше, чем для жидкости с большим числом Прандтля. При увеличении параметра отсоса наблюдается уменьшение скорости потока. Также обнаружено, что в случае отсоса толщина пограничного слоя меньше, а касательные напряжения на стенке, скорости тепло- и массообмена значительно больше, чем в случае вдува. В частности,

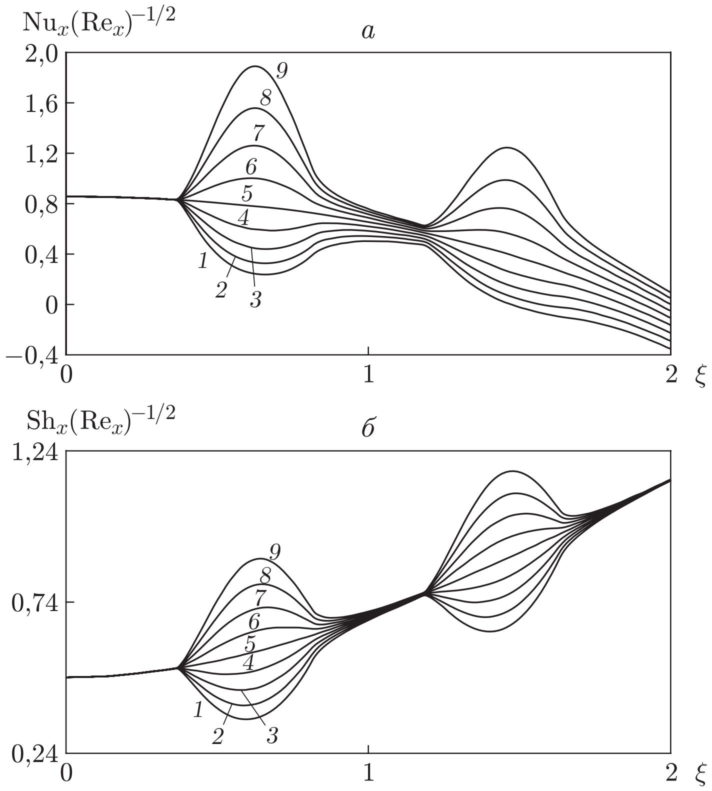

Рис. 10. Зависимости локальных чисел Нуссельта $\mathrm{Nu}_x(\mathrm{Re}_x)^{-1/2}$ (*а*) и Шервуда $\mathrm{Sh}_x(\mathrm{Re}_x)^{-1/2}$ (*б*) от координаты ξ при $\lambda = 1{,}0$, $\mathrm{Sc} = 0{,}22$, $n = 1{,}0$, $S = 0{,}5$, $N = 0{,}5$, $m = 1{,}0$, $\varepsilon = 0{,}5$, $\mathrm{Pr} = 0{,}7$, $\Delta = 1{,}0$, $\omega^* = 2\pi$ для двух щелевых отверстий, границы которых имеют координаты $\xi_1 = 0{,}4$, $\xi_1^* = 0{,}9$ и $\xi_2 = 1{,}3$, $\xi_2^* = 1{,}8$:
1 — $A = -0{,}4$, *2* — $A = -0{,}3$, *3* — $A = -0{,}2$, *4* — $A = -0{,}1$, *5* — $A = 0$, *6* — $A = 0{,}1$, *7* — $A = 0{,}2$, *8* — $A = 0{,}3$, *9* — $A = 0{,}4$

при увеличении значения параметра отсоса от 0 до 0,4 скорости тепло- и массообмена увеличиваются приблизительно на 15 и 30 % соответственно. Если параметр химической реакции $\Delta < 0$, то концентрация увеличивается, если $\Delta > 0$, то концентрация уменьшается. В случае выделения тепла ($S > 0$) толщина теплового пограничного слоя увеличивается, а в случае поглощения тепла ($S < 0$) температура жидкости и толщина теплового пограничного слоя уменьшаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Sakiadis B. C.** Boundary layer behavior on continuous solid surfaces. 2. The boundary layer on a continuous flat surface // AIChE J. 1961. V. 7, N 2. P. 221–225.
2. **Tsou F. K., Sparrow E. M., Goldstein R. J.** Flow and heat transfer in the boundary layer on a continuous moving surface // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1967. V. 10, N 2. P. 219–235.
3. **Erickson L. E., Fan L. T., Fox V. G.** Heat and mass transfer on moving continuous flat plate with suction or injection // Industr. Engng Chem. Fund. 1966. V. 5, N 1. P. 19–25.
4. **Crane L. J.** Flows past a stretching plate // Z. angew. Math. Phys. 1970. Bd 21, N 4. S. 645–647.
5. **Gupta P. S., Gupta A. S.** Heat and mass transfer on a stretching sheet with suction or blowing // Canad. J. Chem. Engng. 1977. V. 55, N 6. P. 744–746.

6. **Soundalgekar V. M., Murty T. V. R.** Heat transfer in flow past a continuous moving plate with variable temperature // Wärme- und Stoffübertrag. 1980. Bd 14, N 2. S. 91–93.
7. **Chen C. H.** Heat transfer characteristics of a non isothermal surface moving parallel to a free stream // Acta Mech. 2000. V. 142, N 1–4. P. 195–205.
8. **Grubka L. T., Bobba K. M.** Heat transfer characteristics of a continuous stretching surface with variable temperature // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1985. V. 107. P. 248–250.
9. **Ali M. E.** Heat transfer characteristics of a continuous stretching surface // Wärme- und Stoffübertrag. 1994. Bd 29, N 4. S. 227–234.
10. **Moutsoglou A., Chen T. S.** Buoyancy effects in boundary layers on inclined, continuous, moving sheets // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1980. V. 102, N 1. P. 371–373.
11. **Abdelhafez T. A.** Skin friction and heat transfer on a continuous flat surface moving in a parallel free stream // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1985. V. 28, N 6. P. 1234–1237.
12. **Chappidi P. R., Gunnerson F. S.** Analysis of heat and momentum transport along a moving surface // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1989. V. 32, N 7. P. 1383–1386.
13. **Afzal N., Baderuddin A., Elgarvi A. A.** Momentum and heat transport on a continuous flat surface moving in a parallel stream // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1993. V. 36, N 13. P. 3399–3403.
14. **Afzal N., Varshney I. S.** The cooling of a low heat resistance sheet moving through a fluid // Wärme- und Stoffübertrag. 1980. Bd 14, N 4. S. 289–293.
15. **Afzal N.** Momentum transfer on power law stretching plate with free stream pressure gradient // Intern. J. Engng Sci. 2003. V. 41, N 11. P. 1197–1207.
16. **Patil P. M., Roy S., Chamkha A. J.** Mixed convection flow over a vertical power law stretching sheet // Intern. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow. 2010. V. 20, N 4. P. 445–458.
17. **Patil P. M.** Effects of surface mass transfer on steady mixed convection flow from vertical stretching sheet with variable wall temperature and concentration // Intern. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow. 2012. V. 22, N 3. P. 287–305.
18. **Ravindran R., Ganapathirao M.** Non-uniform slot suction/injection into mixed convection boundary layer flow over vertical cone // Appl. Math. Mech. 2013. V. 34, N 11. P. 1327–1338.
19. **Ganapathirao M., Ravindran R., Pop I.** Non-uniform slot suction (injection) on an unsteady mixed convection flow over a wedge with chemical reaction and heat generation // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2013. V. 67. P. 1054–1061.
20. **Ravindran R., Ganapathirao M., Pop I.** Effects of chemical reaction and heat generation/absorption on unsteady mixed convection MHD flow over a vertical cone with non-uniform slot mass transfer // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2014. V. 73. P. 743–751.
21. **Schlichting H. S.** Boundary layer theory / H. S. Schlichting, K. Gersten. N. Y.: Springer, 2000.
22. **Inouye K., Tate A.** Finite difference version quasi-linearization applied to boundary layer equations // AIAA J. 1974. V. 12. P. 558–560.
23. **Ganapathirao M., Ravindran R., Momoniat M.** Effects of chemical reaction, heat and mass transfer on an unsteady mixed convection boundary layer flow over a wedge with heat generation/absorption in the presence of suction or injection // Heat Mass Transfer. 2014. V. 51, N 2. P. 289–300.
24. **Varga R. S.** Matrix iterative analysis. N. Y.: Springer, 2000.

Поступила в редакцию 24/X 2014 г.,
в окончательном варианте — 14/V 2015 г.