ЛИТЕРАТУРА

1. **Волоховская О. А., Подалков В. В.** Микронапряжения и начальная граница пластичности в поликристаллическом материале.— Изв. высш. учеб. заведений. Машиностроение, 1977, № 10.
2. **Волоховская О. А.** К вопросу о пластичности поликристаллических материалов.— Изв. высш. учеб. заведений. Машиностроение, 1977, № 11.
3. **Волоховская О. А., Подалков В. В.** Об определении макроскопического предела упругости в статистической модели поликристаллического материала.— В кн.: Тезисы докладов Всесоюз. конф. по проблемам оптимизации и надежности в строительной механике. Вильнюс, 1979.
4. **Костюк А. Г.** Статистическая теория пластичности поликристаллического материала.— Инж. журнал. МТТ, 1968, № 6.
5. **Лин Т. Н.** Физическая теория пластичности.— В сб.: Новое в зарубежной науке. № 7. М.: Мир, 1976.
6. **Хонникомб Р.** Пластическая деформация металлов. М.: Мир, 1972.
7. **Эшелби Дж.** Континуальная теория дислокаций. М.: ИЛ, 1968.
8. **Костюк А. Г.** Начальная поверхность текучести поликристаллического материала.— Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 2.

УДК 532.5.51

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

В. А. Владимиров

(*Новосибирск*)

Параметрический резонанс — один из распространенных типов неустойчивости механических систем. Несколько более широкий класс явлений называют параметрически возбуждаемыми колебаниями. Математическое определение этого класса колебаний обычно дается [1] для систем, уравнения движения которых сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям по времени. Параметрические колебания связаны с периодической зависимостью от времени коэффициентов (параметров) этих уравнений. Такие колебания отличаются от вынужденных, для которых явная зависимость от времени содержится в уравнениях только аддитивно, в виде периодических сил. Стандартным примером уравнений параметрических колебаний является уравнение Матье и его обобщения. Первым исследованием по параметрическим колебаниям была экспериментальная работа Фарадея [2], в которой изучались колебания свободной поверхности жидкости в сосуде. Однако позднее развивались в основном приложения к механике твердых и упругих тел [1, 3, 4]. Исключением является задача о колебаниях свободной поверхности жидкости в вертикально колеблющемся сосуде. Было показано [5—7], что смещение свободной поверхности в линейном приближении сводится к уравнению Матье и, следовательно, существуют резонансные частоты, при которых поверхность оказывается неустойчивой. Учет вязкости в этой задаче приведен в [8]. Только в последнее десятилетие начаты исследования по параметрической неустойчивости более сложных течений. В [9, 10] изучался параметрический резонанс в задачах конвекции. В [11—14] исследовалась устойчивость волн Россби. Работы [15, 16] посвящены неустойчивости внутренних волн в стратифицированной жидкости. В [15] приведен ряд соображений о возможности роста мелкомасштабных возмущений на фоне внутренней волны. В [16] содержится теоретическое исследование параметрической неустойчивости плоской внутренней волны в приближении Буссинеска. Показано, что волна конечной амплитуды может быть неустойчивой. В пределе малых амплитуд параметрическая неустойчивость переходит в известные [17] резонансные взаимодействия волн.

В данной работе изучается параметрический резонанс в стратифицированной жидкости. В случаях вертикально колеблющихся сосуда с жидкостью и горизонтального плоскопараллельного течения получены условия неустойчивости. Показано, что неустойчивость такого же сорта имеет место во внутренних волнах. Здесь важна мысль о сходстве физических условий движения жидкости в колеблющемся сосуде и в волне. Различия состоят в том, что колебания в волне не являются твердотельными и их частоты не задаются произвольно. Если же рассмотреть длинную внутреннюю волну, то локально (для коротковолновых возмущений) условия оказываются близкими к твердотельной колеблющейся жидкости. Изучаемый тип неустойчивости внутренних волн опущен из рассмотрения в [16]. Исследование механизмов, по которым может происходить разрушение внутренних волн, представляет большой интерес в связи с приложениями в океанологии [15—18]. Параметрический резонанс, возможно, может конкурировать с механизмом, предложенным в [18]. Последний сводится к возникновению в волне зон, в которых плотность нарастает вверх. Отметим также интересную гипотезу [11, 12, 15, 16], заключающуюся в том, что параметрическая неустойчивость волновых движений может являться механизмом «потери предсказуемости» течения и генерации турбулентности.

1. Рассмотрим прямоугольный сосуд, заполненный идеальной несжимаемой жидкостью. В начальный момент времени ($t = 0$) жидкость занимает объем $0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 < z < c$. Плотность жидкости $\rho_0 = Ae^{-\beta y}$ ($A > 0$, β — постоянные). Однородное поле тяжести имеет только y-составляющую $(0, -g, 0)$. Частота плавучести (Брента — Вяйсяля) $N^2 = \beta g = \mathrm{const}$. Сосуд движется в y-направлении со скоростью $\dot{Y}(t) \equiv dY/dt$, причем $Y(t)$ — периодическая функция (колебания конечной амплитуды). На границах сосуда выполняются условия непротекания. Состояние покоя жидкости относительно сосуда является решением уравнений движения. Требуется исследовать его устойчивость.

Переходим к системе координат, связанной с сосудом:

$$\bar{x} = x,\ \bar{y} = y - Y(t),\ \bar{z} = z,\ \bar{t} = t.$$

В этих координатах уравнения движения жидкости имеют тот же вид, что и в исходных, только поле тяжести g заменяется на $G \equiv g + \ddot{Y}$. Линеаризованная система уравнений на возмущения имеет вид

$$\rho_0 u_t = -p_x,\ \rho_0 w_t = -p_z,$$
$$\rho_0 v_t = -p_y - \rho G,\ \rho_t + \rho_0' v = 0,\quad u_x + v_y + w_z = 0, \tag{1.1}$$

черта над x, y, z, t опущена. Через u, v, w обозначены x, y, z-компоненты возмущений скорости; ρ, p — возмущения плотности и давления. Индексы внизу обозначают частные производные, $\rho_0' \equiv d\rho_0/dy$. Замена $\sigma = p/\rho_0$, $r = \rho/\rho_0$ сводит (1.1) к системе уравнений с не зависящими от x, y, z коэффициентами

$$u_t = -\sigma_x,\ w_t = -\sigma_z,$$
$$v_t = -\sigma_y + \beta\sigma - Gr,\ r_t - \beta v = 0,\ u_x + v_y + w_z = 0, \tag{1.2}$$

допускающей разделение переменных. Для r из (1.2) следует уравнение

$$Dr_{tt} + \beta G(r_{xx} + r_{zz}) = 0, \tag{1.3}$$

где $D = \Delta - \beta\partial/\partial y$; Δ — трехмерный оператор Лапласа. Замена $r = \varphi e^{\beta y/2}$ переводит (1.3) в

$$(\Delta - \beta^2/4)\varphi_{tt} + \beta G(\varphi_{xx} + \varphi_{zz}) = 0. \tag{1.4}$$

Собственной функцией задачи является

$$\varphi = R(t)k_1k_3 \cos k_1x \sin k_2y \cos k_3z, \tag{1.5}$$

где $(k_1, k_2, k_3) \equiv \pi(n_1/a, n_2/b, n_3/c)$; n_1, n_2, n_3 — произвольные целые числа. Вычисленные из (1.2), (1.5) компоненты u, v, w удовлетворяют граничным условиям. Из (1.4), (1.5) следует

$$\ddot{R} + B(N^2 + \beta\ddot{Y})R = 0, \tag{1.6}$$

где $B \equiv (k_1^2 + k_3^2)/(k^2 + \beta^2/4)$; $k^2 \equiv k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$.

Уравнение (1.6) вследствие периодичности $Y(t)$ представляет собой уравнение Хилла [19]. При $Y = C\cos\omega t$ оно сводится к уравнению Матье:

$$\ddot{R} + B(N^2 - \beta\omega^2 C\cos\omega t)R = 0,$$

каноническая форма которого:

$$R_{\tau\tau} + (a - 2q\cos 2\tau)R = 0, \tag{1.7}$$

где $\tau = \omega t/2$; $a = 4BN^2/\omega^2$; $q = 2BC$. Устойчивость решений (1.7) подробно изучена [19, 20]. На плоскости a, q (при $a > 0$) неустойчивые области представляют собой «языки», выходящие из точек $a = m^2$, $m = 1, 2, 3, \ldots$ При малых амплитудах C колебаний сосуда решения (1.7) неустойчивы в узких зонах вокруг точек:

$$\omega = 2NB^{1/2}/m. \tag{1.8}$$

Такая неустойчивость называется параметрическим резонансом [1, 3, 4], число m — порядком резонанса. Поскольку $B < 1$, для существования резонанса порядка m необходимо $\omega < 2N/m$. Для данных размеров сосуда a, b, c и частоты плавучести N существует четырехпараметрическое (по n_1, n_2, n_3, m) счетное множество частот колебания сосуда ω (1.8), при которых имеет место резонанс. Во всех случаях здесь и ниже под неустойчивостью понимается экспоненциальный рост решений при $t \to \infty$.

Предыдущие результаты получены для равновесного плотностного расслоения $N^2 \equiv \beta g > 0$. В то же время из (1.7) следует, что при выполнении условий

$$\sqrt{2B|N^2|}/\omega < CB|\beta| < 1/2 + 2B|N^2|/\omega^2 \tag{1.9}$$

колебания сосуда делают устойчивым состояние с нарастанием плотности вверх ($N^2 < 0$). Если амплитуда колебаний C мала, то правая часть (1.9) всегда выполняется. Левая часть дает условие

$$\omega C > (2g/|\beta|B)^{1/2}. \tag{1.10}$$

Обсуждаемое свойство стабилизации неравновесного состояния является аналогом известного результата для маятника, у которого верхнее положение становится устойчивым при колебаниях точки подвеса [21]. Еще более близкие аналоги — стабилизация колебаниями неустойчивости Рэлея — Тейлора [22] и конвекции [23]. Однако в отличие от этих случаев стабилизации идеальной неравновесно стратифицированной жидкости достигнуть не удается. В (1.10) этому соответствует нарушение неравенства при $B \to 0$. Малые величины B достигаются либо при $k_1^2 + k_3^2 \to 0$, либо при $k_2 \to \infty$. Ввиду ограниченных размеров сосуда первый случай исключен. Поэтому опасными являются короткие в вертикальном направлении волны. Возможно, что стабилизация здесь может быть достигнута введением вязкости.

Другим интересным следствием (1.7) является неустойчивость течения в отсутствие поля тяжести $g = 0$. Условие неустойчивости (приближенное [20]):

$$|C| > (2|\beta|)^{-1}.$$

Такая неустойчивость может оказаться важной для предсказания поведения стратифицированной жидкости в условиях невесомости.

2. Учет вязкости жидкости приводит к замене оператора $\partial/\partial t$ перед компонентами скорости в (1.1) на $\partial/\partial t - \nu\Delta$. При условии постоянства коэффициента кинематической вязкости $\nu = \mathrm{const}$ вместо (1.4) получаем уравнение

$$(\Delta - \beta^2/4)[\varphi_{tt} - \nu(\Delta + \beta^2/4 + \beta\partial/\partial y)\varphi_t] + \beta G(\varphi_{xx} + \varphi_{zz}) = 0.$$

Решение задачи с удовлетворением условий прилипания на границах сосуда весьма сложно и может рассматриваться как обобщение [8, 10]. Рассмотрим бесконечный сосуд. После разделения переменных

$$\varphi = R(t)\,e^{i(k_1x+k_2y+k_3z)}$$

получаем уравнение

$$\ddot{R} + \lambda\dot{R} + B(N^2 + \beta\ddot{Y})R = 0, \tag{2.1}$$

являющееся обобщением (1.6). Это уравнение представляет собой уравнение Хилла (или Матье при $Y = C\cos\omega t$) с трением. Вид коэффициента трения необычен:

$$\lambda = \nu(k^2 - \beta^2/4 - ik_2\beta).$$

Например, при $N^2 + \beta\ddot{Y} = 0$ из (2.1) для различных k можно получить как затухание, так и рост. Такое поведение $R(t)$ связано с неограниченностью при любом фиксированном t выбранных решений (1.1). В приближении Буссинеска (см. ниже) решения ограничены и $\lambda = \nu k^2$, что всегда соответствует затуханию.

3. Непосредственным обобщением рассмотренной задачи является задача о вертикальных колебаниях горизонтального плоскопараллельного потока идеальной несжимаемой стратифицированной жидкости. Поток направлен по оси x, величина скорости $U = U(y)$. Сохраняя обозначения п. 1, получаем систему уравнений на линейные возмущения:

$$\rho_0(Lu + U'v) = -p_x,\ \rho_0Lv = -p_y - \rho G,\ \rho_0Lw = -p_z, \tag{3.1}$$

$$L\rho + \rho_0'v = 0,\quad u_x + v_y + w_z = 0,$$

где $L \equiv \partial/\partial t + U\partial/\partial x$. Из (3.1) следует $(\Delta + \beta\partial/\partial y)L^2\rho + \beta G(\rho_{xx} + \rho_{zz}) - 2(U'L\rho_x)_y = 0$. Исследование устойчивости решений этого уравнения крайне сложно. Однако для возмущений, не зависящих от координаты x, опять получается уравнение типа (1.3):

$$(\partial^2/\partial z^2 + \partial^2/\partial y^2 + \beta\partial/\partial y)\rho_{tt} + \beta G\rho_{zz} = 0,$$

которое решается заменой $\rho = \varphi e^{-\beta y/2}$ с последующим разделением переменных. Получающиеся результаты такие же, как в п. 1, 2, с той лишь разницей, что $k_1 = 0$.

4. В предыдущих примерах показано, что колебания объема стратифицированной жидкости как целого могут приводить к неустойчивости по механизму параметрического резонанса. Естественно ожидать, что сходными свойствами обладают и нетвердотельные (дифференциальные) колебания среды и, в частности, внутренние волны (см. введение). Главные трудности в исследовании устойчивости внутренних движений в стратифицированной жидкости заключаются в сложности исходных уравнений и в отсутствии достаточно простых их частных решений. Выход состоит в переходе к приближениям либо в решениях, либо непосредственно в уравнениях. Под приближением в решениях понимается, что основное исследуемое на устойчивость волновое движение задается приближенно (например, в виде конечного числа членов ряда по амплитуде). Математически эта операция имеет смысл замены коэффициентов в исследуемых на устойчивость уравнениях их приближенными (аналитически более простыми) значениями. Примерами упрощения непосредственно уравнений движения являются приближение Буссинеска [17] или приближение β-плоскости [11, 13, 24]. Вопрос о математической корректности такого рода рассмотрений чрезвычайно сложен. В то же время научное и практическое значение проблемы служит оправданием деятельности на «физическом уровне строгости». Ниже излагаются два примера при-

ближений в решениях и в уравнениях для задачи устойчивости внутренних волн.

Дана идеальная несжимаемая стратифицированная жидкость, заполняющая все пространство. Однородное поле тяжести $-g$ направлено по оси y. Невозмущенная плотность жидкости $\rho_0 = Ae^{-\beta y}$, частота плавучести $N^2 = \beta g = \mathrm{const}$ (обозначения те же, что в п. 1). Рассмотрим задачу об устойчивости внутренней волны частного вида, причем в ее задании ограничимся линейными по амплитуде выражениями. Вид такой волны задается представлением

$$u = 0,\ v = Y_t(x,\ t) = \partial Y/\partial t,$$

где u и v — x и y-составляющие скорости.

Функция $Y(x,\ t)$ представляет собой бегущую или стоячую волну вида $\cos(kx - Nt)$ либо $\cos kx \cos Nt$ и т. п. Частота волны совпадает с частотой плавучести N. По аналогии с п. 1 совершаем преобразование координат

$$\bar{x} = x,\ \bar{y} = y - Y(x,\ t),\ \bar{z} = z,\ \bar{t} = t,$$

которое соответствует переходу к координатам, «колеблющимся» вместе с жидкостью. Так, плотность во внутренней волне не зависит от времени $\rho = \rho_0(\bar{y})$. Для вертикальной составляющей v вводим $\bar{v} = v - Y_t$, так что основное состояние есть покой $u = 0$, $\bar{v} = 0$. Линеаризованная система уравнений, являющаяся аналогом (1.1), имеет вид

$$\begin{gathered}\rho_0 u_t = -p_x + Y_x p_y,\ \rho_0 w_t = -p_z,\\ \rho_0(v_t + Y_{xt}u) = -p_y - \rho(g + Y_{tt}),\\ \rho_t + \rho_0'(v - Y_x u) = 0,\quad u_x - Y_x u_y + v_y + w_z = 0.\end{gathered} \tag{4.1}$$

Черта над обозначениями опущена. Рассмотрим возмущение частного вида:

$$v = v(x,\ t),\ r = r(x,\ t),\ u = w = p = 0.$$

Для $r = \rho/\rho_0$ имеем

$$r_{tt} + (N^2 + Y_{tt})r = 0. \tag{4.2}$$

Это уравнение является аналогом (1.6). При $Y = \Phi(x) \cos Nt$ (4.2) сводится к уравнению Матье, в котором x играет роль параметра. Поскольку вынуждающая частота равна основной, имеет место второй резонанс [3, 20] и волна неустойчива даже для малых амплитуд Φ. Для бегущей волны $Y = C \cos(kx - Nt)$ и (4.2) также сводится к Матье, но только в точках $\sin kx = 0$. Отсюда следует неустойчивость и в этом случае. Отметим еще, что в систему (4.1) члены с Y входят различным образом. Производные $Y_x \sim C/\lambda$, где C — амплитуда, λ — длина волны. Если считать это отношение малым и пренебречь им, то (4.1) сводится к (1.1) с той лишь разницей, что величина Y_{tt} зависит от координаты x. Для коротковолновых по x возмущений эта система уравнений в первом приближении совпадает с (1.1).

Рассмотрим теперь подход через приближения в уравнениях. Известным упрощением уравнений движения стратифицированной жидкости является приближение Буссинеска [17]:

$$d\mathbf{u}/dt = -\nabla p/\bar{\rho} - \theta \mathbf{g},\ d\theta/dt - \beta v = 0,\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \tag{4.3}$$

где $\mathbf{u}$ — вектор скорости; $\theta \equiv (\rho - \bar{\rho})/\bar{\rho}$; ρ — полная плотность, мало отличающаяся от $\bar{\rho} = \mathrm{const}$; $\beta = \beta(y) \equiv -\rho_0'(y)/\bar{\rho}$. При $\beta > 0$ система

(4.3) имеет точные решения — плоские волны:

(4.4) $$(u,\ v,\ \theta,\ p) = (-l/k,\ 1,\ i\beta/\omega,\ -\omega l/k^2)Ce^{i\psi},$$

где $\omega = \pm kN/\sqrt{k^2 + l^2}$; $C = \mathrm{const}$; $\psi = kx + ly - \omega t$.

В [16] показано, что эти решения могут быть неустойчивыми. В то же время оказывается, что часть отброшенных при получении (4.3) членов уравнений движения также может давать параметрическую неустойчивость. Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что в задаче о колеблющемся сосуде (см. п. 1) использование уравнений (4.3) вообще не приводит к неустойчивости. Ясно, что такой подход некорректен: малые отброшенные члены уравнений дают эффект, накапливающийся резонансным образом. Для удержания в уравнениях неустойчивости, обсуждавшейся в н. 1, в первое уравнение (4.3) необходимо вернуть отброшенный ранее член $\theta d\mathbf{u}/dt$. Эта операция эквивалентна переходу к приближению Буссинеска в системе координат, связанной с сосудом. После этого из (4.3) следует линеаризованная система уравнений задачи устойчивости:

(4.4) $$v_t = -p_y/\bar{\rho} - \theta(g + \ddot{Y}),\quad u_t = -p_x/\bar{\rho},\quad w_t = -p_z/\bar{\rho},\quad \theta_t - \beta v = 0,$$
$$u_x + v_y + w_z = 0.$$

Сравнение с системой (1.1) показывает, что (4.4) является ее упрощенным вариантом. Из (4.4) следует

(4.5) $$\Delta\alpha_{tt} + \beta G(\alpha_{xx} + \alpha_{zz}) = 0,$$

где $\alpha \equiv \theta/\beta$; $G \equiv g + \ddot{Y}$. Далее задача решается разделением переменных (см. п. 1). При $\beta = \mathrm{const}$ уравнение (4.5) является упрощением (1.4). Учет вязкости приводит, как уже упоминалось выше, к появлению в (4.5) диссипативного члена в наиболее простой форме

$$\Delta(\alpha_{tt} - \nu\Delta\alpha_t) + \beta G(\alpha_{xx} + \alpha_{zz}) = 0.$$

Точно так же учет упомянутого выше члена уравнений приводит к появлению дополнительной (по сравнению с [16]) неустойчивости решений (4.4). Запишем уравнения движения в системе координат с осью x, направленной вдоль волнового вектора $\mathbf{k}$, и осью y — вдоль вектора скорости в волне. Поля скорости и плотности (4.4) принимают вид

$$(U,\ V,\ \Theta) = (0,\ 1,\ i\beta/\omega)Ce^{i(\varkappa x - \omega t)},$$

где $\omega = N\cos\varphi$; φ — угол между осью x и горизонтальной плоскостью; $\varkappa^2 \equiv k^2 + l^2$. Линеаризованная система уравнений задачи на устойчивость имеет вид

(4.6) $$Lu = -p_x - g\theta\sin\varphi,\quad Lv + V_x u = -p_y - \theta(g\cos\varphi + V_t),$$
$$Lw = -p_z,\quad u_x + v_y + w_z = 0,\quad L\theta + \Theta_x u - \beta v = 0,$$

где $L \equiv \partial/\partial t + V\partial/\partial y$. Рассмотрим возмущения частного вида:

$$v = v(x,\ t),\ \theta = \theta(x,\ t),\ p = p(x,\ t),\ u = w = 0.$$

Из (4.6) следует

$$\theta_{tt} + (N^2\cos^2\varphi + \beta V_t\cos\varphi)\theta = 0.$$

Поскольку частота изменения V равна $\omega = N\cos\varphi$, для $V = C\cos(\varkappa x - \omega t)$ имеет место второй резонанс. Подчеркнем, что результаты этого пункта имеют иллюстративный характер и не являются доказательствами.

В заключение отметим следующее. Задача исследования устойчивости по линейному приближению равновесия идеальной стратифицированной жидкости в вертикально колеблющемся сосуде сводится к решению уравнения Матье (1.7). Для равновесного плотностного расслоения возможна неустойчивость типа параметрического резонанса. Стабилизация колебаниями неравновесной стратификации возможна только для части спектра.

В горизонтальном плоскопараллельном потоке стратифицированной жидкости, подверженном вертикальным колебаниям, существуют возмущения частного вида, для которых справедливы те же результаты, что и для колеблющегося сосуда.

Приближенное исследование на устойчивость внутренних волн в безграничной стратифицированной жидкости показывает, что для них имеет место неустойчивость по механизму параметрического резонанса, близкая по типу к неустойчивости в колеблющемся сосуде.

В качестве развития общих представлений о механизмах неустойчивости в стратифицированной жидкости сформулируем следующее. Если колебания жидкости таковы, что массовая скорость имеет нормальную составляющую к поверхностям постоянной плотности, то возможен экспоненциальный рост линейных возмущений по механизму параметрического резонанса.

Поступила 6 III 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шмидт Г.** Параметрические колебания. М.: Мир, 1978.
2. **Faraday M.** On a peculiar class of acoustical figures, and on certain forms assumed by a group of particles upon vibrating elastic surfaces.— Phil. Trans. Roy. Soc., 1831, vol. 121, p. 299.
3. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Механика. М.: Наука, 1965.
4. **Якубович В. А., Старжинский В. М.** Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.
5. **Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.** Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965.
6. **Сретенский Л. Н.** Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
7. **Benjamin T. B., Ursell F.** The stability of the plane free surface of a liquid in vertical motion.— Proc. Roy. Soc., 1954, vol. 225, p. 505.
8. **Крушинская С. И.** Колебания тяжелой вязкой жидкости в подвижном сосуде.— ЖВММФ, 1965, т. 5, № 3.
9. **Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.** Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
10. **Маркман Г. С., Уринцев А. Л.** О параметрическом возбуждении конвективного движения в жидкости, подогреваемой сверху.— Изв. Сев.-Кавк. науч. центра высш. школы. Естеств. науки, 1977, № 1.
11. **Lorenz E. N.** Barotropic instability of Rossby wave motion.— J. Atmos. Sci., 1972, vol. 29, p. 258.
12. **Lilly D. K.** A note on barotropic instability and predictability.— J. Atmos. Sci., 1973, vol. 30, N 1.
13. **Mied R. P.** The instabilities of finite-amplitude barotropic Rossby waves.— J. Fluid Mech, 1978, vol. 86, N 2.
14. **Должанский Ф. В., Курганский М. В., Черноусько Ю. Л.** Лабораторное и теоретическое исследование баротропных волн Россби во вращающемся кольцевом канале.— Изв. АН СССР. ФАО, 1979, т. 15, № 6.
15. **McEwan A. D., Robinson R. M.** Parametric instability of internal gravity waves.— J. Fluid Mech., 1975, vol. 67, N 4.
16. **Mied R. P.** The occurence of parametric instability of internal gravity waves.— J. Fluid Mech., 1976, vol. 78, N 4.
17. **Филлипс О. М.** Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1980.
18. **Orlanski I.** On the breaking of standing internal gravity waves.— J. Fluid Mech., 1972, vol. 54, N 3.
19. **Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Н.** Курс современного анализа. Т. 1. М.: ФМЛ, 1963.
20. **Абрамовиц М., Стиган И.** Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
21. **Капица П. Л.** Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса.— ЖЭТФ, 1951, т. 21, № 5.
22. **Бриксман В. А.** Параметрическая стабилизация границы раздела жидкостей.— ДАН СССР, 1976, т. 226, № 5.
23. **Зеньковская С. М., Симоненко И. Б.** О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 5.
24. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.