

**НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ
В КАНАЛЕ МГД ГЕНЕРАТОРА ПРИ ПОСТОЯННОМ РАСХОДЕ
С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ БОКОВЫХ СТЕНОК**

А. Г. Рябинин, А. И. Хожанов

(Ленинград)

При теоретических исследованиях нестационарных течений вязкой несжимаемой проводящей жидкости в магнитогидродинамических каналах, как правило, расстояние между боковыми стенками принимается равным бесконечности. Это допущение позволяет упростить систему исходных уравнений и при малых магнитных числах Рейнольдса свести ее к одному уравнению для скорости [1-3].

В реальных условиях отношение сторон в прямоугольном канале конечно. Поэтому представляется целесообразным установить влияние боковых стенок на процесс нестационарного течения жидкости.

Рассмотрим нестационарное течение вязкой несжимаемой проводящей жидкости в плоском канале МГД генератора конечной ширины при постоянном расходе и произвольном коэффициенте нагрузки. Магнитное число Рейнольдса считается малым ($R_m \ll 1$).

Эта задача соответствует случаю включения магнитного поля и регулирования мощности МГД генератора путем изменения магнитной индукции.

Предполагается, что устройство, движущее жидкость, обладает жесткой характеристикой $Q = f(p)$, позволяющей при изменении давления p сохранять неизменным расход жидкости Q .

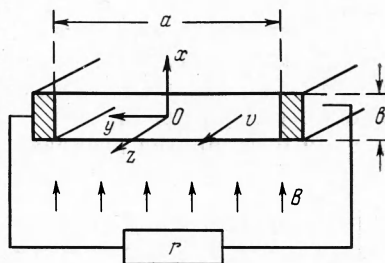
Уравнения магнитной гидродинамики в рассматриваемом случае могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \rho \partial \mathbf{v} / \partial t + \rho (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= - \nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + [\mathbf{j} \times \mathbf{B}], \quad \mathbf{j} = \sigma \{ \mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \} \\ \text{rot } \mathbf{E} &= - \partial \mathbf{B} / \partial t, \quad \mathbf{j} = \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{B}, \quad \text{div } \mathbf{B} = \text{div } \mathbf{v} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь \mathbf{v} — скорость течения жидкости; \mathbf{B} и \mathbf{E} — магнитная индукция и напряженность электрического поля; \mathbf{j} — плотность электрического тока; ρ , η , σ и μ — плотность, динамическая вязкость, проводимость и магнитная проницаемость жидкости.

Рассмотрим нестационарное течение проводящей жидкости в длинном канале прямоугольного сечения, две стороны которого $x = \pm 1/2 b$ — непроводящие полюсы магнита, а две другие — $y = \pm 1/2 a$ — проводящие электроды, замкнутые на сопротивление нагрузки r (фигура). При этом $a \gg b$, но размер a конечен; уравнения (1) сводятся к системе

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right) - j_y B_x, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = - \frac{\partial B_z}{\partial t} \\ j_x &= \sigma E_x, \quad j_y = - \mu^{-1} \partial B_z / \partial x = \sigma (E_y + v_z B_x) \end{aligned} \quad (2)$$



При $a \gg b$ можно положить $\partial E_y / \partial x \gg \partial E_x / \partial y$. Кроме того, оценка оставшихся членов второго уравнения системы (2) по порядку величин показывает, что

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} \sim \frac{\partial B_z}{\partial t} \sim R_m \frac{B_x}{T}, \quad \left| \frac{\partial E_y}{\partial x} b \right| : |v_z B_x| \approx R_m \frac{b}{UT}$$

$$R_m = \mu \sigma U R_h, \quad R_h = ab / (a + b)$$

Здесь R_m — магнитное число Рейнольдса, R_h — гидравлический радиус канала, U и T — средняя скорость течения жидкости и характерное время. При $b / UT \ll 1$ можно положить, что E_y не зависит от x и является функцией только времени.

Отметим, что при решении стационарных задач и $a \gg b$ допускается также приближение $E_y = \text{const}$, что согласуется с экспериментом [4].

С учетом сделанных допущений система уравнений (2) с использованием закона Ома для внешней цепи приводится к одному уравнению для скорости ¹

$$\frac{\partial v}{\partial t} = P(t) + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + k \frac{M^2 v}{R_h^2} U - \frac{M^2 v}{R_h^2} v \quad (3)$$

$$P(t) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}, \quad U = \frac{Q}{ab} = \frac{1}{ab} \int_{-1/2b}^{1/2b} \int_{-1/2a}^{1/2a} v \, dx \, dy = \text{const}, \quad v = \frac{\eta}{\rho}$$

$$M = R_h B_x \sqrt{\sigma / \eta}, \quad k = r(r + r_1)^{-1}, \quad r_1 = a / \sigma b l$$

Здесь M — число Гартмана, k — коэффициент нагрузки, r_1 — внутреннее сопротивление генератора длиной l .

В рассматриваемом случае градиент давления — функция времени, но однозначно связан с изменением скорости. Эта связь легко устанавливается путем интегрирования (3) по сечению канала с использованием условия постоянства расхода

$$P(t) = -\frac{v}{ab} \int_{-1/2b}^{1/2b} \int_{-1/2a}^{1/2a} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) dx \, dy - \frac{M^2 v^2}{R_h^2} U (k - 1) \quad (4)$$

С учетом (4) уравнение (3) приводится к следующему интегро-дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{v}{ab} \int_{-1/2b}^{1/2b} \int_{-1/2a}^{1/2a} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) dx \, dy + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{M^2 v}{R_h^2} (U - v) \quad (5)$$

Граничными условиями для уравнения (5) будут

$$v|_{x=\pm 1/2b} = v|_{y=\pm 1/2a} = 0 \quad (6)$$

Начальные условия зададим в виде

$$v = v_0(x, y, 0), \quad M = M_0, \quad P = P_0 \quad \text{при } t = 0 \quad (7)$$

В начальный момент времени мгновенно изменяются магнитное поле и электромагнитные потери давления, что физически оправдывается кратковременностью электромагнитных переходных процессов по сравнению с переходными магнитогидродинамическими процессами

$$v = v(x, y, t), \quad M = M, \quad P = P_1 + P_2(t) \quad \text{при } t \geq 0$$

¹ Здесь и в дальнейшем индексы при скорости опускаются.

Решение уравнения (5) будем искать в виде

$$v(x, y, t) = F(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \psi_n(x, y) \quad (8)$$

где функция $F(x, y)$ соответствует установившемуся режиму течения. Подставляя (8) в (5), получим три дифференциальных уравнения, решения которых известны [4]

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{M^2}{R_h^2} F + \frac{M^2}{R_h^2} U - \frac{1}{ab} \int_{-1/2b}^{1/2b} \int_{-1/2a}^{1/2a} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) dx dy = 0$$

$$\frac{d\varphi_n}{dt} + \alpha_n^2 \varphi_n = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2} - \beta_n \psi_n - \frac{1}{ab} \int_{-1/2b}^{1/2b} \int_{-1/2a}^{1/2a} \left(\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2} \right) dx dy = 0$$

Коэффициенты α_n и β_n связаны между собой соотношением

$$\alpha_n^2 = M^2 v / R_h^2 - v \beta_n$$

Решения для искомых функций записываются следующим образом:

$$F(x, y) = 4D_F \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{\lambda_m N_m^2} \left(1 - \frac{\text{ch } N_m x}{\text{ch } N_m 1/2b} \right) \cos \frac{\lambda_m y}{a} \quad (9)$$

$$\varphi_n(t) = A \exp(-\alpha_n^2 t) \quad (10)$$

$$\psi_n(x, y) = 4D_\psi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{\lambda_m W_{mn}^2} \left(1 - \frac{\text{ch } W_{mn} x}{\text{ch } W_{mn} 1/2b} \right) \cos \frac{\lambda_m y}{a} \quad (11)$$

$$D_F = \frac{M^2}{R_h^2} U - \frac{1}{ab} \int_{-1/2b}^{1/2b} \int_{-1/2a}^{1/2a} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) dx dy$$

$$D_\psi = \frac{-1}{ab} \int_{-1/2b}^{1/2b} \int_{-1/2a}^{1/2a} \left(\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2} \right) dx dy$$

$$N_m^2 = M^2 / R_h^2 + \lambda_m^2 / a^2, \quad W_{mn}^2 = \beta_n + \lambda_m^2 / a^2, \quad \lambda_m = \pi(2m - 1)$$

Из (9) и (11) с учетом условия постоянства расхода следует

$$1/2 b W_{mn} = \text{th } W_{mn} 1/2 b \quad \text{или} \quad 1/2 b |W_{mn}| = \text{tg } |W_{mn}| 1/2 b$$

так как $W_{mn}^2 \leq 0$.

Взяв оператор Лапласа от (9) и проинтегрировав полученный результат по сечению канала, получим следующее выражение для постоянной D_F :

$$D_F = \frac{M^2 v U}{R_h^2} \left\{ 1 - 8 \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\lambda_m^2} - \frac{1}{a^2 N_m^2} \right) \frac{\text{th } N_m 1/2 b}{N_m 1/2 b} + \frac{1}{N_m^2 a^2} \right] \right\}^{-1}$$

Коэффициенты ряда D_ψ определяются при $t = 0$ из условия

$$\begin{aligned} v_0(x, y) &= F_0(x, y) = \\ &= F(x, y) - 4 \sum_{n=1}^{\infty} D_{1\psi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \cos(\lambda_m y / a)}{\lambda_m |W_{mn}|} \left[1 - \frac{\cos |W_{mn}| x}{\cos |W_{mn}| 1/2 b} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

$$F_0(x, y) = 4D_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \cos(\lambda_m y/a)}{\lambda_m N_{0m}^2} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} N_{0m} x}{\operatorname{ch} N_{0m}^{1/2} b} \right]$$

$$D_0 = \frac{M_0^2}{R_h^2} U - \frac{\Pi}{ab} \int_{-1/2b}^{1/2b} \int_{1/2a}^{1/2a} \left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2} \right) dx dy$$

$$N_{0m}^2 = \frac{M_0^2}{R_h^2} + \frac{\lambda_m^2}{a^2}, \quad D_{1\psi} = AD_{\psi}$$

Из (12) следует

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{\lambda_m} \cos \frac{\lambda_m y}{a} \left\{ \frac{D_0}{N_{0m}^2} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} N_{0m} x}{\operatorname{ch} N_{0m}^{1/2} b} \right] - \frac{D_F}{N_m^2} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} N_m x}{\operatorname{ch} N_m^{1/2} b} \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_{1\psi}}{|W_{mn}|^2} \left[1 - \frac{\cos |W_{mn}| x}{\cos |W_{mn}|^{1/2} b} \right] \right\} = 0$$

Отсюда

$$\frac{D_0}{N_{0m}^2} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} N_{0m} x}{\operatorname{ch} N_{0m}^{1/2} b} \right] - \frac{D_F}{N_m^2} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} N_m x}{\operatorname{ch} N_m^{1/2} b} \right] =$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_{1\psi}}{|W_{mn}|^2} \left[1 - \frac{\cos |W_{mn}| x}{\cos |W_{mn}|^{1/2} b} \right]$$

Используя свойства ортогональности системы функций $\varphi_{mn} = 1 - \cos |W_{mn}| x / \cos |W_{mn}|^{1/2} b$ в интервале $\pm 1/2 b$, находим

$$D_{1\psi} = \frac{D_F}{(1/2 b N_m)^3} \frac{N_m b |W_{mn}|^2 - 2 |W_{mn}|^2 \operatorname{th} N_m^{1/2} b}{N_m^2 + |W_{mn}|^2} -$$

$$- \frac{D_0}{(1/2 b N_{0m})^3} \frac{N_{0m} b |W_{mn}|^2 - 2 |W_{mn}|^2 \operatorname{th} N_{0m}^{1/2} b}{N_{0m}^2 + |W_{mn}|^2}$$

В соответствии с полученным решением по (4) можно рассчитать изменение потерь давления в канале МГД генератора при включении магнитного поля ($M_0 = 0$) и регулировании мощности путем изменения магнитной индукции.

При $t \rightarrow \infty$ данное решение совпадает с приведенным в [4], полученным для стационарного режима течения жидкости в аналогичном канале.

При $M \rightarrow 0$ оно переходит в известное решение для обычной гидродинамики.

Поступила 10 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Carstou M. J. Sur le mouvement lent d'un fluide visqueux conducteur entre deux plans paralleles, C. R. Acad. Sci., Paris, 1959, vol. 249, No. 14.
2. Crausse E., Causse R., Poirier J. Muse en vitesse entre paralleles in de finis d'un liquide electroconducteur soumis a un champ magnetique transversal, C. R. Acad. Sci., 1962, vol. 254, No. 2.
3. Crausse E., Poirier J., Vives C. Etude theorique du mouvement oscillatoire libre entre deux plans verticaux paralleles et in de finis d'une colonne de liquide pesant, visqueux et electroconducteur en presence d'un champ magnetique, C. R. Acad. Sci., 1963, vol. 256, No. 4.
4. Рябинин А. Г., Хожайнов А. И. Установившееся ламинарное течение электропроводящей жидкости в прямоугольной трубе под действием ponderomotorных сил. Ж. техн. физ., 1962, т. 32, № 1.