

УДК 551.34

Теплоперенос и фазовые переходы воды в многослойных системах поверхности криолитозоны

И.Л. Хабибуллин, Г.А. Нигаметьянова, Ф.Ф. Назмутдинов

Башкирский государственный университет, Уфа

E-mail: habibi.bsu@mail.ru, gyzelua@mail.ru

Предложена математическая модель расчета распределения температуры и динамики фазовых переходов воды в многослойных системах на поверхности криолитозоны. Модель позволяет проводить расчеты в годовом цикле с учетом распределения температуры на поверхности в теплый и холодный периоды года. Рассматривается система, состоящая из четырех слоев: снежный покров или почвенно-растительный покров, верхний слой грунта, слой теплоизоляционного материала, минеральный грунт. Расчеты по модели позволяют выбрать оптимальные толщины и составы слоев, обеспечивающих устойчивость сооружений на поверхности криолитозоны.

Ключевые слова: криолитозона, мерзлота, почвенно-растительный покров, теплоизоляционный слой, теплоперенос, распределение температуры, промерзание грунта, протаивание грунта.

Введение

Криолитозона — зона распространения многолетнемерзлых пород — в настоящее время становится объектом широкомасштабного освоения. Активное освоение этого региона сопровождается интенсивным техногенным воздействием на природную среду. При этом значительными по своим масштабам являются деструктивные геокриологические процессы (термоэрозия, термокарст и т.д.) на поверхностном слое криолитозоны, обусловленные изменением теплового режима этого слоя. Поэтому при освоении северных территорий важными являются задачи разработки методик прогноза изменения теплового режима многолетнемерзлых пород при нарушении естественных условий их существования, а также управления мерзлотными процессами на стадиях строительства и эксплуатации технологических объектов [1–3].

В связи с вышеизложенным становится актуальным моделирование и исследование основных закономерностей процессов теплопереноса в многослойных системах поверхности криолитозоны. При этом особый интерес представляет исследование динамики поверхностного сезонно-талого слоя (СТС) мерзлого грунта, подвергающегося протаиванию и промерзанию в течение годового цикла. Мерзлотный режим многолетнемерзлых грунтов можно регулировать путем использования теплоизолирующих покрытий [4, 5]. Толщина и материал теплоизолирующих конструктивных слоев должны определяться с учетом выполнения условия: за весь период функционирования сооружений их несущая основа должна оставаться в твердомерзлом состоянии. На стадии проектирования

необходимо определить оптимальные толщины и материалы теплоизолирующих конструктивных слоев (торф, торфо-песчаная смесь, полимерные материалы), исключающие образование талого слоя ниже нормативного уровня. Это требует проведения теплофизических расчетов для многослойных систем с учетом конструкции слоев и условий теплообмена на дневной поверхности.

Промерзание (оттаивание) мерзлых грунтов представляет собой сложный процесс, сопровождающийся в общем случае тепло- и массопереносом и появлением полей механических напряжений. Возникающие при этом миграция влаги и механические напряжения приводят к деформациям грунтовых массивов, которые проявляются в виде их осадков (при протаивании) и пучений (при замерзании). Моделирование таких процессов достаточно подробно описывалось в литературе [6–8]. В настоящей работе рассматриваются процессы промерзания-оттаивания грунтов при создании искусственных многослойных покрытий на поверхности криолитозоны. При этом влияние миграции влаги и механических напряжений практически не проявляется.

1. Постановка задачи о протаивании и промерзании многослойных грунтовых систем

Рассматривается массив, состоящий из 4-х слоев (рис. 1): снежный покров в зимний период или почвенно-растительный покров (ПРП) в теплый период (слой 0), верхний слой грунта (слой 1), теплоизоляционный слой (слой 2) и минеральный грунт (слой 3). Наличие слоев 0–2 позволяет моделировать влияние на теплофизическое состояние толщи многолетнемерзлых пород различных техногенных воздействий: очистки или накопления снега на поверхности, уничтожения или создание ПРП, сооружения насыпей или выемок, укладки искусственных тепло- и гидроизоляционных слоев и др.

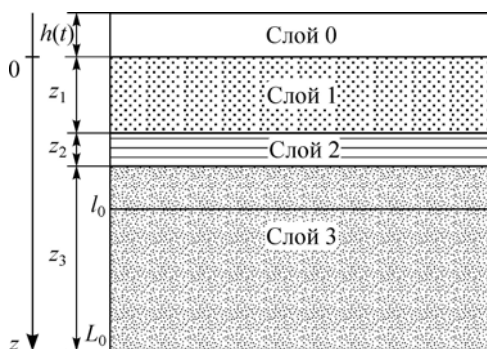
Вычислим распределение температуры по глубине $T(z, t)$ и положение фронтов промерзания-протаивания грунта в любой момент времени в течении годового цикла. Распределение температуры в слоях находится из уравнений теплопроводности [9]

$$\lambda_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} = (\rho c)_i \frac{\partial T_i}{\partial t}. \quad (1)$$

Здесь учтено, что конвективный перенос тепла в талой зоне за счет миграции влаги, обусловленной разностью плотностей воды и льда, является пренебрежимо малым. Параметр Пекле при этом составляет

$$Pe = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{c_1 \Delta T}{L} \sim 10^{-3}.$$

Годовой цикл подразделяется на два периода: интервал $(0, t_1)$ — холодный период со среднесуточной температурой ниже нуля, интервал (t_1, t_2) — теплый период со среднесуточной температурой выше нуля; интервал $(0, t_2) = 1$ год. Начало отчета времени совпадает с началом холодного периода. Задается глубина СТС l_0 и начальное распределение температуры в области $0 < z < L_0$, где L_0 — глубина распространения годовых колебаний температуры. В зависимости от предыстории поверхность l_0 может находиться в слоях 1 или 3.



Задается глубина СТС l_0 и начальное распределение температуры в области $0 < z < L_0$, где L_0 — глубина распространения годовых колебаний температуры. В зависимости от предыстории поверхность l_0 может находиться в слоях 1 или 3.

Рис. 1. Схема к расчету температурных полей.

Зависимость высоты снежного покрова от времени в естественных условиях можно определить по эмпирической зависимости [9, 10]

$$h_{\text{CH}}(t) = \frac{h_{\text{max}}}{\sqrt{t_1'}} \sqrt{t}, \quad 0 < t < t_1', \quad h_{\text{CH}}(t) = h_{\text{max}} \left(\frac{t_1 - t}{t_1 - t_1'} \right), \quad t_1' < t < t_1. \quad (2)$$

где h_{max} — максимальная высота снежного покрова за период снегонакопления $(0, t_1')$, (t_1', t_1) — период схода снега. При наличии техногенного воздействия (очистка снега или, наоборот, создание искусственного снежного покрова) это условие изменяется.

Граничные условия на дневной поверхности различаются в холодный и теплый периоды года. В холодный период года на поверхности снежного покрова задается граничное условие первого рода

$$T_0(h_{\text{CH}}(t), t) = T_B(t), \quad 0 < t < t_1, \quad (3)$$

здесь $T_B(t)$ — температура воздуха. В теплый период года граничные условия на поверхности, разделяющей слой 1 и атмосферу, необходимо задавать на основе уравнения радиационно-теплого баланса земной поверхности. При этом для температуры возможна формулировка граничных условий 1-го или 3-го родов, которые соответственно определяют температуру поверхности или тепловой поток через нее [11, 12]:

$$T(0, t) = T_B(t) + \frac{R - LE}{\alpha}, \quad t_1 < t < t_2. \quad (4)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(0, t)}{\partial x} = \alpha [T_B(t) - T_1(0, t)] + R - LE, \quad t_1 < t < t_2, \quad (5)$$

здесь R — радиационный баланс, LE — затраты тепла на испарение, α — коэффициент конвективного теплообмена в приземном слое атмосферы. Величины $T_B(t)$, LE , R и α определяются по данным гидрометеостанций или по эмпирическим формулам [13, 14].

На неподвижных границах слоев $z = 0$, $z = z_1$, $z = z_1 + z_2$ задаются условия непрерывности тепловых потоков и температуры:

$$\lambda_0 \frac{\partial T_0}{\partial z} \Big|_0 = \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_0, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z_1} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} \Big|_{z_1}, \quad \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} \Big|_{z_1+z_2} = \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial z} \Big|_{z_1+z_2}, \quad (6)$$

$$T_0(0, t) = T_1(0, t), \quad T_1(z_1, t) = T_2(z_1, t), \quad T_2(z_1 + z_2, t) = T_3(z_1 + z_2, t). \quad (7)$$

На поверхности L_0 задается граничное условие первого рода

$$T_3(L_0, t) = T_0. \quad (8)$$

На границах фазовых переходов мерзлый грунт–талый грунт, талый грунт–мерзлый грунт $(l_i(t))$ выполняются условия теплового баланса и задается температура фазового перехода (T_Φ) вода \leftrightarrow лед [11]:

$$-\lambda_i \frac{\partial T_i(l_i(t), t)}{\partial z} + \lambda_j \frac{\partial T_j(l_i(t), t)}{\partial z} = Q \frac{dl_i(t)}{dt}, \quad Q = \rho LG \quad \text{или} \quad Q = \rho LW, \quad (9)$$

$$T_i(l_i(t), t) = T_j(l_i(t), t) = T_\Phi, \quad (10)$$

здесь ρL — объемная теплота фазового перехода вода \leftrightarrow лед, G — льдистость грунта, W — влажность грунта.

Явное выделение в модели фронтов фазовых переходов мерзлый грунт \leftrightarrow талый грунт позволяет реализовать следующую временную схематизацию процесса. В холодный

период года происходит промерзание сверху и снизу сезонно-талого слоя, образованного за теплый период года. При этом в зависимости от исходных параметров возможны два случая: полное промерзание сезонно-талого слоя; неполное промерзание и наличие талика в конце холодного периода (несливающаяся мерзлота). В течение теплого периода года происходит протаивание мерзлого грунта сверху и к концу этого периода образуется сезонно-талый слой определенной толщины. При наличии талика образуется три фронта фазового перехода в результате протаивания сверху (от дневной поверхности) верхнележащего слоя мерзлого грунта. Границы талика изменяют свое положение в зависимости от соотношения потоков тепла сверху и снизу. Непрерывное сопряжение моделей для холодного и теплого периодов обеспечивается тем, что распределения температуры и фазового состояния грунта, полученные в конце одного периода, являются начальными условиями для другого периода. Это же обстоятельство позволяет использовать модель для непрерывного расчета в течение нескольких лет или, наоборот, расщеплять модель на две самостоятельные части: промерзание в холодный период, протаивание в теплый период.

2. Алгоритм и исходные данные для расчетов

Вычисления проводятся по следующему алгоритму:

- задаются время начала расчетов (обычно это начало холодного периода) и продолжительность расчетного периода (например, 1 год);
- задаются начальное распределение температуры в слоях и исходные параметры; определяется, в каком слое находится нулевая изотерма температуры;
- выполняется расчет высоты снежного покрова или радиационно-теплого баланса;
- решается уравнение теплопроводности последовательно в слоях 0–3 (в слое 0 оно решается, если в данный момент времени этот слой существует);
- положения границ раздела мерзлый грунт–талый грунт определяются по условию Стефана;
- время изменяется на величину шага, и вычисление переходит на пункт 3.

При расчетах использовалась разностная схема с фиксированным шагом по времени и с дробными пространственными шагами для определения положения границ раздела фаз. Рассматриваемая схема пригодна для любого числа немонокотонно движущихся фронтов. Вблизи границы применяется неявная четырехточечная схема [15]. Расчет распределения температуры в слоях осуществляется с использованием метода прогонки. При этом на каждом временном слое производится итерация по температуре. Для расчетов по предложенному алгоритму создана программа на языке Delphi.

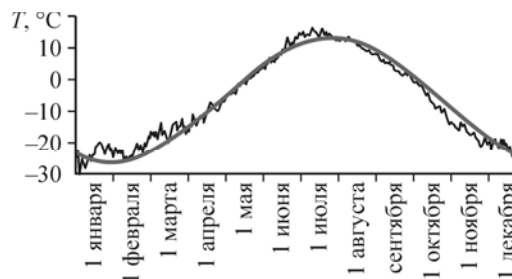
Вычисления проводились при следующих базовых значениях теплофизических параметров для почвенно-растительного покрова и грунтов криолитозоны: $\lambda_1 = 0,41$ Вт/(м·К), $\lambda_2 = 2,32$ Вт/(м·К), $a_1 = 0,15 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $a_2 = 0,33 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\rho_l = 900$ кг/м³, $L = 3,32 \cdot 10^5$ Дж/кг, $T_{\Phi} = 0$ °С, $G = 0,2$, $\lambda_4 = 1,35$ Вт/(м·К), $\lambda_5 = 1,5$ Вт/(м·К), $a_4 = 0,55 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $a_5 = 0,80 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $C_4 = 1200$ Дж/кг·°С, $\rho_4 = 1580$ кг/м³, $C_5 = 1560$ Дж/кг·°С, $\rho_5 = 1580$ кг/м³, $R = 84,8$ Вт/м², $LE = 36$ Вт/м², $\alpha = 11,75$ Вт/м²·К. Здесь L — удельная теплота плавления льда, λ — коэффициент теплопроводности, a — коэффициент температуропроводности, ρ_l — плотность льда, G — льдистость, C — удельная теплоемкость. Индексы 1, 2 и 4, 5 относятся соответственно к талой и мерзлой зонам почвенно-растительного покрова и грунта. Для теплоизоляции были приняты следующие теплофизические параметры: $\lambda_3 = 0,031$ Вт/(м·К), $a_3 = 0,79 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\rho_3 = 28$ кг/м³, $c_3 = 1450$ Дж/кг·°С. Пространственные параметры: $z_1 = 0,5$ м, $z_2 = 0,06$ м, $z_3 = 9,5$ м. Используемое в работе распределение среднемесячной температуры воздуха на дневной поверхности в годовом цикле приведено в таблице.

Таблица

Распределение среднемесячной температуры воздуха на дневной поверхности

t , месяцы	I	II	III	VI	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
T , град	-27	-26	-23	-14	-5,5	6,4	13,8	11,3	4,2	-6,5	-19	-25

Рис. 2. Синусоидальная аппроксимация среднесуточных температур за многолетний период.



Отметим, что также возможно использование непрерывной зависимости температуры от времени на основе аппроксимации этой зависимости в годовом цикле синусоидой [9, 11].

На рис. 2 приведена синусоидальная аппроксимация температуры в течении года. Среднесуточная температура определялась путем усреднения данных метеонаблюдений, полученных за 30-летний период метеостанцией аэропорта п. Ямбург. Уравнение аппроксимирующей синусоиды имеет вид

$$T(t) = T_C + T_0 \sin(\varphi t + \psi),$$

здесь t — время в сутках, T_C — среднегодовая температура воздуха за период наблюдений, T_0 — амплитуда колебаний температуры воздуха, φ — коэффициент пересчета суток в радианы, ψ — сдвиг фаз во времени, определяемый началом отсчета времени.

Получено:

$$T_C = -7,9 \text{ }^\circ\text{C}, \quad T_0 = 21,7 \text{ }^\circ\text{C}, \quad \psi = 4,3, \quad \varphi = 2\pi/365 = 0,017 \text{ рад/сут.}$$

Аппроксимация зависимости (4) имеет вид

$$T_0(t) = T_C + (T_0 + A_{01}) \sin(\varphi t + \Psi),$$

где $A_{01} = (\pi/2)A_0$, A_0 — осредненная за теплый период величина $(R - LE)/\alpha$.

Результаты работы программы сравнивались с точным автомодельным решением задачи Стефана для закона движения поверхности протаивания и с приближенным аналитическим решением этой задачи по методу Лейбензона. Численный расчет первого этапа задачи в почвенно-растительном покрове (слой 1) хорошо согласуется с аналитическим решением классической задачи Стефана (расхождения результатов составляет менее 2 %).

3. Некоторые результаты расчетов

Рассмотрим результаты расчетов о протаивании массива мерзлого грунта. Вычисления проводились за теплый период года $(t_1, t_2) = (\text{июнь} - \text{сентябрь}) = 120$ суток. Температура на поверхности принималась согласно табличным данным. Начальное распределение температуры задавалось в виде линейной зависимости $T(0, t) = T(z)$ с учетом того, что $T(z=0) = 0 \text{ }^\circ\text{C}$, $T(z=z_1+z_2+z_3 = 10,06 \text{ м}) = -6 \text{ }^\circ\text{C}$, $h(t) = 0$, $z_1 = 0,5 \text{ м}$, $z_2 = 0,06 \text{ м}$, $z_3 = 9,5 \text{ м}$.

На рис. 3 представлено температурное поле теплого периода в различные моменты времени. Видно, что в начальный момент времени ($t \leq 36$ суток) происходит охлаждение грунта под слоем теплоизоляции ($z > 0,56 \text{ м}$) за счет влияния нижележащих мерзлых грунтов,

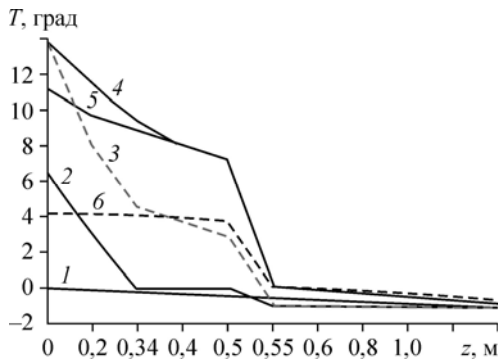


Рис. 3. Температурное поле массива во время теплого периода.

$t = 0$ (1), 18 (2), 36 (3), 54 (4), 96 (5), 120 (6) сут.

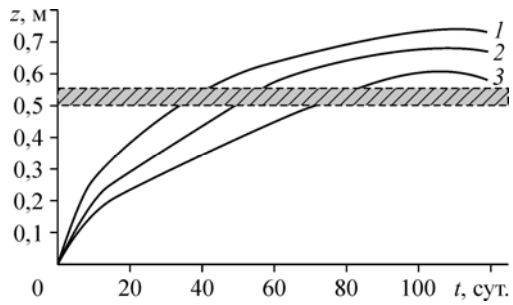


Рис. 4. Динамика фронта протаивания в ПРП и в грунте при различных значениях льдистости.

$G = 0,2$ (1), $0,4$ (2), $0,7$ (3).

в последующие моменты времени происходит нагрев слоя грунта и его протаивание. Выше слоя теплоизоляции ($z < 0,5$ м) температурное поле в значительной степени определяется температурой на дневной поверхности, которая изменяется в течении теплого периода (см. таблицу). В слое теплоизоляции также наблюдается достаточно сильное изменение температуры.

На рис. 4 представлена динамика фронта протаивания в почвенно-растительном покрове и в грунте в течение теплого периода. Видно, что при увеличении льдистости скорость движения фронта протаивания уменьшается. При больших значениях времени (кривые 2 ($t = 105$ сут.) и 3 ($t = 100$ сут.)) происходит обратное замерзание грунта. Это связано с тем, что к концу теплого периода уменьшается градиент температуры из дневной поверхности и превалирующим становится охлаждающее влияние нижней толщи мерзлых пород. Сдвиг по времени конца нижних и начала верхних кривых на рис. 4 соответствует промежутку времени, который необходим для прохождения нулевой изотермы через толщу теплоизолирующего слоя. Из рисунка также видно, что глубина протаивания грунта под слоем теплоизоляции в значительной степени зависит от льдистости ПРП над этим слоем, а именно: увеличение льдистости приводит к существенному запаздыванию начала протаивания грунта (изменение G на величину $0,5$ приводит к запаздыванию на 45 суток).

На рис. 5 представлена динамика фронта протаивания в грунте (слой 3) при различных толщинах слоя теплоизоляции (слой 2). Время протаивания почвенно-растительного слоя составляет 35 сут. (кривая 1 на рис. 5). Видно, что при отсутствии теплоизоляции протаивание в грунте происходит достаточно интенсивно. С увеличением толщины теплоизолирующего слоя протаивание грунта замедляется. Время прохождения нулевой изотермы через теплоизолирующий слой при его толщине в 3 см равно 5 суткам (кривая 2), а при толщинах в 6 и 12 см — соответственно 7 и 14 суткам (кривые 3 и 4). При толщине слоя теплоизоляции $z_2 = 0,12$ м (кривая 4) к концу теплого сезона наблюдается обратный процесс замерзания грунта.

На рис. 6 представлена динамика фронта протаивания в грунте при различной толщине ПРП. Видно, что изменение мощности почвенно-растительного покрова оказывает значительное влияние на динамику фронта протаивания в грунте. При большей мощности почвенно-растительного покрова интенсивность протаивания в грунте ниже. Таким образом, варьируя толщины почвенно-растительного покрова и теплоизоляционного покрытия, можно регулировать динамику протаивания грунта.

Рассмотрим задачу промерзания массива, состоящего из слоя почвенно-растительного покрова (ПРП) и грунта. Необходимо определить распределение температуры по глубине $T(z)$ за холодный период годового цикла ($0, t_1$) и динамику промерзания массива.

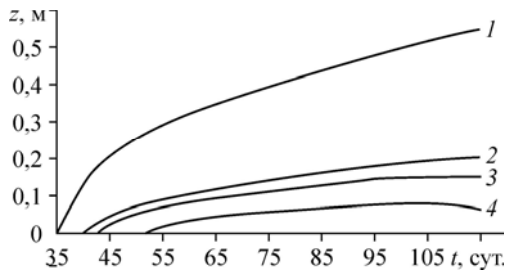


Рис. 5. Динамика фронта протаивания в грунте при различных толщинах теплоизоляции.
 $z_2 = 0$ (1), 0,3 (2), 0,06 (3), 0,12 (4) м.

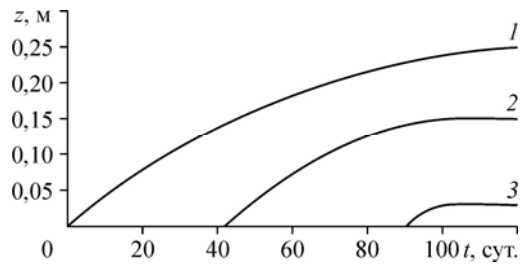


Рис. 6. Динамика фронта протаивания в грунте при различных толщинах ПРП.
 $z_1 = 0$ м, 2 — $z_2 = 0,5$ м, 3 — $z_3 = 0,8$ м.

Массив талого грунта имеет начальное распределение температуры $T = T(z)$ на начало холодного периода ($t = 0$). Под действием отрицательной температуры сверху и снизу происходит постепенное промерзание всей системы за счет кристаллизации внутрипоровой воды. Начальные влажности ПРП и грунта считаются известными. При расчетах влажность слоев ПРП и талого грунта принимались равными соответственно $W_1 = 0,7$ и $W_2 = 0,2$, толщины слоев варьировались.

На рис. 7 представлено температурное поле во всем массиве холодного периода года ($0 < t < 240$ сут.). Из полученных результатов видно, что в начале (до момента времени $t = 30$ сут.) происходит промерзание почвенно-растительного слоя и грунта, в последующие моменты времени происходит дальнейшее охлаждение, а затем (с момента $t = 150$ сут.) — постепенный нагрев слоев без фазовых переходов. Все кривые, показывающие изменение температуры с глубиной, сходятся в точке $z = -10$ м, $T = -4$ °С; значение $z = -10$ м соответствует глубине влияния температуры дневной поверхности.

На рис. 8 представлена динамика фронта промерзания в почвенно-растительном покрове при различной толщине талого слоя. Видно, что изменение толщины СТС оказывает заметное влияние на динамику фронта промерзания в ПРП: при большей толщине СТС интенсивность промерзания ПРП становится ниже. Это объясняется уменьшением градиента температуры со стороны мерзлого массива при увеличении слоя талого грунта. В свою очередь, изменение толщины ПРП оказывает сильное влияние на динамику фронта промерзания в грунте. При большей толщине ПРП интенсивность промерзания в грунте становится ниже.

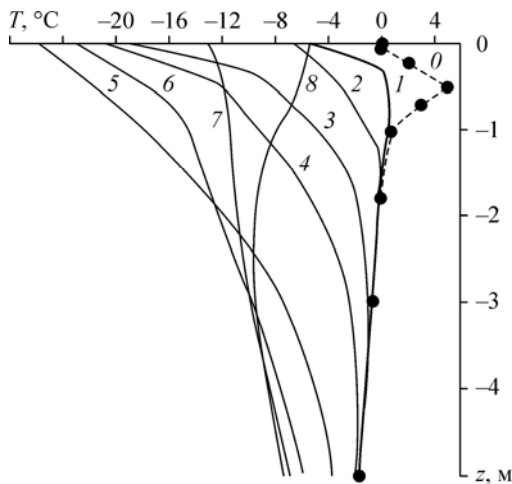


Рис. 7. Температурное поле массива во время холодного периода.
 $t = 15$ (1), 30 (2), 45 (3), 60 (4), 120 (5), 180 (6), 220 (7), 240 (8) сут.

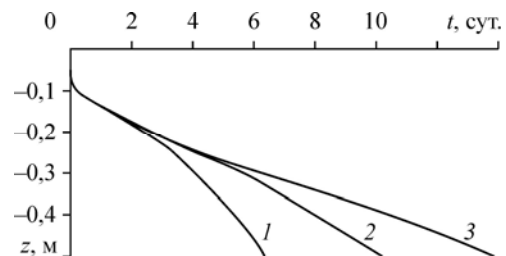


Рис. 8. Динамика фронта промерзания в ПРП при различных толщинах талого грунта.
 Толщина грунта 0,5 (1), 1 (2), 1,5 (3) м.

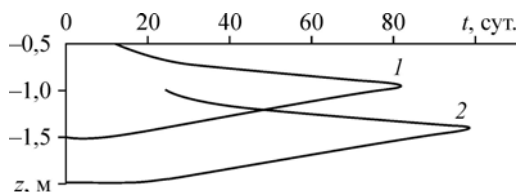


Рис. 9. Динамика промерзания талого слоя при различных толщинах ПРП. Толщина ПРП 0,5 (1), 1 (2) м.

ПРП промерзание начинается позже, и полное промерзание происходит за более длительный промежуток времени.

Заключение

В работе предложена математическая модель, описывающая процессы теплопереноса и фазовые превращения воды в многослойных системах на поверхности криолитозоны в годичном цикле, включающем теплый и холодный периоды года. Представленная модель позволяет исследовать температурный режим многослойной среды с учетом основных определяющих параметров: радиационного баланса и конвективного теплообмена на дневной поверхности в теплый период года, динамики снежного покрова в холодный период года, теплофизических свойств и толщины слоя грунта, почвенно-растительного покрова и теплоизоляционных слоев. Расчет по предложенной модели позволяет определить динамику процессов протаивания–промерзания многослойных систем на поверхности криолитозоны, выбрать оптимальные толщины и виды теплоизоляционных слоев и почвенно-растительного покрова, обеспечивающие устойчивость сооружений на поверхности криолитозоны.

Список литературы

1. Ананенков А.Г., Ставкин Г.П., Лобастова С.А., Хабибуллин И.Л. Экологические основы землепользования при освоении и разработке газовых и газоконденсатных месторождений Крайнего Севера. М.: ООО «Недра-Бизнесцентр», 2000. 316 с.
2. Хабибуллин И.Л., Лобастова С.А., Солдаткин М.В., Бураншина А.Р. Моделирование термокарстового озера и оценка его экогеокриологической опасности // Вестник БашГУ. 2007. Т. 12, № 1. С. 21–22.
3. Хабибуллин И.Л., Хусайнова З.Р. Аналитические исследования моделей термоэрозии мерзлых грунтов // Вестник БашГУ. 2005. Т. 10, № 12. С. 23–27.
4. Сморгун Г.И. Прогноз теплового режима мерзлых горных пород под естественными и искусственными покровами. Новосибирск: Наука, 1980. С. 7, 48–52.
5. Хабибуллин И.Л., Закирова Г.А. Моделирование протаивания мерзлого грунта под теплоизоляционными слоями // Вестник БашГУ. 2014. Т. 19, № 4. С. 1131–1139.
6. Меламед В.Г. Тепло- и массообмен в горных породах при фазовых переходах. М.: Наука. 1980. 228 с.
7. Фельдман Г.М. Термокарст и вечная мерзлота. Новосибирск: Наука, 1984. 253 с.
8. Дубина М.М., Красовицкий Б.А., Лозовский А.С. Тепловое и механическое взаимодействие инженерных сооружений с мерзлыми грунтами. Новосибирск: Наука, 1977. 144 с.
9. Ершов Э.Д. Основы геокриологии. Ч. 4. Динамическая геокриология. М.: Изд-во МГУ, 2001. 688 с.
10. Хабибуллин И.Л., Солдаткин М.В. Динамика промерзания сезонно-талого слоя криолитозоны с учетом наличия снежного покрова // Вестник БашГУ. 2012. Т. 17, № 2. С. 843–846.
11. Чудновский А.Ф. Теплофизика почв. М.: Наука, 1976. 352 с.
12. Павлов А.В. Теплофизика ландшафтов. М.: Наука, 1979. 283 с.
13. Перльштейн Г.З. Теплообмен деятельного слоя с атмосферой: теоретические и прикладные аспекты // Криосфера Земли. 2002. Т. VI, № 1. С. 25–29.
14. Осокин Н.И., Сосновский А.В. Влияние динамики температуры воздуха и высоты снежного покрова на промерзание грунта // Криосфера Земли. 2015. Т. XIX, № 1. С. 99–105.
15. Охлопков Н.М. О некоторых методах численной реализации многомерных нестационарных краевых задач математической физики. Якутск: ЯГУ, 1978. 255 с.

Статья поступила в редакцию 27 января 2017 г.,
после доработки — 16 марта 2017 г.