УДК 517.9

ГРУППЫ СИММЕТРИИ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ С ПАМЯТЬЮ

Л.-Ц. Чжоу[*,**], С. В. Мелешко[**]

[*] Школа математики и статистики Университета финансов и экономики Гуйчжоу, 550025 Гуйян, Китай

[**] Школа математики Технологического университета Суранари, 30000 Накхон Ратчасима, Таиланд

E-mails: longqiao@163.com, sergey@math.sut.ac.th

С помощью метода группового анализа исследованы интегродифференциальные уравнения, соответствующие линейной термовязкоупругой модели. Использован подход для вычисления групп симметрии таких уравнений. Получено общее решение определяющих уравнений исследуемой системы. С использованием подалгебр допускаемой алгебры Ли изучаются два класса частично инвариантных решений исследуемой системы интегродифференциальных уравнений.

Ключевые слова: линейная термовязкоупругость, группы симметрии, частично инвариантные решения, интегродифференциальные уравнения.

DOI: 10.15372/PMTF20170403

Введение. Математические модели, описывающие поведение материалов с памятью, часто формулируются в виде интегродифференциальных уравнений. Таким образом, нахождение точных решений дифференциальных или интегродифференциальных уравнений является важной задачей математической физики. Метод группового анализа [1] — эффективный метод построения точных решений дифференциальных уравнений в частных производных на основе симметрий исследуемых уравнений. Наличие симметрии в интегродифференциальных уравнениях позволяет находить инвариантные решения. В инвариантных решениях интегродифференциальных уравнений, как и в решениях уравнений в частных производных, число независимых переменных также уменьшается.

Классический подход, используемый при исследовании симметрий уравнений в частных производных, неприменим в случае интегродифференциальных уравнений, что обусловлено наличием в них нелокальных интегральных операторов. Однако можно использовать понятия, применяемые в теории, разработанной для уравнений в частных производных [1]. В [2, 3] предложен метод вычисления симметрий интегродифференциальных уравнений, обзор работ, в которых используется этот метод, приведен в [4, 5]. В этом методе в частных производных симметрия системы интегродифференциальных уравнений

Работа выполнена при финансовой поддержке Университета финансов и экономики Гуйчжоу.

определяется как группа Ли с соответствующим генератором, удовлетворяющим определяющим уравнениям. Несмотря на то что алгоритм получения определяющих уравнений является не более сложным, чем алгоритм получения уравнений в частных производных, решение определяющих уравнений затруднено, так как они содержат интегральные операторы.

Следует отметить, что использование метода расщепления определяющих уравнений позволяет получить их общее решение. При решении уравнений в частных производных применяется метод расщепления относительно произвольных элементов, основанный на анализе задачи Коши. Обычно изучаются системы уравнений в частных производных типа уравнений Коши — Ковалевской. Для таких систем нетрудно определить произвольные элементы, в качестве которых можно выбрать параметрические производные для расщепления.

Несколько методов расщепления определяющих уравнений интегродифференциальных уравнений предложено в [4, 5]. В работах [6, 7] рассмотрен случай, когда группа симметрии системы уравнений описывает одномерное движение вязкоупругой среды. В этом случае используется метод расщепления, основанный на существовании решения задачи Коши. Произвольность начальных данных задачи Коши позволяет расщепить определяющие уравнения. Другой метод, в котором используется произвольность начальных данных, предложен в [3, 8].

В [1, 9] помимо понятия множества инвариантных решений вводится понятие частично инвариантных решений как расширение понятия инвариантных решений. Алгоритм построения частично инвариантных решений аналогичен алгоритму получения инвариантных решений, хотя анализ совместности более сложный. Для частично инвариантных решений вводятся два важных понятия: дефект δ и ранг ρ. Если $\delta > 0$, анализ совместности часто позволяет получить частично инвариантные решения с δ_1 и ρ_1. Известно, что для уравнений в частных производных $\rho_1 \geqslant \rho$ и $\delta_1 \geqslant \delta$ [1]. Некоторые достаточные условия сведения уравнений к инвариантным решениям предложены в [1]. В [10] получены регулярные частично инвариантные подмодели уравнений газовой динамики.

Исследованию частично инвариантных решений уравнений в частных производных посвящено большое количество работ (см., например, работы [1, 4, 10–14] и библиографию к ним), в то время как частично инвариантные решения интегродифференциальных уравнений изучены недостаточно. В работе [15] и данной работе впервые построены частично инвариантные решения интегродифференциальных уравнений.

В настоящей работе исследуется линейная модель однородных термовязкоупругих стареющих материалов с памятью, предложенная в [15]. Система интегродифференциальных уравнений описывает два типа течений: одномерное и сдвиговое. Целями данной работы являются определение симметрии этой системы и получение новых частично инвариантных решений.

1. Основные уравнения. Рассмотрим тело, занимающее фиксированную область Ω, в подходящей начальной конфигурации и предположим, что эта конфигурация является естественным состоянием, а именно состоянием с нулевым напряжением и постоянной абсолютной температурой Θ_0. Пусть $\boldsymbol{X}$ — радиус-вектор материальной точки, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)$ — поле перемещений и $\theta(\boldsymbol{X}, t) = \Theta(\boldsymbol{X}, t) - \Theta_0$. Предполагается, что тензор напряжений Коши T, удельная энтропия η и вектор потока тепла $\boldsymbol{q}$ определяются линеаризованными основными уравнениями [15, 16]

$$T(t) = G_0 \nabla \boldsymbol{u}(t) + \int\limits_0^t G(t,s) \nabla \boldsymbol{u}(s)\, ds - L_0 \theta(t) - \int\limits_0^t L(t,s)\theta(s)\, ds,$$

$$\Theta_0\eta(t) = \Theta_0\Big(L_0 \cdot \nabla \boldsymbol{u}(t) + \int\limits_0^t L(t,s) \cdot \nabla \boldsymbol{u}(s)\,ds\Big) + c_0\theta(t) + \int\limits_0^t c(t,s)\theta(s)\,ds, \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{q}(t) = -K\nabla\theta(t),$$

где $G(t,s)$, $L(t,s)$, $c(t,s)$ ($t \geqslant 0$, $s \geqslant 0$) — поля тензоров релаксации четвертого, второго и нулевого порядка, не зависящие от радиус-вектора $\boldsymbol{X}$; G_0, L_0, c_0 — постоянные тензоры; тензор теплопроводности K является положительно-полуопределенным. В (1) зависимость величин от $\boldsymbol{X}$ опущена.

Для однородного материала в предположении малых деформаций и малых изменений температуры по отношению к естественному состоянию получаем

$$\rho = 1, \qquad h = \Theta_0\dot{\eta},$$

где ρ — масса единицы объема; h — скорость поглощения теплоты в единице объема. Следовательно, в отсутствие массовых сил и радиационного нагрева уравнения баланса импульса и энергии принимают вид

$$\ddot{\boldsymbol{u}} = \operatorname{div}_x T, \qquad \Theta_0\dot{\eta}(t) + \operatorname{div}_x \boldsymbol{q} = 0. \qquad (2)$$

Исследуются линейные термовязкоупругие материалы с памятью в одномерном случае.

Определяющие уравнения (1) с уравнениями баланса (2) и условие кинематической совместности в безразмерных переменных принимают вид

$$\sigma_x = v_t, \qquad e_t = v_x, \qquad \theta_{xx} = w_t,$$

$$\sigma = Ee + \int\limits_0^t G(t,s)e(s)\,ds - \theta - \int\limits_0^t L(t,s)\theta(s)\,ds, \qquad (3)$$

$$w = e + \int\limits_0^t L(t,s)e(s)\,ds + \theta + \int\limits_0^t c(t,s)\theta(s)\,ds.$$

Здесь t, x — независимые переменные; σ, v, e, θ, w — зависимые переменные; E — постоянная; $G(t,s)$, $L(t,s)$, $c(t,s)$ — функции релаксации.

Ядра $G(t,s)$, $L(t,s)$, $c(t,s)$ называются вырожденными ядрами, если система (3) сводится к системе уравнений в частных производных. Например, если ядра имеют вид

$$G(t,s) = k_1(t)G_1(s), \qquad L(t,s) = k_2(t)L_1(s), \qquad c(t,s) = k_3(t)c_1(s),$$

то система (3) сводится к системе уравнений в частных производных. В данной работе вырожденные ядра не рассматриваются.

Следуя алгоритму [2, 4, 5], можно получить определяющие уравнения, соответствующие системе (3). Способ, с помощью которого эти уравнения расщепляются, зависит от соотношений между функциями релаксации $G(t,s)$, $L(t,s)$ и $c(t,s)$. Выделяются два частных случая системы (3). В первом случае описывается поведение линейного термовязкоупругого материала, для которого ядро $L(t,s) = 0$. Соответствующие уравнения имеют вид

$$\sigma_x = v_t, \qquad e_t = v_x, \qquad \theta_{xx} = w_t,$$

$$\sigma = Ee - \theta + \int\limits_0^t G(t,s)e(s)\,ds, \qquad w = e + \theta + \int\limits_0^t c(t,s)\theta(s)\,ds.$$

Чтобы исключить возможность сведения этих уравнений к уравнениям в частных производных, будем полагать, что $G(t,s) \neq 0$ и $c(t,s) \neq 0$. Второму случаю соответствуют ядра вида $G(t,s) = h_1(t)L(t,s)$ и $c(t,s) = q_1(t)L(t,s)$ в системе (3). В этом случае уравнения (3) принимают вид

$$\sigma_x = v_t, \qquad e_t = v_x, \qquad \theta_{xx} = w_t,$$

$$\sigma = Ee + h_1 \int_0^t L(t,s)e(s)\,ds - \theta - \int_0^t L(t,s)\theta(s)\,ds, \tag{4}$$

$$w = e + \int_0^t L(t,s)e(s)\,ds + \theta + q_1 \int_0^t L(t,s)\theta(s)\,ds.$$

2. Определяющие уравнения. Ниже приводятся определяющие уравнения основных уравнений.

2.1. *Начальные функции.* Для уравнений (3) формулируется задача Коши со следующими начальными данными:

$$v(t,x_0) = v_0(t), \qquad e(t,x_0) = e_0(t), \qquad \theta(t,x_0) = \theta_0(t), \qquad \theta_x(t,x_0) = \theta_1(t). \tag{5}$$

Здесь $v_0(t)$, $e_0(t)$, $\theta_0(t)$ и $\theta_1(t)$ — произвольные функции. Начальные данные для $\sigma(t,x_0)$ и $w(t,x_0)$ имеют вид

$$\sigma(t,x_0) = f_0(t) - g_0(t), \qquad w(t,x_0) = f_1(t) + g_1(t),$$

где

$$f_0(t) = Ee_0(t) + \int_0^t G(t,s)e_0(s)\,ds, \qquad f_1(t) = e_0(t) + \int_0^t L(t,s)e_0(s)\,ds,$$

$$g_0(t) = \theta_0(t) + \int_0^t L(t,s)\theta_0(s)\,ds, \qquad g_1(t) = \theta_0(t) + \int_0^t c(t,s)\theta_0(s)\,ds.$$

С использованием начальных условий (5) и уравнений (3) можно получить главные производные функций $v(t,x)$, $\sigma(t,x)$, $e(t,x)$, $\theta(t,x)$, $w(t,x)$ при $x = x_0$:

$$\begin{gathered} \sigma_x(t,x_0) = v_t(t,x_0) = v_0'(t), \qquad v_x(t,x_0) = e_t(t,x_0) = e_0'(t), \\ \sigma_t(t,x_0) = f_0'(t) - g_0'(t), \qquad e_x(t,x_0) = e_1(t), \qquad \theta_t(t,x_0) = \theta_0'(t), \\ w_t(t,x_0) = f_1'(t) + g_1'(t), \qquad w_x(t,x_0) = k_1(t) + p_1(t). \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь функции $k_1(t)$, $p_1(t)$ имеют представление

$$k_1(t) = e_1(t) + \int_0^t L(t,s)e_1(s)\,ds, \qquad p_1(t) = \theta_1(t) + \int_0^t c(t,s)\theta_1(s)\,ds,$$

функция $e_1(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерры второго рода

$$Ee_1(t) + \int_0^t G(t,s)e_1(s)\,ds = v_0'(t) + p_0(t); \tag{7}$$

$$p_0(t) = \theta_1(t) + \int_0^t L(t,s)\theta_1(s)\,ds.$$

Полагая

$$k_0(t) = Ee_1(t) + \int_0^t G(t,s)e_1(s)\,ds,$$

получаем соотношение

$$v_0'(t) = k_0(t) - p_0(t). \tag{8}$$

Чтобы исследовать определяющее уравнение третьего уравнения системы (3), нужно рассмотреть главные производные второго порядка функций $v(t,x)$, $\sigma(t,x)$, $e(t,x)$, $\theta(t,x)$, $w(t,x)$ при $x = x_0$:

$$\sigma_{xx}(t,x_0) = e_0''(t), \qquad v_{xx}(t,x_0) = e_1'(t), \qquad e_{xx} = e_2(t),$$
$$\theta_{tx}(t,x_0) = \theta_1'(t), \qquad \theta_{xx}(t,x_0) = f_1'(t) + g_1'(t),$$
$$w_{xx}(t,x_0) = k_3(t) + f_3(t) + g_3(t).$$

Здесь

$$k_3(t) = e_2(t) + \int_0^t L(t,s)e_2(s)\,ds,$$

$$f_3(t) = f_1'(t) + \int_0^t c(t,s)f_1'(s)\,ds, \qquad g_3(t) = g_1'(t) + \int_0^t c(t,s)g_1'(s)\,ds,$$

функция $e_2(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерры второго рода

$$Ee_2(t) + \int_0^t G(t,s)e_2(s)\,ds = e_0''(t) + f_2(t) + g_2(t),$$

$$f_2(t) = f_1'(t) + \int_0^t L(t,s)f_1'(s)\,ds, \qquad g_2(t) = g_1'(t) + \int_0^t L(t,s)g_1'(s)\,ds.$$

Вводя обозначение

$$k_2(t) = Ee_2(t) + \int_0^t G(t,s)e_2(s)\,ds,$$

имеем

$$e_0''(t) = k_2(t) - f_2(t) - g_2(t).$$

Задача Коши, записанная выше, содержит большое число функций: $\theta_i(t)$, $p_i(t)$, $e_j(t)$, $k_r(t)$, $f_r(t)$, $g_r(t)$ $(i = 0, 1,\ j = 0, 1, 2,\ r = 0, 1, 2, 3)$. Для получения решения определяющих уравнений системы (3) нужно исследовать соотношения между этими функциями. Только четыре из них могут быть выбраны произвольно: $e_1(t)$, $\theta_1(t)$, $e_0(t)$, $\theta_0(t)$, остальные определяются этими четырьмя функциями. В частности, функции $k_0(t)$ и $k_1(t)$ зависят от $e_1(t)$, функции $p_0(t)$, $p_1(t)$ — от $\theta_1(t)$. Так как интегральное уравнение (7) имеет единственное решение, произвольность $e_1(t)$ определяется произвольностью $v_0'(t)$, при этом функция $p_0(t)$ фиксирована. Для расщепления определяющих уравнений системы (3) используются следующие предложения.

Предложение 1. *Пусть $y(t)$ — произвольная функция. Если $L(t,s) \neq 0$, то переменные y, y', y'', $\int\limits_0^t L(t,s)y(s)\,ds$ функционально независимы.*

Пусть начальная функция $y(s)$ имеет вид

$$y(s) = a_1 + a_2(s - t_0) + a_3(s - t_0)^2/2 + a_4(s - t_0)^{n+3}, \qquad n \geqslant 1.$$

Здесь t_0 — фиксированное (произвольное) время; a_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ — произвольные постоянные. Таким образом, при $t = t_0$ имеем

$$y(t_0) = a_1, \qquad y'(t_0) = a_2, \qquad y''(t_0) = a_3,$$

$$\int\limits_0^{t_0} L(t_0,s)y(s)\,ds = a_1\int\limits_0^{t_0} L(t_0,s)\,ds + a_2\int\limits_0^{t_0} L(t_0,s)(s-t_0)\,ds + \frac{a_3}{2}\int\limits_0^{t_0} L(t_0,s)(s-t_0)^2\,ds + a_4\int\limits_0^{t_0} L(t_0,s)(s-t_0)^{n+3}\,ds. \qquad (9)$$

Так как набор функций $(s - t_0)^n$ является полным в пространстве $L^2[0, t_0]$ и значение t_0 таково, что $L(t_0, s) \neq 0$, существует значение n, для которого $\int\limits_0^{t_0} L(t_0,s)(t_0-s)^n\,ds \neq 0$.

Следовательно, при данных значениях $y(t_0)$, $y'(t_0)$, $y''(t_0)$, $\int\limits_0^{t_0} L(t_0,s)y(s)\,ds$ можно решить уравнения (9) относительно коэффициентов a_1, a_2, a_3, a_4. Это означает, что переменные y, y', y'', $\int\limits_0^{t_0} L(t_0,s)y(s)\,ds$ функционально независимы.

Предложение 2. *Если $L(t,s) \neq 0$ и $G(t,s) \neq h(t)L(t,s)$ для всех функций $h(t)$, то переменные y, y', y'', $\int\limits_0^t G(t,s)y(s)\,ds$, $\int\limits_0^t L(t,s)y(s)\,ds$ функционально независимы.*

Выберем следующие начальные данные:

$$y(s) = a_1 + a_2(s - t_0) + a_3(s - t_0)^2/2 + (s - t_0)^3[a_4(s - t_0)^{n_1} + a_5(s - t_0)^{n_2}].$$

Здесь t_0 — фиксированное (произвольное) время; $n_i \geqslant 1$ $(i = 1, 2)$ — целые числа; a_j $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$ — произвольные постоянные. Тогда при $t = t_0$ имеем

$$y(t_0) = a_1, \qquad y'(t_0) = a_2, \qquad y''(t_0) = a_3,$$

$$\int\limits_0^{t_0} G(t_0,s)y(s)\,ds = a_1\int\limits_0^{t_0} G(t_0,s)\,ds + a_2\int\limits_0^{t_0} G(t_0,s)(s-t_0)\,ds +$$

$$+\frac{a_3}{2}\int\limits_0^{t_0} G(t_0,s)(s-t_0)^2\,ds + a_4\int\limits_0^{t_0} G(t_0,s)(s-t_0)^{n_1+3}\,ds + a_5\int\limits_0^{t_0} G(t_0,s)(s-t_0)^{n_2+3}\,ds, \qquad (10)$$

$$\int\limits_0^{t_0} L(t_0,s)y(s)\,ds = a_1\int\limits_0^{t_0} L(t_0,s)\,ds + a_2\int\limits_0^{t_0} L(t_0,s)(s-t_0)\,ds +$$

$$+\frac{a_3}{2}\int\limits_0^{t_0} L(t_0,s)(s-t_0)^2\,ds + a_4\int\limits_0^{t_0} L(t_0,s)(s-t_0)^{n_1+3}\,ds + a_5\int\limits_0^{t_0} L(t_0,s)(s-t_0)^{n_2+3}\,ds.$$

Якобиан $y(t_0)$, $y'(t_0)$, $y''(t_0)$, $\int\limits_0^{t_0} G(t_0,s)y(s)\,ds$, $\int\limits_0^{t_0} L(t_0,s)y(s)\,ds$ относительно a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 имеет вид

$$\Delta = \Big(\int\limits_0^{t_0} G(t_0,s)(s-t_0)^{n_1+2}\,ds\Big)\Big(\int\limits_0^{t_0} L(t_0,s)(s-t_0)^{n_2+2}\,ds\Big) -$$

$$-\Big(\int\limits_0^{t_0} G(t_0,s)(s-t_0)^{n_2+2}\,ds\Big)\Big(\int\limits_0^{t_0} L(t_0,s)(s-t_0)^{n_1+2}\,ds\Big).$$

Если $\Delta = 0$ для всех целых чисел n_i $(i = 1,2)$, то, поскольку $L(t_0,s) \ne 0$, существует функция $h(t)$, такая что

$$G(t,s) = h(t)L(t,s).$$

Это равенство противоречит предположениям. Следовательно, существует два целых числа n_1, n_2, таких что $\Delta \ne 0$, и при данных значениях $y(t_0)$, $y'(t_0)$, $y''(t_0)$, $\int\limits_0^{t_0} G(t_0,s)y(s)\,ds$, $\int\limits_0^{t_0} L(t_0,s)y(s)\,ds$ можно решить уравнения (10) относительно коэффициентов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Это означает, что переменные y, y', y'', $\int\limits_0^{t} G(t,s)y(s)\,ds$, $\int\limits_0^{t} L(t,s)y(s)\,ds$ функционально независимы.

2.2. *Определяющие уравнения.* Рассмотрим симметрию уравнений (3)

$$X = \xi\,\partial_x + \eta\,\partial_t + \zeta^v\,\partial_v + \zeta^\sigma\,\partial_\sigma + \zeta^e\,\partial_e + \zeta^\theta\,\partial_\theta + \zeta^w\,\partial_w,$$

где координаты ξ, η, ζ^v, ζ^σ, ζ^e, ζ^θ, ζ^w являются функциями семи переменных t, x, v, σ, e, θ, w. Канонический оператор Ли — Беклунда, эквивалентный оператору X, имеет вид

$$\bar{X} = (\zeta^v - \xi v_x - \eta v_t)\,\partial_v + (\zeta^\sigma - \xi\sigma_x - \eta\sigma_t)\,\partial_\sigma + \\ + (\zeta^e - \xi e_x - \eta e_t)\,\partial_e + (\zeta^\theta - \xi\theta_x - \eta\theta_t)\,\partial_\theta + (\zeta^w - \xi w_x - \eta w_t)\,\partial_w + \dots .$$

Согласно определению допускаемой группы Ли для интегродифференциальных уравнений определяющие уравнения для уравнений (3) имеют вид

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}\,W^v(t,x) - \frac{\partial}{\partial x}\,W^\sigma(t,x)\Big)_{(S)} = 0, \qquad \Big(\frac{\partial}{\partial t}\,W^e(t,x) - \frac{\partial}{\partial x}\,W^v(t,x)\Big)_{(S)} = 0; \tag{11}$$

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,W^\theta(t,x) - \frac{\partial}{\partial t}\,W^w(t,x)\Big)_{(S)} = 0; \tag{12}$$

$$\Big(W^\sigma(t,x) - EW^e(t,x) + W^\theta(t,x) - \int\limits_0^t G(t,s)W^e(s,x)\,ds + \int\limits_0^t L(t,s)W^\theta(s,x)\,ds\Big)_{(S)} = 0; \tag{13}$$

$$\Big(W^w(t,x) - W^e(t,x) - W^\theta(t,x) - \int\limits_0^t L(t,s)W^e(s,x)\,ds - \int\limits_0^t c(t,s)W^\theta(s,x)\,ds\Big)_{(S)} = 0, \tag{14}$$

где

$$W^v(h_1) = \zeta^v(h_2) - \xi(h_2)v_x(h_1) - \eta(h_2)v_t(h_1), \quad W^\sigma(h_1) = \zeta^\sigma(h_2) - \xi(h_2)\sigma_x(h_1) - \eta(h_2)\sigma_t(h_1),$$
$$W^e(h_1) = \zeta^e(h_2) - \xi(h_2)e_x(h_1) - \eta(h_2)e_t(h_1), \quad W^\theta(h_1) = \zeta^\theta(h_2) - \xi(h_2)\theta_x(h_1) - \eta(h_2)\theta_t(h_1),$$
$$W^w(h_1) = \zeta^w(h_2) - \xi(h_2)w_x(h_1) - \eta(h_2)w_t(h_1),$$
$$h_1 = (t,x), \qquad h_2 = (t,x,v(t,x),\sigma(t,x),e(t,x),\theta(t,x),w(t,x)),$$

индекс (S) означает, что соответствующее выражение равно нулю для любого решения системы (3).

Согласно предложениям 1, 2 для исследования определяющих уравнений (11)–(14) необходимо рассмотреть следующие четыре случая:

1) $L(t,s) \neq 0$ и $c(t,s) \neq q_1(t)L(t,s)$ для любой функции $q_1(t)$;

2) $L(t,s) \neq 0$, $c(t,s) = q_1(t)L(t,s)$ для некоторой функции $q_1(t)$, но не существует функции $h_1(t)$, такой что $G(t,s) = h_1(t)L(t,s)$;

3) $L(t,s) = 0$;

4) $c(t,s) = q_1(t)L(t,s)$ и $G(t,s) = h_1(t)L(t,s)$ для некоторых функций $q_1(t)$, $h_1(t)$.

В каждом случае алгоритм поиска решений определяющих уравнений системы (3) включает два шага: 1) решение определяющих уравнений (11), (12), связанных с уравнениями в частных производных в системе (3); 2) упрощение определяющих уравнений (13), (14), связанных с интегродифференциальными уравнениями в системе (3), с использованием результатов, полученных на первом шаге, и решение упрощенных уравнений.

3. Решение определяющих уравнений (11), (12). Рассмотрим уравнения (11), (12), которые являются определяющими для уравнений в частных производных системы (3). Подставляя производные (6) и соотношения (8) в определяющие уравнения (11) в точке x_0, получаем

$$(\xi_\sigma - \eta_v)(p_0)^2 - \xi_\theta p_0\theta_1 + \xi_w p_0 p_1 + (\xi_\sigma - \eta_v)(k_0)^2 + \xi_e e_1 k_0 + \xi_w k_0 k_1 + \xi_\theta k_0\theta_1 + \\ + 2(\eta_v - \xi_\sigma)k_0 p_0 - \xi_e e_1 p_0 - \xi_w k_1 p_0 - \xi_w k_0 p_1 + (\eta_\theta f_0' - \eta_\theta g_0' - \zeta^\sigma_\theta)\theta_1 + \\ + [\eta_e e_0' + \eta_w f_1' + \eta_\theta\theta_0' + \eta_w g_1' - (\zeta^v_v - \zeta^\sigma_\sigma + \xi_x - \eta_t)]p_0 - (\eta_w f_0' - \eta_w g_0' - \zeta^\sigma_w)p_1 -$$

$$
\begin{gathered}
-[\eta_e e_0' + \eta_w f_1' + \eta_\theta \theta_0' + \eta_w g_1' - (\zeta_v^v - \zeta_\sigma^\sigma + \xi_x - \eta_t)]k_0 + \\
+ (\eta_e f_0' - \eta_e g_0' - \zeta_e^\sigma)e_1 + (\eta_w f_0' - \eta_w g_0' - \zeta_w^\sigma)k_1 - \xi_e (e_0')^2 + (\eta_v - \xi_\sigma)e_0' f_0' - \\
- \xi_w e_0' f_1' - [\xi_\theta \theta_0' + (\eta_v - \xi_\sigma)g_0' + \xi_w g_1' - (\zeta_e^v - \zeta_v^\sigma - \xi_t)]e_0' + \\
+ (\zeta_\sigma^v + \eta_x)f_0' + \zeta_w^v f_1' + \zeta_\theta^v \theta_0' - (\zeta_\sigma^v + \eta_x)g_0' + \zeta_w^v g_1' + \zeta_t^v - \zeta_x^\sigma = 0, \qquad (15)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\eta_\sigma p_0^2 - \eta_\theta p_0 \theta_1 + \eta_w p_0 p_1 + \eta_\sigma k_0^2 + (\eta_e - \xi_v)e_1 k_0 + \eta_w k_0 k_1 + \eta_\theta k_0 \theta_1 - \eta_w k_0 p_1 - \\
- 2\eta_\sigma k_0 p_0 - (\eta_e - \xi_v)e_1 p_0 - \eta_w k_1 p_0 + (\xi_\theta e_0' - \zeta_\theta^v)\theta_1 - [\xi_\sigma e_0' - (\zeta_\sigma^v - \zeta_v^e - \eta_x)]p_0 - \\
- (\xi_w e_0' - \zeta_w^v)p_1 + [\xi_\sigma e_0' - (\zeta_\sigma^v - \zeta_v^e - \eta_x)]k_0 + (\xi_w e_0' - \zeta_w^v)k_1 - \\
- [\xi_\sigma f_0' + \xi_w f_1' + \xi_\theta \theta_0' - \xi_\sigma g_0' + \xi_w g_1' + (\zeta_e^v + \xi_t)]e_1 + (\xi_v - \eta_e)(e_0')^2 - \\
- \eta_\sigma e_0' f_0' - \eta_w e_0' f_1' + [\eta_\sigma g_0' - \eta_\theta \theta_0' - \eta_w g_1' + (\zeta_e^e - \zeta_v^v - \eta_t + \xi_x)]e_0' + \\
+ \zeta_\sigma^e f_0' + \zeta_w^e f_1' + \zeta_\theta^e \theta_0' - \zeta_\sigma^e g_0' + \zeta_w^e g_1' + \zeta_t^e - \zeta_x^v = 0.
\end{gathered}
$$

Определяющее уравнение (12) является громоздким. Из анализа уравнений (15) следует, что коэффициенты ξ, η не зависят от переменных v, σ, e, θ, w в каждом из случаев 1–4. С учетом этого уравнение (12) сводится к уравнению

$$
\begin{gathered}
-2\eta_x \theta_1' + \zeta_{\theta\theta}^\theta \theta_1^2 + \zeta_{ww}^\theta p_1^2 + \zeta_{\sigma\sigma}^\theta p_0^2 - 2\zeta_{\sigma\theta}^\theta \theta_1 p_0 + 2\zeta_{\sigma w}^\theta p_0 p_1 - 2\zeta_{\theta w}^\theta \theta_1 p_1 + \zeta_v^\theta e_1' + \zeta_{ee}^\theta e_1^2 + \\
+ \zeta_{\sigma\sigma}^\theta k_0^2 + \zeta_{ww}^\theta k_1^2 + 2\zeta_{\sigma e}^\theta e_1 k_0 + 2\zeta_{ew}^\theta e_1 k_1 + 2\zeta_{\sigma w}^\theta k_0 k_1 - 2\zeta_{\sigma e}^\theta p_0 e_1 + 2\zeta_{e\theta}^\theta \theta_1 e_1 - \\
- 2\zeta_{ew}^\theta p_1 e_1 - 2\zeta_{\sigma\sigma}^\theta p_0 k_0 + 2\zeta_{\sigma\theta}^\theta \theta_1 k_0 - 2\zeta_{\sigma w}^\theta p_1 k_0 - 2\zeta_{\sigma w}^\theta p_0 k_1 + 2\zeta_{\theta w}^\theta \theta_1 k_1 - 2\zeta_{ww}^\theta p_1 k_1 + \\
+ [2\zeta_{v\theta}^\theta e_0' + (2\zeta_{x\theta}^\theta - \xi_{xx})]\theta_1 - [2\zeta_{v\sigma}^\theta e_0' + (2\zeta_{x\sigma}^\theta - \zeta_v^w)]p_0 - [2\zeta_{vw}^\theta e_0' + (2\zeta_{xw}^\theta + \xi_t)]p_1 + \\
+ (2\zeta_{ve}^\theta e_0' + 2\zeta_{xe}^\theta)e_1 + [2\zeta_{v\sigma}^\theta e_0' + (2\zeta_{x\sigma}^\theta - \zeta_v^w)]k_0 + [2\zeta_{vw}^\theta e_0' + (2\zeta_{xw}^\theta + \xi_t)]k_1 - \\
- (\zeta_\theta^w + \eta_{xx})\theta_0' + \zeta_\sigma^w g_0' + (\zeta_\theta^\theta - \zeta_w^w - 2\xi_x + \eta_t)g_1' + \zeta_w^\theta g_3 + \zeta_{vv}^\theta (e_0')^2 + \zeta_w^\theta k_3 + \zeta_e^\theta e_2 + \\
+ \zeta_\sigma^\theta e_0'' + (2\zeta_{xv}^\theta - \zeta_e^w)e_0' - \zeta_\sigma^w f_0' + (\zeta_\theta^\theta - \zeta_w^w - 2\xi_x + \eta_t)f_1' + \zeta_w^\theta f_3 + \zeta_{xx}^\theta - \zeta_t^w = 0. \qquad (16)
\end{gathered}
$$

3.1. *Случаи* 1–3. В случаях 1–3 определяющие уравнения (15), (16) анализируются аналогично и приводят к одному и тому же результату. В качестве примера рассмотрим случай 1. Напомним, что в этом случае $L(t,s) \neq 0$ и $c(t,s) \neq q_1(t)L(t,s)$ для любой функции $q_1(t)$. Согласно предложению 2 и определениям переменных p_0, p_1 переменные θ_1, θ_1', p_0, p_1 могут быть выбраны произвольно. Это позволяет расщепить определяющие уравнения (15) относительно θ_1, p_0, p_1, e_0, θ_0, e_1 и получить переопределенную систему уравнений

$$
\begin{gathered}
\xi_v = \xi_\sigma = \xi_e = \xi_\theta = \xi_w = 0, \qquad \eta_v = \eta_\sigma = \eta_e = \eta_\theta = \eta_w = 0, \\
\zeta_e^\sigma = \zeta_\theta^\sigma = \zeta_w^\sigma = 0, \qquad \zeta_\theta^v = \zeta_w^v = 0, \qquad \zeta_e^v + \xi_t = 0, \\
\zeta_\sigma^v + \eta_x = 0, \qquad \zeta_t^v - \zeta_x^\sigma = 0, \qquad \zeta_t^e - \zeta_x^v = 0, \qquad \zeta_e^v - \zeta_v^\sigma - \xi_t = 0, \\
\zeta_v^e - \zeta_\sigma^v + \eta_x = 0, \qquad \zeta_v^v - \zeta_\sigma^\sigma - \eta_t + \xi_x = 0; \\
(\zeta_e^e - \zeta_v^v - \eta_t + \xi_x)e_0' + \zeta_\sigma^e f_0' + \zeta_w^e f_1' = 0; \qquad (17) \\
\zeta_\theta^e \theta_0' - \zeta_\sigma^e g_0' + \zeta_w^e g_1' = 0. \qquad (18)
\end{gathered}
$$

Как отмечено выше, свойство, состоящее в том, что ξ, η не зависят от переменных v, σ, e, θ, w, позволяет свести определяющее уравнение (12) к уравнению (16). Расщепляя уравнение (16) относительно θ_1, θ_1', p_0, p_1, получаем

$$
\eta_x = 0, \qquad \zeta_v^\theta = 0, \qquad \zeta_{\sigma\sigma}^\theta = \zeta_{\sigma e}^\theta = \zeta_{\sigma\theta}^\theta = \zeta_{\sigma w}^\theta = 0, \qquad \zeta_{ee}^\theta = \zeta_{e\theta}^\theta = \zeta_{ew}^\theta = 0,
$$

$$\zeta^\theta_{\theta\theta} = \zeta^\theta_{\theta w} = 0, \qquad \zeta^\theta_{ww} = 0, \qquad \zeta^\theta_{xe} = 0, \qquad \zeta^\theta_{xx} - \zeta^w_t = 0,$$
$$2\zeta^\theta_{x\theta} - \xi_{xx} = 0, \qquad 2\zeta^\theta_{x\sigma} - \zeta^w_v = 0, \qquad 2\zeta^\theta_{xw} + \xi_t = 0;$$
$$-\zeta^w_\theta\theta'_0 + \zeta^w_\sigma g'_0 + (\zeta^\theta_\theta - \zeta^w_w - 2\xi_x + \eta_t)g'_1 + \zeta^\theta_w g_3 + \zeta^\theta_w k_3 + \zeta^\theta_e e_2 +$$
$$+ \zeta^\theta_\sigma e''_0 - \zeta^w_e e'_0 - \zeta^w_\sigma f'_0 + (\zeta^\theta_\theta - \zeta^w_w - 2\xi_x + \eta_t)f'_1 + \zeta^\theta_w f_3 = 0. \qquad (19)$$

Дальнейшее расщепление определяющих уравнений (17)–(19) может осуществляться относительно переменных e''_0, e'_0, f'_0, f'_1, f_3, θ'_0, g'_0, g'_1, g_3, k_3, e_2, ассоциированных с e_0, θ_0. Для того чтобы провести полное исследование, нужно рассмотреть шесть случаев. Для каждого случая определяющие уравнения (17)–(19) анализируются аналогично. Например, предположим, что

$$L_t(t,x) \neq 0, \qquad c_t(t,s) \neq q_2(t)L_t(t,s)$$

для любой функции $q_2(t)$. Из предложения 2 следует, что переменные θ'_0, θ_0, $\int\limits_0^t L_t(t,s)\theta_0(s)\,ds$, $\int\limits_0^t c_t(t,s)\theta_0(s)\,ds$ функционально независимы. Заметим, что

$$g'_0(t) = \theta'_0(t) + L(t,t)\theta_0(t) + \int\limits_0^t L_t(t,s)\theta_0(s)\,ds,$$

$$g'_1(t) = \theta'_0(t) + c(t,t)\theta_0(t) + \int\limits_0^t c_t(t,s)\theta_0(s)\,ds.$$

Можно показать, что переменные θ'_0, g'_0, g'_1 также функционально независимы. Расщепляя уравнение (18) относительно этих переменных, имеем

$$\zeta^e_\sigma = \zeta^e_\theta = \zeta^e_w = 0.$$

При этом уравнение (17) принимает вид

$$\zeta^e_e - \zeta^v_v - \eta_t + \xi_x = 0.$$

Дальнейшее расщепление определяющих уравнений (15) приводит к следующей переопределенной системе уравнений:

$$\xi_v = \xi_\sigma = \xi_e = \xi_\theta = \xi_w = 0, \qquad \eta_v = \eta_\sigma = \eta_e = \eta_\theta = \eta_w = 0,$$
$$\zeta^v_\theta = \zeta^v_w = 0, \qquad \zeta^\sigma_e = \zeta^\sigma_\theta = \zeta^\sigma_w = 0, \qquad \zeta^e_\sigma = \zeta^e_\theta = \zeta^e_w = 0,$$
$$\zeta^v_e + \xi_t = 0, \qquad \zeta^v_\sigma + \eta_x = 0, \qquad \zeta^v_t - \zeta^\sigma_x = 0, \qquad \zeta^e_t - \zeta^v_x = 0, \qquad (20)$$
$$\zeta^e_v - \zeta^v_\sigma + \eta_x = 0, \qquad \zeta^v_e - \zeta^\sigma_v - \xi_t = 0,$$
$$\zeta^v_v - \zeta^\sigma_\sigma - \eta_t + \xi_x = 0, \qquad \zeta^e_e - \zeta^v_v - \eta_t + \xi_x = 0.$$

Если в начальных данных выбрать $e_0(t) = 0$, то в уравнение (19) не будут входить переменные e''_0, e'_0, f'_0, f'_1, f_3 и оно примет вид

$$-\zeta^w_\theta\theta'_0 + \zeta^w_\sigma g'_0 + (\zeta^\theta_\theta - \zeta^w_w - 2\xi_x + \eta_t)g'_1 + \zeta^\theta_w g_3 + \zeta^\theta_w \bar{k}_3 + \zeta^\theta_e \bar{e}_2 = 0, \qquad (21)$$

где

$$\bar{k}_3(t) = \bar{e}_2(t) + \int\limits_0^t L(t,s)\bar{e}_2(s)\,ds,$$

функция $\bar{e}_2(t)$ удовлетворяет уравнению

$$E\bar{e}_2(t) + \int\limits_0^t G(t,s)\bar{e}_2(s)\,ds = g_2(t).$$

Так как переменные θ_0', g_0', g_1' функционально независимы и переменные g_3, $\bar{e}_2$, $\bar{k}_3$ зависят только от g_1', после расщепления уравнения (21) относительно θ_0', g_0', g_1' получаем

$$\zeta^w_\sigma = \zeta^w_\theta = 0; \qquad (22)$$

$$(\zeta^\theta_\theta - \zeta^w_w - 2\xi_x + \eta_t)g_1' + \zeta^\theta_w g_3 + \zeta^\theta_w \bar{k}_3 + \zeta^\theta_e \bar{e}_2 = 0. \qquad (23)$$

В силу произвольности g_1' переменные g_1', g_2, g_3 также функционально независимы в случае 1. Так как $\bar{k}_3$ и $\bar{e}_2$ определяются только функцией g_2, из уравнения (23) получаем

$$\zeta^\theta_e = \zeta^\theta_w = 0, \qquad \zeta^\theta_\theta - \zeta^w_w - 2\xi_x + \eta_t = 0. \qquad (24)$$

Подставляя (22), (24) в (19), находим

$$\zeta^\theta_\sigma e_0'' - \zeta^w_e e_0' = 0,$$

откуда следует

$$\zeta^\theta_\sigma = \zeta^w_e = 0.$$

Расщепляя определяющие уравнения (16), имеем

$$\begin{gathered}\xi_t = 0, \qquad \eta_x = 0, \qquad \zeta^\theta_v = \zeta^\theta_\sigma = \zeta^\theta_e = \zeta^\theta_w = 0, \qquad \zeta^w_v = \zeta^w_\sigma = \zeta^w_e = \zeta^w_\theta = 0,\\ \zeta^\theta_{\theta\theta} = 0, \qquad 2\zeta^\theta_{x\theta} - \xi_{xx} = 0, \qquad \zeta^\theta_{xx} - \zeta^w_t = 0, \qquad \zeta^\theta_\theta - \zeta^w_w + 2\xi_x + \eta_t = 0.\end{gathered} \qquad (25)$$

Интегрируя переопределенную систему уравнений (20), (25), получаем

$$\begin{gathered}\xi = c_1x + c_2, \qquad \eta = c_3t + c_4, \qquad \zeta^v = -v(c_1 - c_5) + \lambda_{xt},\\ \zeta^\sigma = -\sigma(c_3 - c_5) + \lambda_{tt}, \qquad \zeta^e = -e(2c_1 - c_3 - c_5) + \lambda_{xx},\\ \zeta^\theta = c_6\theta + \mu_t, \qquad \zeta^w = (c_6 - 2c_1 + c_3)w + \mu_{xx}.\end{gathered} \qquad (26)$$

Здесь c_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$) — произвольные постоянные; $\lambda = \lambda(t,x)$, $\mu = \mu(t,x)$ — произвольные функции двух аргументов.

3.2. *Случай* 4. В данном случае предполагается, что существуют функции $q_1(t)$, $h_1(t)$, такие что $c(t,s) = q_1(t)L(t,s)$ и $G(t,s) = h_1(t)L(t,s)$. Основными уравнениями являются уравнения (4). Опуская преобразования, сходные с преобразованиями для случая 1, получаем следующие результаты решения определяющих уравнений (15), (16).

Пусть $h_1q_1 - 1 = 0$ и $Eq_1 - 1 \ne 0$. Если $q_1' \ne 0$, то из определяющих уравнений (15), (16) получаем (26). Если q_1 постоянна, то из определяющих уравнений (15), (16) следуют соотношения

$$\begin{gathered}\xi = c_1x + c_2, \qquad \eta = c_3t + c_4, \qquad \zeta^v = -v(c_1 - c_5) + \lambda_{xt},\\ \zeta^\sigma = -\sigma(c_3 - c_5) + K(t,\tau) + \lambda_{tt}, \qquad \zeta^e = -e(2c_1 - c_3 - c_5) + \lambda_{xx},\\ \zeta^\theta = c_6\theta + \mu_t, \qquad \zeta^w = (c_6 - 2c_1 + c_3)w + \mu_{xx},\end{gathered} \qquad (27)$$

где c_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$) — произвольные постоянные; $K(t,\tau)$, $\lambda(t,x)$, $\mu(t,x)$ — произвольные функции двух аргументов; $\tau = -q_1\sigma + (1 - q_1)\theta + (Eq_1 - 1)e + w$; $K(t,0) = 0$.

Замечание 1. Если $K(t,\tau)=0$, то уравнения (27) превращаются в уравнения (26).

Пусть $h_1=E$, $q_1=1/E$. Тогда из определяющих уравнений (15), (16) получаем

$$\xi=c_7t+c_1x+c_2,\qquad \eta=c_3t+c_4,\qquad \zeta^v=-c_7e-(c_1-c_5)v+\lambda_{xt},$$
$$\zeta^e=-(2c_1-c_3-c_5)e+\lambda_{xx},\qquad \zeta^\sigma=-(c_3-c_5)\sigma-2c_7v+K_1(t,\nu)+\lambda_{tt},\tag{28}$$
$$\zeta^\theta=((1-q_1)c_7x/2+c_6)\theta+\mu_t,\qquad \zeta^w=c_7q_1v+((1-q_1)c_7x/2+c_6-2c_1+c_3)w+\mu_{xx}.$$

Здесь c_i $(i=1,2,\ldots,7)$ — произвольные постоянные; $K_1(t,\nu)$, $\lambda(t,x)$, $\mu(t,x)$ — произвольные функции двух аргументов; $\nu=-q_1\sigma+(1-q_1)\theta+w$; $K_1(t,0)=0$.

В остальных случаях из определяющих уравнений (15), (16) следуют уравнения (26).

4. Анализ определяющих уравнений (13), (14). В данном пункте исследуются определяющие уравнения (13), (14), связанные с интегродифференциальными уравнениями системы (3). Из уравнений (6) следует, что в точке $x=x_0$

$$W^\sigma=\zeta^\sigma-\xi v_0'-\eta(f_0'-g_0'),\qquad W^e=\zeta^e-\xi e_1-\eta e_0',$$
$$W^\theta=\zeta^\theta-\xi\theta_1-\eta\theta_0',\qquad W^w=\zeta^w-\xi(k_1+p_1)-\eta(f_1'+g_1').$$

Если ввести обозначение

$$z_0=\zeta^\sigma+2v\xi_t,$$

то определяющее уравнение (13) примет вид

$$z_0-E\zeta^e+\zeta^\theta-\int\limits_0^t G(t,s)\zeta^e(s)\,ds+\int\limits_0^t L(t,s)\zeta^\theta(s)\,ds-$$
$$-2v_0\xi_t-\xi v_0'+E\xi e_1-\xi\theta_1+\int\limits_0^t G(t,s)\xi(s)e_1(s)\,ds-\int\limits_0^t L(t,s)\xi(s)\theta_1(s)\,ds-$$
$$-\eta(f_0'-g_0')+E\eta e_0'-\eta\theta_0'+\int\limits_0^t G(t,s)\eta(s)e_0'(s)\,ds-\int\limits_0^t L(t,s)\eta(s)\theta_0'(s)\,ds=0.\tag{29}$$

Учитывая соотношения

$$v_0'=Ee_1-\theta_1+\int\limits_0^t G(t,s)e_1(s)\,ds-\int\limits_0^t L(t,s)\theta_1(s)\,ds,$$

$$f_0'-g_0'=Ee_0'-\theta_0'+G(t,t)e_0-L(t,t)\theta_0+\int\limits_0^t G_t(t,s)e_0(s)\,ds-\int\limits_0^t L_t(t,s)\theta_0(s)\,ds$$

и интегрируя по частям $\int\limits_0^t G(t,s)\eta(s)e_0'(s)\,ds$, $\int\limits_0^t L(t,s)\eta(s)\theta_0'(s)\,ds$, определяющее уравнение (29) можно записать в виде

$$z_0-E\zeta^e+\zeta^\theta-\int\limits_0^t G(t,s)\zeta^e(s)\,ds+\int\limits_0^t L(t,s)\zeta^\theta(s)\,ds-$$

$$- 2v_0\xi_t + \int\limits_0^t G(t,s)[\xi(s) - \xi(t)]e_1(s)\,ds - \int\limits_0^t L(t,s)[\xi(s) - \xi(t)]\theta_1(s)\,ds -$$

$$- G(t,0)\eta(0)e_0(0) - \int\limits_0^t G(t,s)\eta_t(s)e_0(s)\,ds - \int\limits_0^t Z_1(t,s)e_0(s)\,ds +$$

$$+ L(t,0)\eta(0)\theta_0(0) + \int\limits_0^t L(t,s)\eta_t(s)\theta_0(s)\,ds + \int\limits_0^t Z_2(t,s)\theta_0(s)\,ds = 0, \qquad (30)$$

где $Z_1(t,s) = G_t(t,s)\eta(t) + G_s(t,s)\eta(s)$; $Z_2(t,s) = L_t(t,s)\eta(t) + L_s(t,s)\eta(s)$. Аналогично определяющее уравнение (14) сводится к уравнению

$$\zeta^w - \zeta^e - \zeta^\theta - \int\limits_0^t L(t,s)\zeta^e(s)\,ds - \int\limits_0^t c(t,s)\zeta^\theta(s)\,ds +$$

$$+ \int\limits_0^t L(t,s)[\xi(s) - \xi(t)]e_1(s)\,ds + \int\limits_0^t c(t,s)[\xi(s) - \xi(t)]\theta_1(s)\,ds -$$

$$- L(t,0)\eta(0)e_0(0) - \int\limits_0^t L(t,s)\eta_t(s)e_0(s)\,ds - \int\limits_0^t Z_2(t,s)e_0(s)\,ds -$$

$$- c(t,0)\eta(0)\theta_0(0) - \int\limits_0^t c(t,s)\eta_t(s)\theta_0(s)\,ds - \int\limits_0^t Z_3(t,s)\theta_0(s)\,ds = 0, \qquad (31)$$

где $Z_3(t,s) = c_t(t,s)\eta(t) + c_s(t,s)\eta(s)$.

Для дальнейшего решения определяющих уравнений (30), (31) нужно исследовать каждый из трех случаев решения определяющих уравнений, связанных с уравнениями в частных производных.

4.1. *Решение* (26). Подставляя уравнения (26) в (30), получаем

$$\lambda_{tt} - E\lambda_{xx} + \mu_t - \int\limits_0^t G(t,s)\lambda_{xx}(s)\,ds + \int\limits_0^t L(t,s)\mu_t(s)\,ds + 2E(c_1 - c_3)e_0 -$$

$$- c_4G(t,0)e_0(0) + (2c_1 - 3c_3)\int\limits_0^t G(t,s)e_0(s)\,ds - \int\limits_0^t Z_1(t,s)e_0(s)\,ds + (c_3 - c_5 + c_6)\theta_0 +$$

$$+ c_4L(t,0)\theta_0(0) + (2c_3 - c_5 + c_6)\int\limits_0^t L(t,s)\theta_0(s)\,ds + \int\limits_0^t Z_2(t,s)\theta_0(s)\,ds = 0, \qquad (32)$$

где

$$\sigma_0 = Ee_0 + \int\limits_0^t G(t,s)e_0(s)\,ds - \theta_0 - \int\limits_0^t L(t,s)\theta_0(s)\,ds.$$

Уравнение (32) должно быть справедливо для любых начальных функций $e_0(t)$ и $\theta_0(t)$. Если выбрать начальные функции $e_0(t) = 0$ и $\theta_0(t) = 0$, то уравнение (32) примет вид

$$\lambda_{tt} - E\lambda_{xx} + \mu_t - \int_0^t G(t,s)\lambda_{xx}(s)\,ds + \int_0^t L(t,s)\mu_t(s)\,ds = 0. \tag{33}$$

Если выбирается функция $\theta_0(t) = 0$, то уравнение (32) записывается в виде

$$2E(c_1 - c_3)e_0 - c_4 G(t,0)e_0(0) + (2c_1 - 3c_3)\int_0^t G(t,s)e_0(s)\,ds - \int_0^t Z_1(t,s)e_0(s)\,ds = 0. \tag{34}$$

Наконец, уравнение (32) сводится к уравнению

$$(c_3 - c_5 + c_6)\theta_0 + c_4 L(t,0)\theta_0(0) + (2c_3 - c_5 + c_6)\int_0^t L(t,s)\theta_0(s)\,ds + \int_0^t Z_2(t,s)\theta_0(s)\,ds = 0. \tag{35}$$

Рассмотрим два случая: $G(t,s) \neq 0$ и $G(t,s) = 0$.

В случае $G(t,s) \neq 0$ можно показать, что существует функция $H_1(t)$, такая что

$$Z_1(t,s) = H_1(t)G(t,s). \tag{36}$$

Рассмотрим начальную функцию

$$e_0(s) = a_1 + a_2 s + s(t-s)[a_3(t-s)^{n_1} + a_4(t-s)^{n_2}].$$

В этом случае

$$e_0(0) = a_1, \qquad e_0(t) = a_1 + a_2 t,$$

$$\int_0^t G(t,s)e_0(s)\,ds = a_1\int_0^t G(t,s)\,ds + a_2\int_0^t sG(t,s)\,ds +$$
$$+ a_3\int_0^t s(t-s)^{n_1+1}G(t,s)\,ds + a_4\int_0^t s(t-s)^{n_2+1}G(t,s)\,ds, \tag{37}$$

$$\int_0^t Z_1(t,s)e_0(s)\,ds = a_1\int_0^t Z_1(t,s)\,ds + a_2\int_0^t sZ_1(t,s)\,ds +$$
$$+ a_3\int_0^t s(t-s)^{n_1+1}Z_1(t,s)\,ds + a_4\int_0^t s(t-s)^{n_2+1}Z_1(t,s)\,ds.$$

Если существуют числа n_i $(i = 1, 2)$, такие что определитель

$$\Delta_2 = \Big(\int_0^t s(t-s)^{n_1+1}G(t,s)\,ds\Big)\Big(\int_0^t s(t-s)^{n_2+1}Z_1(t,s)\,ds\Big) -$$
$$- \Big(\int_0^t s(t-s)^{n_2+1}G(t,s)\,ds\Big)\Big(\int_0^t s(t-s)^{n_1+1}Z_1(t,s)\,ds\Big)$$

не равен нулю, то при заданных значениях $\int\limits_0^t Z_1(t,s)e_0(s)\,ds$, $\int\limits_0^t G(t,s)e_0(s)\,ds$, $e_0(t)$, $e_0(0)$ можно решить уравнения (37) относительно коэффициентов a_1, a_2, a_3, a_4. Таким образом, переменные $e_0(0)$, $e_0(t)$, $\int\limits_0^t G(t,s)e_0(s)\,ds$, $\int\limits_0^t Z_1(t,s)e_0(s)\,ds$ функционально независимы. Это означает, что можно расщепить уравнение (34) относительно этих переменных. Расщепляя уравнение (34), получаем противоречивые соотношения. Следовательно, $\Delta_2 = 0$ при всех n_1 и n_2. Поскольку $G(t,s) \neq 0$, существует функция $H_1(t)$, такая что $Z_1(t,s) = H_1(t)G(t,s)$. С использованием этих соотношений уравнение (34) записывается в виде

$$2E(c_1 - c_3)e_0 - c_4G(t,0)e_0(0) + (2c_1 - 3c_3 - H_1(t))\int\limits_0^t G(t,s)e_0(s)\,ds = 0. \tag{38}$$

Расщепляя (38) относительно $e_0(0)$, $e_0(t)$, $\int\limits_0^t G(t,s)e_0(s)\,ds$, получаем

$$c_1 = c_3, \qquad H_1 = -c_3;$$
$$c_4G(t,0) = 0. \tag{39}$$

Из уравнений (36), (39) следует $c_4 = 0$. Действительно, если $c_4 \neq 0$, то в силу единственности решения задачи Коши для уравнения (36) с начальными данными $G(t,0) = 0$ имеем $G(t,s) = 0$, что противоречит сделанному выше предположению. Следовательно, уравнение (36) принимает вид

$$c_3[tG_t(t,s) + sG_s(t,s) + G(t,s)] = 0.$$

Заметим, что общее решение уравнения

$$tG_t(t,s) + sG_s(t,s) + G(t,s) = 0$$

имеет вид $G(t,s) = (1/t)R(s/t)$. Ядра этого типа не рассматриваются, так как они имеют сингулярность в момент времени $t = 0$. Следовательно,

$$c_3 = 0$$

и уравнение (35) сводится к уравнению

$$(c_6 - c_5)\Big(\theta_0 + \int\limits_0^t L(t,s)\theta_0(s)\,ds\Big) = 0.$$

Так как любая начальная функция $\theta_0(t)$ должна удовлетворять этому уравнению, то

$$c_5 = c_6.$$

В случае $G(t,s) = 0$ предполагается, что $L(t,s) \neq 0$. Можно показать, что, так же как и в случае $G(t,s) \neq 0$, существует функция $H_2(t)$, такая что

$$Z_2(t,s) = H_2(t)L(t,s), \tag{40}$$

и уравнение (35) записывается в виде

$$(c_3 - c_5 + c_6)\theta_0 + c_4 L(t,0)\theta_0(0) + (2c_3 - c_5 + c_6 + H_2(t)) \int\limits_0^t L(t,s)\theta_0(s)\,ds = 0.$$

Расщепляя это уравнение относительно θ_0, $\theta_0(0)$ и $\int\limits_0^t L(t,s)\theta_0(s)\,ds$, получаем

$$c_3 = c_5 - c_6, \qquad H_2 = -c_3, \qquad c_4 L(t,0) = 0. \tag{41}$$

Из (40), (41) находим

$$c_3 = c_4 = 0.$$

Уравнение (34) принимает вид

$$c_1\Big(Ee_0 + \int\limits_0^t G(t,s)e_0(s)\,ds\Big) = 0,$$

откуда следует $c_1 = 0$.

Таким образом, в обоих случаях

$$c_1 = c_3 = c_4 = 0, \qquad c_5 = c_6.$$

В результате подстановки этих равенств и соотношений (26) в определяющее уравнение (31) оно сводится к уравнению

$$\mu_{xx} - \lambda_{xx} - \mu_t - \int\limits_0^t L(t,s)\lambda_{xx}(s)\,ds - \int\limits_0^t c(t,s)\mu_t(s)\,ds = 0. \tag{42}$$

Таким образом, компоненты инфинитезимального оператора имеют вид

$$\xi = c_2, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta^v = c_6 v + \lambda_{xt}, \qquad \zeta^\sigma = c_6\sigma + \lambda_{tt},$$
$$\zeta^e = c_6 e + \lambda_{xx}, \qquad \zeta^\theta = c_6\theta + \mu_t, \qquad \zeta^w = c_6 w + \mu_{xx},$$

что соответствует алгебре Ли L_∞ с генераторами

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = v\,\partial_v + \sigma\,\partial_\sigma + e\,\partial_e + \theta\,\partial_\theta + w\,\partial_w, \\ X_\alpha = \lambda_{tx}\,\partial_v + \lambda_{tt}\,\partial_\sigma + \lambda_{xx}\,\partial_e + \mu_t\,\partial_\theta + \mu_{xx}\,\partial_w, \end{gathered} \tag{43}$$

где $\lambda(t,x)$, $\mu(t,x)$ — решения системы (33), (42). Заметим, что решение $\lambda(t,x) = tx$, $\mu(t,x) = 0$ является тривиальным решением системы (33), (42) и определяет оператор

$$X_3 = \partial_v.$$

4.2. *Решение* (27). Подставляя соотношения (27) в (30), имеем

$$K(t,\tau) + \lambda_{tt} - E\lambda_{xx} + \mu_t - h_1 \int\limits_0^t L(t,s)\lambda_{xx}(s)\,ds + \int\limits_0^t L(t,s)\mu_t(s)\,ds + 2E(c_1 - c_3)e_0 -$$
$$- c_4 h_1 L(t,0)e_0(0) + (2c_1 - 3c_3)h_1 \int\limits_0^t L(t,s)e_0(s)\,ds - h_1 \int\limits_0^t Z_2(t,s)e_0(s)\,ds + (c_3 - c_5 + c_6)\theta_0 +$$
$$+ c_4 L(t,0)\theta_0(0) + (2c_3 - c_5 + c_6) \int\limits_0^t L(t,s)\theta_0(s)\,ds + \int\limits_0^t Z_2(t,s)\theta_0(s)\,ds = 0, \tag{44}$$

где

$$
\begin{gathered}
Z_2(t,s) = L_t(t,s)(c_3t + c_4) + L_s(t,s)(c_3s + c_4), \\
\tau = -q_1\sigma_0 + (1 - q_1)\theta_0 + (Eq_1 - 1)e_0 + w_0 = 2\Big(\theta_0 + q_1\int\limits_0^t L(t,s)\theta_0(s)\,ds\Big).
\end{gathered}
\tag{45}
$$

При выводе уравнения (44) использовались соотношение $1 - h_1q_1 = 0$ и последние два уравнения исходной системы (4).

В силу произвольности $e_0(t)$, $\theta_0(t)$ и предположения $K(t,0) = 0$ уравнение (44) можно расщепить:

$$
\lambda_{tt} - E\lambda_{xx} + \mu_t - h_1\int\limits_0^t L(t,s)\lambda_{xx}(s)\,ds + \int\limits_0^t L(t,s)\mu_t(s)\,ds = 0;
$$

$$
2E(c_1 - c_3)e_0 - c_4h_1L(t,0)e_0(0) + {} \\
{} + (2c_1 - 3c_3)h_1\int\limits_0^t L(t,s)e_0(s)\,ds - h_1\int\limits_0^t Z_2(t,s)e_0(s)\,ds = 0; \tag{46}
$$

$$
K(t,\tau) + (c_3 - c_5 + c_6)\theta_0 + c_4L(t,0)\theta_0(0) + {} \\
{} + (2c_3 - c_5 + c_6)\int\limits_0^t L(t,s)\theta_0(s)\,ds + \int\limits_0^t Z_2(t,s)\theta_0(s)\,ds = 0. \tag{47}
$$

Так как $L(t,s) \neq 0$ и $h_1 \neq 0$, из уравнения (46) следует

$$
c_1 = c_3 = c_4 = 0,
$$

поэтому уравнение (47) приводится к виду

$$
K(t,\tau) + (c_6 - c_5)\Big(\theta_0 + \int\limits_0^t L(t,s)\theta_0(s)\,ds\Big) = 0. \tag{48}
$$

Согласно выражению (45) уравнение (48) можно записать в форме

$$
K(t,\tau) = \frac{c_5 - c_6}{2q_1}\,\tau + (c_5 - c_6)\Big(1 - \frac{1}{q_1}\Big)\theta_0.
$$

Так как переменные θ_0 и τ функционально независимы, из этого уравнения следует

$$
(c_5 - c_6)\Big(1 - \frac{1}{q_1}\Big) = 0, \qquad K(t,\tau) = \frac{c_5 - c_6}{2}\,\tau.
$$

Если $q_1 \neq 1$, то $c_5 = c_6$ и $K(t,\tau) = 0$. Если $q_1 = 1$, то из уравнения (31) и последнего уравнения исходной системы (4) получаем уравнение (42) и равенство

$$
c_5 = c_6.
$$

Следовательно, допускаемая алгебра Ли определяется операторами X_1, X_2, X_α (см. (43)).

4.3. *Решение* (28). В силу произвольности функций $v_0(t)$ и $\theta_1(t)$ можно положить $v_0(t) = 0$, $\theta_1(t) = 0$. Тогда уравнение (30) принимает вид

$$z_0 - E\zeta^e + \zeta^\theta - \int_0^t G(t,s)\zeta^e(s)\,ds + \int_0^t L(t,s)\zeta^\theta(s)\,ds -$$

$$- G(t,0)\eta(0)e_0(0) - \int_0^t G(t,s)\eta_t(s)e_0(s)\,ds - \int_0^t Z_1(t,s)e_0(s)\,ds +$$

$$+ L(t,0)\eta(0)\theta_0(0) + \int_0^t L(t,s)\eta_t(s)\theta_0(s)\,ds + \int_0^t Z_2(t,s)\theta_0(s)\,ds = 0. \quad (49)$$

Вычитая (49) из (30), получаем

$$-2v_0\xi_t + \int_0^t G(t,s)[\xi(s) - \xi(t)]e_1(s)\,ds - \int_0^t L(t,s)[\xi(s) - \xi(t)]\theta_1(s)\,ds = 0. \quad (50)$$

Заметим, что при выборе функций $v_0(t) = 1/2$ и $\theta_1(t) = 0$ $e_1(t)$ обращается в нуль. При этом уравнение (50) принимает вид $\xi_t = 0$ и, следовательно,

$$c_7 = 0.$$

Таким образом, соотношения (28) записываются в виде

$$\xi = c_1x + c_2, \qquad \eta = c_3t + c_4, \qquad \zeta^v = -(c_1 - c_5)v + \lambda_{xt},$$
$$\zeta^e = -(2c_1 - c_3 - c_5)e + \lambda_{xx}, \qquad \zeta^\sigma = -(c_3 - c_5)\sigma + K_1(t,\nu) + \lambda_{tt},$$
$$\zeta^\theta = c_6\theta + \mu_t, \qquad \zeta^w = (c_6 - 2c_1 + c_3)w + \mu_{xx}.$$

Дальнейший анализ уравнения (49) аналогичен анализу уравнения (44). В результате получаем то же утверждение: допускаемая алгебра Ли определяется операторами X_1, X_2, X_α.

5. Частично инвариантные решения. Частично инвариантные решения рассматриваются относительно следующих подалгебр допускаемой алгебры Ли $\{X_1, X_2, X_\alpha\}$:

$$\{X_1, X_2\}, \qquad \{X_1, X_2, X_3\}.$$

5.1. *Подалгебра* $\{X_1, X_2\}$. Инвариантами данной подалгебры являются величины σ/v, e/v, θ/v, w/v, t. Можно показать, что не существует инвариантных решений, соответствующих этой подалгебре, тогда как частично инвариантное решение существует и имеет вид

$$\sigma = vU(t), \qquad e = vR(t), \qquad \theta = vH(t), \qquad w = vW(t), \quad (51)$$

где функция $v(t,x)$ является параметрической. Для этого частично инвариантного решения $\rho = 1$, $\delta = 1$. Подставляя (51) в уравнения (3), получаем

$$v_x(t,x)U(t) = v_t(t,x); \quad (52)$$

$$v_t(t,x)R(t) + v(t,x)R'(t) = v_x(t,x); \quad (53)$$

$$v_{xx}(t,x)H(t) = v_t(t,x)W(t) + v(t,x)W'(t),$$

$$v(t,x)U(t) = Ev(t,x)R(t) + \int\limits_0^t G(t,s)v(s,x)R(s)\,ds - {} \tag{54}$$
$$- v(t,x)H(t) - \int\limits_0^t L(t,s)v(s,x)H(s)\,ds,$$
$$v(t,x)W(t) = v(t,x)R(t) + \int\limits_0^t L(t,s)v(s,x)R(s)\,ds + v(t,x)H(t) + \int\limits_0^t c(t,s)v(s,x)H(s)\,ds.$$

В силу (52) функция $v(t,x)$ может быть представлена в виде

$$v(t,x) = \varphi(\lambda),$$

где φ — произвольная функция; $\lambda = x + K(t)$; функция $K(t)$ удовлетворяет соотношению $K'(t) = U(t)$. Так как при $\varphi(\lambda) = 0$ частично инвариантное решение (51) сводится к тривиальному решению, можно положить $\varphi(\lambda) \neq 0$. Уравнение (53) принимает вид

$$\frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)}\,(1 - U(t)R(t)) = R'(t). \tag{55}$$

Дифференцируя это тождество по x, получаем

$$\Big(\frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)}\Big)'(1 - U(t)R(t)) = 0.$$

Случай $(\varphi'(\lambda)/\varphi(\lambda))' = 0$ рассмотрен в [15]. В данной работе предполагается, что $U(t)R(t) = 1$. Из уравнения (54) следует, что $U(t) = a$, $R(t) = a^{-1}$, где $a \neq 0$ — постоянная. Тогда без потери общности получаем

$$K(t) = at, \qquad \lambda = x + at.$$

Уравнения (54) сводятся к уравнениям для неизвестных функций $\varphi(\lambda)$, $H(t)$, $W(t)$:

$$\varphi''(\lambda)H(t) = a\varphi'(\lambda)W(t) + \varphi(\lambda)W'(t); \tag{56}$$

$$a\varphi(\lambda) = Ea^{-1}\varphi(\lambda) + a^{-1}\int\limits_0^t G(t,s)\varphi(\lambda(s))\,ds - \varphi(\lambda)H(t) - \int\limits_0^t L(t,s)\varphi(\lambda(s))H(s)\,ds,$$
$$\varphi(\lambda)W(t) = a^{-1}\varphi(\lambda) + a^{-1}\int\limits_0^t L(t,s)\varphi(\lambda(s))\,ds + \varphi(\lambda)H(t) + \int\limits_0^t c(t,s)\varphi(\lambda(s))H(s)\,ds, \tag{57}$$

где $\lambda(s) = x + as$.

При фиксированном значении t уравнение (56) становится обыкновенным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами для функции $\varphi(\lambda)$ (аналогичное уравнение получено в [15]). Общее решение этого уравнения зависит от коэффициентов и может иметь один из следующих трех видов:

$$\varphi(\lambda) = C_1\exp(\alpha_1\lambda) + C_2\exp(\alpha_2\lambda), \qquad \alpha_1 \neq \alpha_2; \tag{58}$$
$$\varphi(\lambda) = (C_1 + C_2\lambda)\exp(\alpha\lambda); \tag{59}$$
$$\varphi(\lambda) = (C_1\cos(\beta\lambda) + C_2\sin(\beta\lambda))\exp(\alpha\lambda). \tag{60}$$

Здесь α, β, α_i, C_i $(i = 1, 2)$ — постоянные. Дальнейший анализ уравнений (56) для всех этих видов функции $\varphi(\lambda)$ проводится аналогично. В качестве примера рассмотрим решение в виде (59).

Из уравнения (56) следует

$$C_1(\alpha^2 H(t) - a\alpha W(t) - W'(t)) + C_2\lambda(\alpha^2 H(t) - a\alpha W(t) - W'(t)) + C_2(2\alpha H(t) - aW(t)) = 0.$$

Так как $\lambda = x + at$, то, расщепляя последнее уравнение относительно x, получаем

$$C_2(\alpha^2 H(t) - a\alpha W(t) - W'(t)) = 0;$$
$$C_1(\alpha^2 H(t) - a\alpha W(t) - W'(t)) + C_2(2\alpha H(t) - aW(t)) = 0. \quad (61)$$

Если $C_2 = 0$, то $C_1 \neq 0$ и $\varphi(\lambda) = C_1 \exp(\alpha\lambda)$. Из уравнения (61) получаем обыкновенное линейное дифференциальное уравнение первого порядка для функции $W(t)$:

$$W'(t) + a\alpha W(t) = \alpha^2 H(t).$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$W(t) = \exp(-a\alpha t)(\bar{H}(t) + C_3),$$

где C_3 — постоянная; функция $\bar{H}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\bar{H}'(t) = \alpha^2 H(t) \exp(a\alpha t). \quad (62)$$

Первое уравнение (57) принимает вид

$$a^2 \exp(a\alpha t) = E \exp(a\alpha t) + \int\limits_0^t G(t, s) \exp(a\alpha s)\, ds - \\ - a \exp(a\alpha t) H(t) - a \int\limits_0^t L(t, s) \exp(a\alpha s) H(s)\, ds.$$

Это уравнение определяет функцию $H(t)$. Интегрируя правую часть уравнения (62), получаем функции $\bar{H}(t)$ и $W(t)$. Из второго уравнения (57) следует условие совместности

$$a(\bar{H}(t) + C_3) = \exp(a\alpha t) + \int\limits_0^t L(t, s) \exp(a\alpha s)\, ds + \\ + a \exp(a\alpha t) H(t) + a \int\limits_0^t c(t, s) \exp(a\alpha s) H(s)\, ds.$$

Если $C_2 \neq 0$, то

$$\alpha^2 H(t) - a\alpha W(t) - W'(t) = 0, \qquad 2\alpha H(t) - aW(t) = 0.$$

Из этих уравнений находим

$$W(t) = (2\alpha/a) H(t), \qquad 2\alpha H'(t) = -a\alpha^2 H(t). \quad (63)$$

Если $\alpha = 0$, то $W(t) = 0$ и $\varphi(\lambda) = C_1 + C_2\lambda$ (без потери общности можно положить $C_1 = 0$). Подставляя эти значения в уравнения (57), получаем условия совместности

$$\int\limits_0^t G(t, s)\, ds - aH(t) - a \int\limits_0^t L(t, s) H(s)\, ds = a^2 - E,$$

$$\int_0^t L(t,s)\,ds + a\int_0^t c(t,s)H(s)\,ds = -1 - aH(t),$$

$$\int_0^t (t-s)(G(t,s) - aL(t,s)H(s))\,ds = 0, \qquad \int_0^t (t-s)\big(L(t,s) + ac(t,s)H(s)\big)\,ds = 0,$$

являющиеся ограничениями на функции $H(t)$, $G(t,s)$, $L(t,s)$, $c(t,s)$.

Рассмотрим случай $\alpha \ne 0$. Из уравнений (63) следует

$$H(t) = C_3 \exp{(rt)}, \qquad W(t) = (2C_3\alpha/a)\exp{(rt)},$$

где C_3 — постоянная; $r = -a\alpha/2$. Из уравнений (57) получаем условия совместности

$$a^2 t \exp{(-2rt)} = Et \exp{(-2rt)} + \int_0^t G(t,s)s \exp{(-2rs)}\,ds -$$

$$- aC_3 t \exp{(-rt)} - aC_3 \int_0^t L(t,s)s\exp{(-rs)}\,ds,$$

$$2\alpha C_3 t \exp{(-rt)} = t\exp{(-2rt)} + \int_0^t L(t,s)s\exp{(-2rs)}\,ds +$$

$$+ aC_3 t\exp{(-rt)} + aC_3\int_0^t c(t,s)s\exp{(-rs)}\,ds,$$

$$C_1 \int_0^t (t-s)\exp{(-2rs)}(G(t,s) - aC_3 L(t,s)\exp{(rs)})\,ds = 0,$$

$$C_1 \int_0^t (t-s)\exp{(-2rs)}(L(t,s) + aC_3 c(t,s)\exp{(rs)})\,ds = 0,$$

являющиеся ограничениями на функции $G(t,s)$, $L(t,s)$, $c(t,s)$. Если $C_1 = 0$, то количество условий уменьшается до двух.

Замечание 2. Инвариантные решения типа бегущих волн — это решения, которые обычно используются в механике сплошной среды. Набор инвариантных решений системы (3) представляет собой решения вида

$$\sigma = U(t)\exp{(y)}, \qquad v = V(t)\exp{(y)},$$

$$e = R(t)\exp{(y)}, \qquad \theta = H(t)\exp{(y)}, \qquad w = W(t)\exp{(y)},$$

где $y = \mu x$. Так как система (3) не допускает решений этого типа, решения вида (51) могут рассматриваться как расширение решений типа бегущих волн для системы (3).

5.2. *Подалгебра* $\{X_1, X_2, X_3\}$. Инвариантами данной подалгебры являются величины e/σ, θ/σ, w/σ, t. Частично инвариантное решение имеет представление

$$e = \sigma R(t), \qquad \theta = \sigma H(t), \qquad w = \sigma W(t), \tag{64}$$

где функция $\sigma(t,x)$ является параметрической. Для этого частично инвариантного решения $\rho = 1$, $\delta = 2$. Так как $\delta = 2$, то анализ совместности является более сложным, чем в случае, рассмотренном в подп. 5.1.

В результате подстановки представления решения (64) в уравнения (3) они принимают вид

$$\sigma_x(t,x) = v_t(t,x); \tag{65}$$

$$\sigma_t(t,x)R(t) + \sigma(t,x)R'(t) = v_x(t,x), \quad \sigma_{xx}(t,x)H(t) = \sigma_t(t,x)W(t) + \sigma(t,x)W'(t); \tag{66}$$

$$\begin{gathered}\sigma(t,x) = E\sigma(t,x)R(t) + \int\limits_0^t G(t,s)\sigma(s,x)R(s)\,ds - \sigma(t,x)H(t) - \int\limits_0^t L(t,s)\sigma(s,x)H(s)\,ds,\\ \sigma(t,x)W(t) = \sigma(t,x)R(t) + \int\limits_0^t L(t,s)\sigma(s,x)R(s)\,ds + \sigma(t,x)H(t) + \int\limits_0^t c(t,s)\sigma(s,x)H(s)\,ds.\end{gathered} \tag{67}$$

Если $\sigma = 0$, то $e = \theta = w = 0$ и функция v постоянна. Это решение является тривиальным, поэтому полагаем $\sigma \neq 0$.

Из уравнений (65), (66) следует

$$R(t)H(t)\sigma_{tt}(t,x) + P(t)\sigma_t(t,x) + Q(t)\sigma(t,x) = 0, \tag{68}$$

где $P(t) = 2R'(t)H(t) - W(t)$; $Q(t) = R''(t)H(t) - W'(t)$.

Уравнение (68) является обыкновенным линейным дифференциальным уравнением второго порядка для функции $\sigma(t,x)$. Рассмотрим решение с разделением переменных

$$\sigma(t,x) = V'(t)K(x),$$

где $V(t)$, $K(x)$ — некоторые функции. Общее решение (65) имеет вид

$$v(t,x) = V(t)K'(x) + M(x),$$

где $M(x)$ — функция интегрирования. Уравнения (66) принимают вид

$$M'(x) = \tilde{R}'(t)K(x) - V(t)K''(x); \tag{69}$$

$$\tilde{H}(t)K''(x) = \tilde{W}'(t)K(x), \tag{70}$$

где $\tilde{R}(t) = V'(t)R(t)$; $\tilde{H}(t) = V'(t)H(t)$, $\tilde{W}(t) = V'(t)W(t)$. Дифференцируя уравнение (69) по t и используя условие $\sigma \neq 0$, получаем

$$\frac{K''(x)}{K(x)} = \frac{\tilde{R}''(t)}{V'(t)}.$$

Поэтому существует постоянная a, такая что

$$\frac{K''(x)}{K(x)} = a, \qquad \frac{\tilde{R}''(t)}{V'(t)} = a. \tag{71}$$

Из уравнений (69)–(71) следует

$$M'(x) = bK(x),$$

$$\tilde{R}'(t) = aV(t) + b, \qquad \tilde{W}'(t) = a\tilde{H}(t),$$

где b — постоянная.

Общее решение первого уравнения (71) имеет вид

$$K(x) = \begin{cases} C_1 + C_2 x, & a = 0, \\ C_1 \exp(-\sqrt{a}\,x) + C_2 \exp(\sqrt{a}\,x), & a > 0, \\ C_1 \cos(\sqrt{-a}\,x) + C_2 \sin(\sqrt{-a}\,x), & a < 0, \end{cases} \tag{72}$$

где C_i $(i = 1, 2)$ — произвольные постоянные.

Уравнения (67) принимают вид

$$V'(t) = E\tilde{R}(t) + \int\limits_0^t G(t,s)\tilde{R}(s)\,ds - \tilde{H}(t) - \int\limits_0^t L(t,s)\tilde{H}(s)\,ds; \tag{73}$$

$$\tilde{W}(t) = \tilde{R}(t) + \int\limits_0^t L(t,s)\tilde{R}(s)\,ds + \tilde{H}(t) + \int\limits_0^t c(t,s)\tilde{H}(s)\,ds. \tag{74}$$

Таким образом, имеем

$$v = V(t)K'(x) + b\int K(x)\,dx, \qquad \sigma = V'(t)K(x),$$

$$e = \tilde{R}(t)K(x), \qquad \theta = \tilde{H}(t)K(x), \qquad w = \tilde{W}(t)K(x),$$

где функция $K(x)$ определена в (72).

Если $a = 0$, то $\tilde{R}(t) = bt + b_0$, $\tilde{W}(t) = c_0$, где b_0, c_0 — постоянные. Функция $\tilde{H}(t)$ определяется единственным образом интегральным уравнением Вольтерры второго рода (74). Если функция $\tilde{H}(t)$ найдена, то, интегрируя правую часть (73), получаем функцию $V(t)$.

Если $a \neq 0$, то

$$V(t) = a^{-1}(\tilde{R}'(t) - b), \qquad \tilde{H}(t) = a^{-1}\tilde{W}'(t)$$

и уравнения (73) принимают вид

$$a^{-1}\tilde{R}''(t) = E\tilde{R}(t) + \int\limits_0^t G(t,s)\tilde{R}(s)\,ds - a^{-1}\tilde{W}'(t) - a^{-1}\int\limits_0^t L(t,s)\tilde{W}'(s)\,ds,$$

$$\tilde{W}(t) = \tilde{R}(t) + \int\limits_0^t L(t,s)\tilde{R}(s)\,ds + a^{-1}\tilde{W}'(t) + a^{-1}\int\limits_0^t c(t,s)\tilde{W}'(s)\,ds.$$

Эти уравнения являются интегродифференциальными уравнениями для двух функций $\tilde{R}(t)$ и $\tilde{W}(t)$ одной независимой переменной t.

Заключение. В работе представлено решение определяющих уравнений для системы (3). При решении этих уравнений доказано два предложения, согласно которым исследование уравнений сводится к изучению четырех случаев. Показано, что в каждом случае общее решение определяющих уравнений (3) соответствует алгебре Ли с операторами X_1, X_2, X_α. С использованием двух подалгебр $\{X_1, X_2\}$ и $\{X_1, X_2, X_3\}$ исследованы два класса частично инвариантных решений уравнений (3).

Авторы выражают благодарность Э. Шульцу за полезные комментарии.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. **Григорьев Ю. Н., Мелешко С. В.** Исследование инвариантных решений нелинейного кинетического уравнения Больцмана и его моделей / Сиб. отд-ние АН СССР. Ин-т теорет. и прикл. механики. Препр. Новосибирск, 1986.
3. **Григорьев Ю. Н., Мелешко С. В.** Групповой анализ интегродифференциального уравнения Больцмана // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297, № 2. С. 323–327.
4. **Meleshko S. V.** Methods for constructing exact solutions of partial differential equations: mathematical and analytical techniques with applications to engineering. N. Y.: Springer Sci. and Business Media, Inc., 2005.
5. **Grigoriev Yu. N., Ibragimov N. H., Kovalev V. F., Meleshko S. V.** Symmetries of integro-differential equations and their applications in mechanics and plasma physics. Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. (Lecture Notes in Physics; V. 806).
6. **Мелешко С. В.** Групповые свойства уравнений движения вязкоупругой среды // Моделирование в механике. 1988. Т. 2, № 4. С. 114–126.
7. **Zhou L. Q., Meleshko S. V.** Group analysis of integro-differential equations describing stress relaxation behavior of one-dimensional viscoelastic materials // Intern. J. Non-Linear Mech. 2015. V. 77. P. 223–231.
8. **Lin F. B., Flood A. E., Meleshko S. V.** Exact solutions of population blance equation // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2016. V. 36. P. 378–390.
9. **Овсянников Л. В.** Частичная инвариантность // Докл. АН СССР. 1969. Т. 186. С. 22–25.
10. **Овсянников Л. В., Чупахин А. П.** Регулярные частично инвариантные подмодели уравнений газовой динамики // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, № 6. С. 990–999.
11. **Handbook** of Lie group analysis of differential equations. Boca Raton: CRC Press, 1994. V. 1.
12. **Handbook** of Lie group analysis of differential equations. Boca Raton: CRC Press, 1995. V. 2.
13. **Handbook** of Lie group analysis of differential equations. Boca Raton: CRC Press, 1996. V. 3.
14. **Мелешко С. В., Пухначев В. В.** Об одном классе частично инвариантных решений уравнений Навье — Стокса // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 24–33.
15. **Zhou L. Q., Meleshko S. V.** Invariant and partially invariant solutions of integro-differential equations for a linear thermoviscoelastic aging material with memory // Continuum Mech. Thermodyn. 2017. V. 29. P. 207–224.
16. **Navarro C. B.** Asymptotic stability in linear thermoviscoelasticity // J. Math. Anal. Appl. 1978. V. 65. P. 399–431.

Поступила в редакцию 30/VI 2016 г.,
в окончательном варианте — 28/VIII 2016 г.