

УСТОЙЧИВОСТЬ И РАСПАД ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ В ГАЗОВОЙ СРЕДЕ

В. А. Бородин, Ю. Ф. Дитякин, В. И. Ягодкин

(Москва)

Пленка жидкости, вытекающая из сопла центробежной форсунки, вблизи от него имеет приблизительно цилиндрическую форму.

Ее распад обычно также происходит близко от сопла и для его предварительного теоретического изучения целесообразно поставить задачу об устойчивости цилиндрической пленки жидкости при движении ее в неподвижной газовой среде.

1. Рассмотрим цилиндрическую пленку идеальной жидкости, окруженную другой идеальной жидкостью (фиг. 1) с наружным радиусом a и внутренним — b . Будем считать, что жидкость движется поступательно по оси x со скоростью V , а жидкость среды (снаружи и внутри пленки) — неподвижна.

Введем систему цилиндрических координат (r, φ, x) , направив ось x по оси пленки, а ось r — по ее радиусу. Обозначим через

$$\Phi_k = \Phi_k(r, \varphi, x, t) \quad (k=1, 2, 3) \quad (1.1)$$

потенциалы скорости жидкости пленки и среды. Индекс $k=1$ относится к жидкости пленки, индексы $k=2$ и $k=3$ — к жидкости среды снаружи и внутри пленки соответственно.

Плотности жидкости пленки и среды обозначим через ρ_1 и ρ_2 .

Потенциал скорости Φ_k должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_k}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (1.2)$$

Составляющие скорости течения будут иметь вид

$$V_{xk} = V_k + v_{xk}, \quad V_{rk} = v_{rk}, \quad V_{\varphi k} = v_{\varphi k}, \quad V_1 = V, \quad V_2 = V_3 = 0$$

$$v_{\varphi k} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_k}{\partial \varphi}, \quad v_{xk} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial x}, \quad v_{rk} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial r} \quad (k=1, 2, 3) \quad (1.3)$$

Решение уравнения (1.2) представим в следующем виде:

$$\Phi_k(r, \varphi, x, t) = f_k(r) e^{i(\alpha x + s\varphi - \beta t)} \quad (\alpha = 2\pi/\lambda, \beta = \beta_r + i\beta_i) \quad (k=1, 2, 3) \quad (1.4)$$

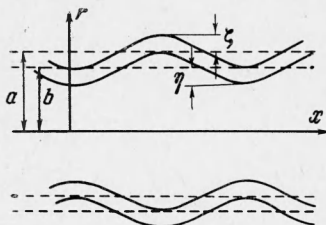
Здесь α — пространственная круговая частота колебаний (волновое число), λ — длина волны наложенного возмущения, β — комплексная частота колебаний по времени. Подставив (1.4) в (1.2), получим

$$f_k'' + \frac{1}{r} f_k' - \left(\alpha^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) f_k = 0 \quad (k=1, 2, 3) \quad (1.5)$$

решение которого имеет вид

$$f_k = A_k I_s(\alpha r) + B_k K_s(\alpha r) \quad (k=1, 2, 3) \quad (1.6)$$

где A_k, B_k — произвольные постоянные, а $I_s(x), K_s(x)$ — функции Бесселя порядка s мнимого аргумента.



Фиг. 1

Исходя из условий конечности скоростей при $r = 0$ и $r = \infty$, потенциалы скорости для движения жидкости в пелене и окружающей среде напомним следующим образом:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= e^{i(\alpha x + s\varphi - \beta t)} [A_1 I_s(\alpha r) + B_1 K_s(\alpha r)] \\ \Phi_2 &= e^{i(\alpha x + s\varphi - \beta t)} B_2 K_s(\alpha r), \quad \Phi_3 = e^{i(\alpha x + s\varphi - \beta t)} A_3 I_s(\alpha r)\end{aligned}\quad (1.7)$$

2. На границе пелены жидкости и среды потребуем выполнения следующих условий.

На наружной и внутренней поверхности пелены разность давлений должна уравниваться давлением поверхностного натяжения

$$\begin{aligned}p_2 - p_1 &= \sigma \left[-\frac{1}{a} + \frac{\xi}{a^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} \right] \quad \text{при } r = a \\ p_3 - p_1 &= \sigma \left[\frac{1}{b} - \frac{\eta}{b^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \varphi^2} \right] \quad \text{при } r = b\end{aligned}\quad (2.1)$$

Здесь p_1, p_2, p_3 — давления в жидкостях пелены, наружной и внутренней среды соответственно, σ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости пелены относительно жидкости среды, ξ и η — отклонения частиц жидкости от наружной и внутренней поверхностей невозмущенной пелены (фиг. 1) соответственно, причем

$$r_1 = a + \xi, \quad r_2 = b + \eta \quad (2.2)$$

Выражения для давлений получим из интеграла Лагранжа — Коши в виде

$$\begin{aligned}\frac{p_1}{\rho_1} &= - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + V \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right) + \frac{p_0}{\rho_1}, \quad \frac{p_2}{\rho_2} = - \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + \frac{p_0}{\rho_2} - \frac{\sigma}{a \rho_2}, \\ \frac{p_3}{\rho_2} &= \frac{\partial \Phi_3}{\partial t} + \frac{p_0}{\rho_2} + \frac{\sigma}{b \rho_2}\end{aligned}\quad (2.3)$$

Здесь p_0 — давление жидкости невозмущенной пелены.

Положим, что отклонения ξ и η — периодические функции t и x следующего вида:

$$\xi = \xi^\circ e^{i(\alpha x + s\varphi - \beta t)}, \quad \eta = \eta^\circ e^{i(\alpha x + s\varphi - \beta t)} \quad (2.4)$$

где ξ°, η° — амплитуды отклонений частиц жидкости от наружной и внутренней поверхностей невозмущенной пленки соответственно.

Продифференцировав выражения для потенциала скорости Φ_1, Φ_2 и Φ_3 , из (1.7) получим, после подстановки производных в (2.3), выражения для давлений

$$\begin{aligned}p_1 &= i \rho_1 e^{i(\alpha x + s\varphi - \beta t)} (\beta - \alpha V) [A_1 I_s(\alpha r) + B_1 K_s(\alpha r)] + p_0 \\ p_2 &= i \rho_2 \beta e^{i(\alpha x + s\varphi - \beta t)} B_2 K_s(\alpha r) + p_0 - \sigma / a \\ p_3 &= i \rho_2 \beta e^{i(\alpha x + s\varphi - \beta t)} A_3 I_s(\alpha r) + p_0 + \sigma / b\end{aligned}\quad (2.5)$$

Используя (2.4) и (2.5), из (2.1) получим

$$\begin{aligned}i \rho_2 \beta K_s(\alpha a) B_2 - i \rho_1 (\beta - \alpha V) [A_1 I_s(\alpha a) + B_1 K_s(\alpha a)] + \\ + \sigma \left(\alpha^2 - \frac{1}{a^2} + \frac{s^2}{a^2} \right) \xi^\circ &= 0 \\ i \rho_2 \beta I_s(\alpha b) A_3 - i \rho_1 (\beta - \alpha V) [A_1 I_s(\alpha b) + B_1 K_s(\alpha b)] + \\ + \sigma \left(-\alpha^2 + \frac{1}{b^2} - \frac{s^2}{b^2} \right) \eta^\circ &= 0\end{aligned}\quad (2.6)$$

Полные дифференциалы отклонений частиц жидкости от поверхностей невозмущенной пленки имеют вид

$$d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx + \frac{\partial \zeta}{\partial t} dt, \quad d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial t} dt$$

Отсюда для нормальных составляющих скорости перемещения частиц жидкости на наружной и внутренней поверхностях пленки имеем

$$v_{r1} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} V + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad \text{при } r = a, \quad v_{r1} = \frac{\partial \eta}{\partial x} V + \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{при } r = b$$

$$v_{r2} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad \text{при } r = a, \quad v_{r3} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{при } r = b$$

Учитывая (2.4), получим

$$v_{r1} = i\zeta^\circ e^{i(\alpha x + s\varphi - \beta t)} (\alpha V - \beta), \quad v_{r2} = -i\beta \zeta^\circ e^{i(\alpha x + s\varphi - \beta t)} \quad \text{при } r = a$$

$$v_{r1} = i\eta^\circ e^{i(\alpha x + s\varphi - \beta t)} (\alpha V - \beta), \quad v_{r3} = -i\beta \eta^\circ e^{i(\alpha x + s\varphi - \beta t)} \quad \text{при } r = b \quad (2.7)$$

С другой стороны, воспользовавшись выражениями (1.3) и (1.7), выражения для нормальных скоростей можно написать следующим образом:

$$v_{r1} = \alpha e^{i(\alpha x + s\varphi - \beta t)} [I_s'(\alpha r) A_1 + K_s'(\alpha r) B_1]$$

$$v_{r2} = \alpha e^{i(\alpha x + s\varphi - \beta t)} K_s'(\alpha r) B_2 \quad (2.8)$$

$$v_{r3} = \alpha e^{i(\alpha x + s\varphi - \beta t)} I_s'(\alpha r) A_3$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование функции Бесселя по аргументу. Приравняв правые части равенств (2.7) и (2.8), получим: для наружной поверхности пленки

$$\alpha [I_s'(\alpha a) A_1 + K_s'(\alpha a) B_1] = i\zeta^\circ (\alpha V - \beta), \quad \alpha K_s'(\alpha a) B_2 = -i\beta \zeta^\circ \quad (2.9)$$

для внутренней поверхности пленки

$$\alpha [I_s'(\alpha b) A_1 + K_s'(\alpha b) B_1] = i\eta^\circ (\alpha V - \beta), \quad \alpha I_s'(\alpha b) A_3 = -i\beta \eta^\circ. \quad (2.10)$$

Из (2.9) и (2.10) имеем

$$\zeta^\circ = \frac{\alpha [I_s'(\alpha a) A_1 + K_s'(\alpha a) B_1]}{i(\alpha V - \beta)} = -\frac{\alpha K_s'(\alpha a) B_2}{i\beta}$$

$$\eta^\circ = \frac{\alpha [I_s'(\alpha b) A_1 + K_s'(\alpha b) B_1]}{i(\alpha V - \beta)} = -\frac{\alpha I_s'(\alpha b) A_3}{i\beta} \quad (2.11)$$

Подставив выражения для ζ° , η° из (2.11) в (2.6), получим вместе с уравнениями (2.11) систему четырех линейных, относительно произвольных постоянных, уравнений.

Введя безразмерные параметры

$$Z = \beta \sqrt{\rho_1 a^3 / \sigma}, \quad W = \rho_2 a V^2 / \sigma, \quad M = \rho_2 / \rho_1$$

$$m = \alpha a, \quad n = b\alpha, \quad S = \sqrt{W/M}, \quad \varepsilon = a/b = m/n \quad (2.12)$$

и обозначения

$$A_s(x) = \frac{I_s(x)}{K_s(x)}, \quad A_{s+1}(x) = \frac{I_{s+1}(x)}{-K_{s+1}(x)}, \quad \tau = Z - mS, \quad B(x) = -\frac{K_s'(x)}{K_s(x)} \quad (2.13)$$

получим систему

$$\begin{aligned} ZI'_s(n)A_1 + ZK'_s(n)B_1 + (mS - Z)I'_s(n)A_3 &= 0 \\ ZI'_s(m)A_1 + ZK'_s(m)B_1 + (mS - Z)K'_s(m)B_2 &= 0 \\ Z(mS - Z)I_s(m)A_1 + Z(mS - Z)K_s(m)B_1 + \\ + [MZ^2K_s(m) + m(m^2 - 1 + s^2)K'_s(m)]B_2 &= 0 \\ Z(mS - Z)I_s(n)A_1 + Z(mS - Z)K_s(n)B_1 + \\ + [MZ^2I_s(n) - m(m^2 - \varepsilon^2 + s^2\varepsilon^2)I'_s(n)]A_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Исключив из уравнений однородной системы (2.14) произвольные постоянные, используя обозначения (2.13), получим

$$\begin{vmatrix} A_{s+1}(n) & -1 & 0 & 1 \\ A_{s+1}(m) & -1 & -1 & 0 \\ \tau^2 A_s(m) & \tau^2 & a_{33} & 0 \\ \tau^2 A_s(n) & \tau^2 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.15)$$

$$a_{33} = M(mS + \tau)^2 - m(m^2 - 1 + s^2)B(m)$$

$$a_{44} = M(mS + \tau)^2 \frac{A_s(n)}{A_{s+1}(n)} - m(m^2 - \varepsilon^2 + s^2\varepsilon^2)B(n)$$

Легко видеть, что корни уравнения (2.15) могут быть представлены в виде ряда по степеням величины $M^{1/2}$ (после замены $S = \sqrt{W/M}$)

$$\tau = Z_0 + Z_1 M^{1/2} + Z_2 M + \dots \quad (2.16)$$

Для большинства случаев величина M весьма мала (например, водяная пленка в воздухе, $M = 1.2 \cdot 10^{-3}$), поэтому в разложении (2.16) ограничимся одним членом, положив $\tau = Z_0$. Тогда из (2.15) получим

$$\begin{aligned} [A_s(m) - A_s(n)]Z_0^4 + \{[A_s(n) + A_{s+1}(m)][m^2W + m(1 - m^2 - s^2)B(m)] + \\ + [A_s(m) + A_{s+1}(n)][m^2WA_s(n)/A_{s+1}(n) + m(\varepsilon^2 - m^2 - s^2\varepsilon^2)B(n)]\}Z_0^2 + \\ + [A_{s+1}(m) - A_{s+1}(n)][m^2W + m(1 - m^2 - s^2)B(m)][m^2WA_s(n)/A_{s+1}(n) + \\ + m(\varepsilon^2 - m^2 - s^2\varepsilon^2)B(n)] = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

3. Рассмотрим частные случаи задачи без учета тангенциальных волн, т. е. развитие осесимметричных волн, для чего в (2.17) положим $s = 0$, что дает

$$\begin{aligned} [A_0(m) - A_0(n)]Z_0^4 + \{[A_0(n) + A_1(m)][m^2W + m(1 - m^2)B(m)] + \\ + [A_0(m) + A_1(n)][m^2WA_0(n)/A_1(n) + m(\varepsilon^2 - m^2)B(n)]\}Z_0^2 + \\ + [A_1(m) - A_1(n)] \times \\ \times [m^2W + m(1 - m^2)B(m)][m^2WA_0(n)/A_1(n) + m(\varepsilon^2 - m^2)B(n)] = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Исследуем пленку с внутренней полостью малого диаметра, положив в уравнении (3.1) $\varepsilon = a/b \gg 1$, т. е. $a \gg b$ или $m \gg n$, и пренебрегая в его коэффициентах величинами $A_0(n)$ и $A_1(n)$ по сравнению с функциями m . Тогда получим

$$\begin{aligned} A_0(m)Z_0^4 + \{A_1(m)[m^2W + m(1 - m^2)B(m)] + \\ + A_0(m)[m^2WA_0(n)/A_1(n) + m(\varepsilon^2 - m^2)B(n)]\}Z_0^2 + \\ + A_1(m)[m^2W + m(1 - m^2)B(m)][m^2WA_0(n)/A_1(n) + m(\varepsilon^2 - m^2)B(n)] = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Решая уравнение (3.2) относительно Z_0^2 , будем иметь

$$(Z_0^2)_1 = -A_1(m)/A_0(m)[m^2W + m(1 - m^2)B(m)] \quad (3.3)$$

$$(Z_0^2)_2 = -[m^2WA_0(n)/A_1(n) + m(\varepsilon^2 - m^2)B(n)] \quad (3.4)$$

Корень $(Z_0^2)_1$ дает решение для случая сплошной цилиндрической струи ($b = 0$, $n = 0$). Это решение может быть получено также при помощи соответствующего предельного перехода из уравнения (3.1). Разделив это уравнение на величину

$$m^2W \frac{A_0(n)}{A_1(n)} + m(\varepsilon^2 - m^2)B(n)$$

и устремляя n к нулю, получим уравнение (3.3). Воспользовавшись обозначениями (2.13), из (3.3) получим

$$Z_{0i}^2 = \frac{m^2 W I_1(m) K_0(m) + m(1-m^2) I_1(m) K_1(m)}{I_0(m) K_1(m)} \quad (3.5)$$

что соответствует уравнению, полученному Шехтманом [1]. Кроме того, имеем

$$Z_r = mS \text{ при } Z_0^2 < 0; Z_i = 0, Z_r = mS + Z_0, \text{ при } Z_0^2 > 0$$

На фиг. 2 дан график зависимости квадрата инкремента колебаний Z_{0i}^2 от безразмерного волнового числа m для разных значений критерия Вебера W , вычисленной по формуле (3.5) или (3.3). Пунктиром на том же графике дана зависимость для $(Z_{0i}^2)_2$ от m , вычисленная по (3.4).

Определим приближенно геометрическое место максимума квадрата инкремента колебаний в зависимости от величины числа Вебера W при больших значениях волновых чисел $m \gg 1$.

Воспользуемся асимптотическими формулами для функций Бесселя [2]

$$I_0(x) \approx I_1(x) \approx e^x / \sqrt{2\pi x}$$

$$K_0(x) \approx K_1(x) \approx e^{-x} \sqrt{\pi/2x} \quad (3.6)$$

Из (2.13) при $s = 0$ получим

$$A_1(x)/A_1(x) = 1, B(x) = 1$$

и вместо (3.3) будем иметь для $m \gg 1$

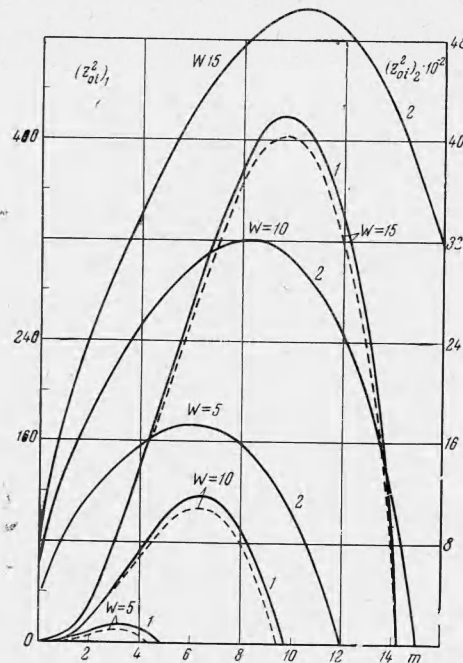
$$(Z_{0i}^2)_1 \approx m^2 W + m(1-m^2) \quad (3.7)$$

Продифференцировав (3.7) и приравняв производную нулю, получим

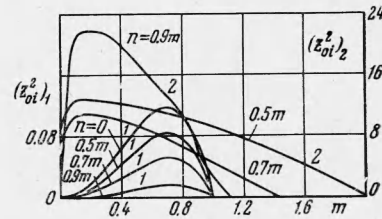
$$2m_0 W + 1 - 3m_0^2 = 0$$

В полученном уравнении можно пренебречь единицей по сравнению с двумя другими большими слагаемыми, что дает

$$m_0 = \sqrt[2]{3} W \quad (3.8)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

где через m_0 обозначено критическое значение волнового числа, соответствующее максимуму квадрата инкремента.

На фиг. 2 дан график зависимости квадрата инкремента колебания $(Z_{0i}^2)_2$ от волнового числа m для разных значений W , вычисленной по формуле (3.4).

Также можно приближенно определить геометрическое место максимума квадрата инкремента $(Z_{0i}^2)_2$ для больших значений волновых чисел. В этом случае:

$$(Z_{0i}^2)_2 = m^2 W + m(\epsilon^2 - m^2)$$

После приравнивания нулю производной $2Wm_0 - 3m_0^2 + \epsilon^2 = 0$, будем иметь

$$m_0 = (W + \sqrt{W + 3\epsilon^2})^{1/2} \quad (3.9)$$

В качестве следующего частного случая рассмотрим случай почти полного отсутствия скорости. Положив в уравнении (3.1) $W = 0$, будем иметь

$$\begin{aligned} [A_0(m) - A_0(n)] Z_0^4 + \{[A_0(n) + A_1(m)] m(1-m^2) B(m) + \\ + [A_0(m) + A_1(n)] m(\epsilon^2 - m^2) B(n)\} Z_0^2 + \\ + [A_1(m) - A_1(n)] m^2(1-m^2)(\epsilon^2 - m^2) B(m) B(n) = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

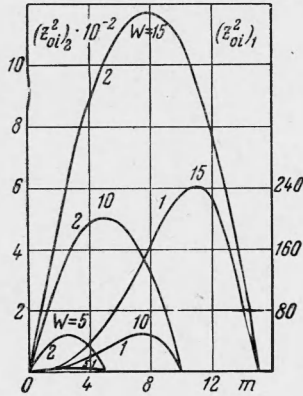
На фиг. 3 даны графики зависимости квадрата инкремента колебаний $(Z_{oi}^2)_1$ от волнового числа для разных толщин пленки, т. е. разных значений параметра ε при $W = 0$, вычисленной по уравнению (3.10). Там же дан график для предельного случая сплошной струи (случай Релея, $n = 0$).

На фиг. 3 приведен график аналогичной зависимости для второго корня уравнения (3.10).

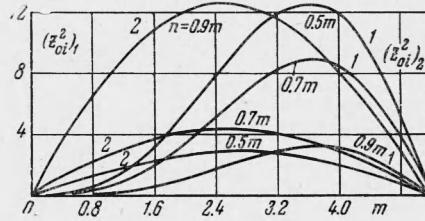
Из уравнения же (3.10) можно получить случай колебаний плоской пленки, положив $m \gg 1$, $n \gg 1$, $m - n \approx 1$ (радиусы пленки a и b велики по сравнению с длиной волны λ). Тогда уравнение (3.10) перейдет в следующее:

$$Z_0^4 - 2m^3 Z_0^2 + m^6 = 0 \quad (3.11)$$

Отсюда $Z_0^2 = m^3$, т. е. $Z_i = 0$, $Z_r = \pm m^{3/2}$, из чего следует, что плоская пленка при отсутствии скорости устойчива [3].



Фиг. 4



Фиг. 5

Рассмотрим далее случай больших скоростей течения жидкости пленки: $W \gg 1$, $m \gg 1$, $n \gg 1$, $m - n \approx 1$. Используя асимптотические выражения (3.6) для функций Бесселя при больших аргументах, получим

$$A_0(x) \approx A_1(x) \approx e^{2x} / \pi, \quad B(x) = 1$$

Подставив полученные выражения в уравнение (3.1), будем иметь

$$Z_0^4 + 2m^2(W - m) \operatorname{cth}(m - n) Z_0^2 + m^4(W - m)^2 = 0 \quad (3.12)$$

Отсюда получим

$$(Z_{oi}^2)_1 = m^2(W - m) \operatorname{th}^{1/2}(m - n), \quad (Z_{oi}^2)_2 = m^2(W - m) \operatorname{cth}^{1/2}(m - n) \quad (3.13)$$

что дает неустойчивость при $W > m$ и устойчивость при $W < m$.

На фиг. 4 приведены зависимости квадрата инкремента от волнового числа для разных значений W и толщины пленки, соответствующей $n = 0.9m$ ($\varepsilon = 1/0.9$), вычисленные по формулам (3.13). На фиг. 5 даны такие же зависимости для случая $W = 5$ и разных толщин пленки, при этом $(Z_{oi}^2)_2$ дано в масштабе 0.1.

Для нахождения геометрических мест максимумов на кривых, выражающих указанные выше зависимости, продифференцируем выражения для квадратов инкрементов (3.13) по m и приравняем производные нулю. Решив полученные уравнения относительно W (что проще, так как относительно m_0 они трансцендентны), получим

$$W = m_0 \frac{km_0 + \frac{3}{2} \operatorname{sh} 2km_0}{km_0 + \operatorname{sh} 2km_0} \quad \text{для } (Z_{oi}^2)_1 \quad (3.14)$$

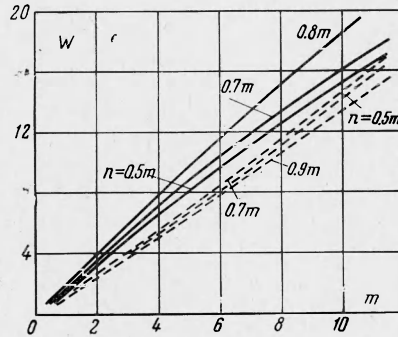
$$W = m_0 \frac{3 \operatorname{sh} 2km_0 - 2km_0}{2 [\operatorname{sh} 2km_0 - km_0]} \quad \text{для } (Z_{oi}^2)_2 \quad (3.15)$$

$$\left(k = \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon}\right)$$

При увеличении волнового числа оба выражения (3.14) и (3.15) стремятся к одному и тому же пределу $W = \frac{3}{2} m_0$, что согласуется с (3.8).

Зависимости (3.14) и (3.15) даны на фиг. 6 для разных значений ε .

Рассмотрим, наконец, случай колебаний пленки жидкости, учитывая влияние поперечных волн, при условии наличия больших скоростей течения жидкости ($W \gg 1$).



Фиг. 6

При этом условии следует рассматривать лишь область больших волновых чисел $m \gg 1$, $n \gg 1$, в которой при $W \gg 1$ лежит кривая зависимости инкрементов от волнового числа. Используя уравнение (2.17) и асимптотические выражения для функций Бесселя с большим аргументом, получим

$$A_s(x) \approx A_{s+1}(x) \approx e^{2x} / \pi, \quad B(x) = 1$$

$$Z_0^4 + \text{cth}(m-n) [2m^2W + m(1-m^2-s^2) + m(\varepsilon^2 - m^2 - s^2\varepsilon^2)] Z_0^2 +$$

$$+ [m^2W + m(1-m^2-s^2)] [m^3W + m(\varepsilon^2 - m^2 - s^2\varepsilon^2)] = 0 \quad (3.16)$$

Считая, что $m-n \gg 1$ и $\text{cth}(m-n) \approx 1$ и что можно пренебречь единицей по сравнению с s^2 , получим из предыдущего уравнения

$$Z_0^4 + [2m^2(W-m) - ms^2(1+\varepsilon^2)] Z_0^2 +$$

$$+ [-m^2(W-m) + ms^2\varepsilon^2] [-m^2(W-m) + ms^2] = 0 \quad (3.17)$$

Решая уравнение (3.17), получим

$$(Z_0^2)_1 = -m^2(W-m) + ms^2\varepsilon^2, \quad (Z_0^2)_2 = -m^2(W-m) + ms^2 \quad (3.18)$$

Графики зависимостей (3.18) даны (пунктиром) на фиг. 2.

4. Рассмотрим формы возмущений, преобладающие в случаях, для которых выше были определены инкременты колебаний. Определителю (2.15) (при $s=0$, $\tau = Z_0$) соответствует система уравнений:

$$C_1 A_1(n) - C_2 + C_4 = 0 \quad (4.1)$$

$$C_1 Z_0^2 A_0(m) + C_2 Z_0^2 + C_3 [m^2W + m(1-m^2)B(m)] = 0$$

$$C_1 A_1(m) - C_2 - C_3 = 0$$

$$C_1 Z_0^2 A_0(n) + C_2 Z_0^2 + C_4 [m^2W A_0(n) / A_1(n) - m(m^2 - \varepsilon^2)B(n)] = 0$$

Взяв три первые уравнения системы (4.1), разделив их на C_1 , вычитая из второго первое и складывая второе с третьим, получим

$$A_1(m) - A_1(n) - \frac{C_3}{C_1} - \frac{C_4}{C_1} = 0$$

$$A_0(m) + A_1(m) - \frac{C_3}{C_1} + \frac{C_3}{C_1} [m^2W + m(1-m^2)B(m)] \frac{1}{Z_0^2} = 0$$

Отсюда

$$\frac{C_3}{C_1} = \frac{Z_0^2 [A_0(m) + A_1(m)]}{Z_0^2 - m^2W - m(1-m^2)B(m)}$$

$$\frac{C_4}{C_1} = A_1(m) - A_1(n) - \frac{Z_0^2 [A_0(m) + A_1(m)]}{Z_0^2 - m^2W - m(1-m^2)B(m)} \quad (4.2)$$

Воспользовавшись выражениями (2.11) для амплитуд отклонений частиц жидкости на наружной и внутренней поверхностях пленки при $s=0$, напишем их отношение

$$\frac{\xi^o}{\eta^o} = \frac{C_3}{C_4} \frac{K_1(m)}{I_1(n)} \quad (4.3)$$

Определив величину C_3 / C_4 из (4.2) и подставив ее в (4.3), получим для величины ξ , характеризующей знак отношения отклонений частиц жидкости, следующее выражение:

$$\xi = \frac{\xi^o}{\eta^o} \frac{I_1(n)}{K_1(m) [A_0(m) + A_1(m)]} =$$

$$= \frac{Z_0^2 [A_0(m) + A_1(n)] + [A_1(m) - A_1(n)] [m^2W + m(1-m^2)B(m)]}{Z_0^2} \quad (4.4)$$

так как величина

$$I_1(n) / K_1(m) [A_0(m) + A_1(m)] > 0$$

Подставляя, далее, в выражение (4.4) квадрат инкремента колебаний Z_0^2 , полученный для того или другого случая, сможем определить знак отношения амплитуд отклонений частиц жидкости с внешней и внутренней поверхностей пленки и установить сдвиг фаз колебаний на этих поверхностях.

Для случая движения пленки жидкости с внутренней полостью малого диаметра подставим первый корень (3.3) в равенство (4.4) и пренебрежем в знаменателе величиной $A_1(n)$ — малой по сравнению с величинами $A_0(m)$ и $A_1(m)$. Тогда получим $\xi = \infty$, что показывает малость амплитуд волн (соответствующих первому корню), распространяющихся по внутренней поверхности пленки, по сравнению с амплитудами волн на наружной поверхности. В пределе амплитуды этих волн стремятся к нулю по мере уменьшения диаметра внутренней полости пленки.

Подставив второй корень (3.4) в (4.4) и также пренебрегая величиной $A_1(n)$ в знаменателе, получим

$$\xi = \frac{-[m^2 W A_0(n) / A_1(n) + m(\varepsilon^2 - m^2) B(n)]}{-A_0(m)[m^2 W A_0(n) / A_1(n) + m(\varepsilon^2 - m^2) B(n)] + A_1(m)[m^2 W + m(1 - m^2) B(m)]} \quad (4.5)$$

Второе слагаемое знаменателя в (4.5) значительно меньше первого, поэтому $\xi > 0$ и амплитуды ξ° , η° — одного знака. Следовательно, по наружной и внутренней поверхностям пленки с внутренней полостью малого диаметра распространяются волны (соответствующие второму корню), находящиеся в одинаковой фазе (фиг. 7а).

Для случая почти неподвижной пленки (аналог задачи Релея), взяв значения корней $(Z_0^2)_{1,2}$ уравнения (3.10) с графиков фиг. 3 и подставив при соответствующих значениях волновых чисел m и n в уравнение (4.4), легко убедиться, что первому корню соответствует неравенство $\xi < 0$ (поверхности пленки колеблются в противоположных фазах (фиг. 7б), а второму корню — неравенство $\xi > 0$ (поверхности колеблются в одной и той же фазе — фиг. 7а).

Для случая движения пленки с большими скоростями подстановка корней $(Z_0^2)_{1,2}$ из (3.13) в уравнение (4.4) также показывает, что первому корню соответствует неравенство $\xi < 0$, а второму $\xi > 0$.

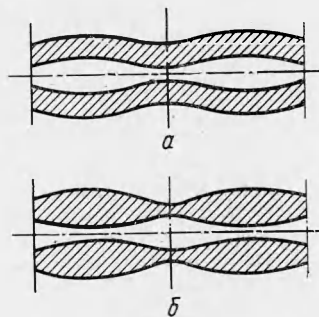
Следовательно, можно сказать, что для всех трех рассмотренных частных случаев первому корню (знак плюс перед радикалом в решении квадратного относительно Z_0^2 уравнения (3.1)) соответствует неравенство $\xi < 0$, что дает разные знаки амплитуд поднятий частиц жидкости ξ° , η° на наружной и внутренней поверхностях пленки, т. е. что эти поверхности колеблются в противоположных фазах (фиг. 7б). Второму корню (знак минус перед радикалом в решении квадратного уравнения (3.1)) соответствует неравенство $\xi > 0$, что дает одинаковые знаки амплитуд поднятий частиц жидкости ξ° , η° на наружной и внутренней поверхностях пленки, т. е. что эти поверхности колеблются в одной и той же фазе (фиг. 7а).

5. Далее сделаем попытку дать некоторые (в основном — качественные) выводы о механизме распада пленки жидкости, исходя из полученных теоретических результатов. Следует сказать, что в реальных условиях истечение пленки жидкости в газовую среду из какого-либо сопла в начальном участке имеет неустановившийся характер по длине струи, тогда как поставленная нами теоретическая задача предполагает наличие установившегося течения, рассматриваемого в качестве исходного невозмущенного движения.

Из рассмотрения данных об изменении инкремента колебаний в зависимости от волнового числа для рассмотренных частных случаев движения пленки жидкости в газовой среде можно сделать следующие выводы.

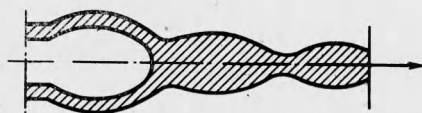
При малых значениях числа Вебера W (если не учитывать влияния поперечных волн $s = 0$) из того, что второй корень $(Z_0^2)_2$ значительно больше первого $(Z_0^2)_1$ (см. фиг. 3) и принципа Релея можно сделать вывод о том, что по выходе из отверстия на пленке жидкости возникают волны в одинаковой фазе на наружной и внутренней поверхностях. Так как амплитуды колебаний быстро растут (инкремент велик), то это приводит к смыканию внутренней полости пленки (см. фиг. 8), после чего пленка превращается в сплошную струю, распадающуюся по Релею (при весьма малых числах Вебера W) или по Петрову — Шехтману. В этом случае распад описывается формой колебаний, соответствующей первому корню (3.3) уравнения (3.2).

При больших числах Вебера W и при $s = 0$ следует рассмотреть два случая: для чисел Вебера $3 < W_h < 10$ возникают колебания поверхностей пленки в одной



Фиг. 7

фазе (второй корень из (3.13)) с длиной волны порядка ее толщины ($\lambda \sim h = a - b$) и при распаде может сразу нарушаться целостность пленки в результате ее сильного вытягивания (фиг. 9). Для чисел Вебера $W_h > 10$ на обеих поверхностях пленки возникают волны малой, по сравнению с ее толщиной, длины одного из двух рассматриваемых типов (в одинаковой фазе, что соответствует второму корню, или в разных фазах, что соответствует первому корню); возникновение волн обоих типов, по-видимому, равновероятно ввиду близости значений инкрементов колебаний (здесь $W_h = \rho_2 h V^2 / \sigma$). В этом случае, по-видимому, происходит распад по механизму, предложенному Тейлором [4], и состоящему в отрыве капель жидкости с диаметром порядка длины волны с обеих поверхностей пленки без предварительного нарушения ее целостности. Длина волны соответствует волновому числу $m_0 = 2/3 W$, т. е. такая же, как для случая распада плоской пленки.



Фиг. 8



Фиг. 9

ки. Здесь цилиндричность пленки перестает влиять на распад и происходит отрыв с обеих поверхностей капель жидкости диаметром

$$d \sim \lambda = \frac{3\pi\sigma}{\rho_2 V^2} \quad (5.1)$$

Отрыв от пленки колец жидкости, по-видимому, маловероятен и может происходить, возможно, лишь в узком диапазоне чисел Вебера, где-то вблизи $W_h = 10$. Как видно из фиг. 2, поперечные волны мало влияют на инкремент колебаний, изменяя его в сторону уменьшения.

Следует сказать, что вывод о размерах капель, отрывающихся с поверхностей пленки, не вполне точен из-за неучета сил трения в жидкости. Опыты показывают, что на размер капель влияет число Лапласа $L = a\sigma\rho_1 / \mu_1^2$ (здесь a — диаметр струи, σ — коэффициент поверхностного натяжения, ρ_1 — плотность жидкости, μ_1 — коэффициент абсолютной вязкости жидкости).

Действие вязкости жидкости на ее распад можно рассматривать с двух точек зрения. Во-первых, вязкие силы приводят к изменению основного течения — образуется пограничный слой, наличие которого должно приводить к изменению волнообразования.

Во-вторых, вязкие силы могут оказывать непосредственное влияние на развитие возмущений при заданном профиле основного течения. При этом исследование устойчивости должно основываться уже не на уравнениях идеальной жидкости, а на уравнениях Навье — Стокса, что сильно усложняет исследование. Такое влияние для не слишком вязких жидкостей, по-видимому, очень мало. Ввиду этого нам представляется, что основную роль играет лишь изменение профиля скорости и что поведение возмущений описывается теми же уравнениями идеальной жидкости, которые использовались выше.

Поступила 28 X 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Шехтман Ю. М. К вопросу о влиянии окружающей среды на устойчивость жидких струй. Изв. АН СССР, ОТН, 1946, № 11.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.
3. J o r k T. L., S t u b b s H. E. and T e k M. R. Mechanism of disintegration of liquid Sheets. Trans. ASME, 1953, vol. 75, No. 7.
4. L a n e W. R. Shatter of drops in streams. Industr. and Engng Chem., 1951, vol. 43, No. 6.