ПМТФ, № 2, 1967

О НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ В УПРУГО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ЗАТУХАНИИ ЕЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ДВИЖЕНИЙ

В. А. Городцов

(Москва)

В работе [1] была рассмотрена конечная стадия вырождения турбулентности в упруго-вязких жидкостях. При этом предполагалось, что напряжения, за вычетом гидростатического давления, имеют лишь тангенциальные компоненты. Иными словами, работа [1] касалась таких жидкостей и такой стадии затухания их движений, когда нормальными напряжениями можно пренебречь.

Нормальные напряжения представляют собой отличительную черту упруго-вязких несжимаемых жидкостей; наличие их приводит к существенным эффектам при ламинарном течении. Можно ожидать, что нормальные напряжения оказывают большое влияние и на характер турбулентности таких жидкостей.

Нормальные напряжения в несжимаемых упруго-вязких жидкостях связаны с нелинейными особенностями моделей жидкостей. Поэтому, чтобы выяснить затухание этих напряжений при вырождении турбулентности, необходимо конкретизировать нелинейные особенности модели и перейти к рассмотрению стадии вырождения, предшествующей конечной, когда поведение жидкости остается еще в некоторой степени нелинейным.

1. Ограничимся сначала моделью несжимаемой жидкости с релаксацией напряжений, описываемой уравнениями Максвелла — Олдройда [2]

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha}\sigma_{\alpha j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_\alpha}\sigma_{\alpha i} + \frac{1}{\theta}\sigma_{ij} = \frac{\nu}{\theta}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.1}$$

и уравнениями

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial\sigma_{i\alpha}}{\partial x_\alpha}, \qquad \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \tag{1.2}$$

Здесь v_i — компоненты скорости, σ_{ij} — компоненты кинематического тензора напряжений за вычетом изотропного давления, p, ν, θ — константы вязкости и времени релаксации соответственно.

Предположим, что эта жидкость находится в состоянии однородных турбулентных движений, и выберем систему координат так, чтобы отсутствовало осредненное движение: $\langle v_i\rangle = 0$.

Осредняя уравнение (1.1), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\sigma_{ij}\rangle + \frac{1}{\theta}\langle\sigma_{ij}\rangle = -\left\langle v_i \frac{\partial\sigma_{\alpha j}}{\partial x_\alpha}\right\rangle - \left\langle v_j \frac{\partial\sigma_{\alpha i}}{\partial x_\alpha}\right\rangle \tag{1.3}$$

Складывая уравнение для v_i из (1.2), умноженное на v_j, и аналогичное уравнение для v_j, умноженное на v_i, и осредняя, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle v_i v_j\rangle = \left\langle v_i \frac{\partial\sigma_{\alpha j}}{\partial x_\alpha}\right\rangle + \left\langle v_j \frac{\partial\sigma_{\alpha i}}{\partial x_\alpha}\right\rangle - \left\langle p \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right\rangle - \left\langle p \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right\rangle \tag{1.4}$$

Складывая уравнения (1.3) и (1.4), свертывая полученное тензорное уравнение по индексам i и j, с учетом условия несжимаемости поля скоростей (1.2) получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\sigma_{\alpha\alpha}\rangle + \frac{1}{\theta}\langle\sigma_{\alpha\alpha}\rangle = -\frac{\partial}{\partial t}\langle v_\alpha^2\rangle \tag{1.5}$$

Это уравнение, справедливое для любой стадии однородной турбулентности рассматриваемой модели упруго-вязкой жидкости, показывает, что изменение средней кинетической энергии турбулентности связано с изменением суммы средних нормальных напряжений, при этом установившийся режим развитой турбулентности не является стационарным.

Действительно, если $\langle\sigma_{\alpha\alpha}\rangle \neq 0$, то, согласно (1.5), развитая турбулентность должна иметь осциллирующий характер с пульсирующими во времени средними характеристиками: суммой средних нормальных напряжений $\langle\sigma_{\alpha\alpha}\rangle$ и средней кинетической энергией [1]. Если предположить наличие основной частоты осцилляции средних характеристик ω, то, согласно (1.5), кинетическая энергия и нормальное напряжение колеблются с одинаковой главной частотой, но со сдвигом по фазе на $\pi + \operatorname{arc\,tg}(\theta\omega)^{-1}$ и, в то время как энергия остается положительной, напряжение $\langle\sigma_{\alpha\alpha}\rangle$ меняет знак.

В дальнейшем ограничимся для простоты случаем изотропной турбулентности. Тогда $\langle\sigma_{ij}\rangle = \sigma\delta_{ij}$, $\sigma(t) = {}^1/_3\langle\sigma_{\alpha\alpha}\rangle$. Таким образом, действие нормальных напряжений будет состоять прежде всего в изменении турбулентного давления, которое для вязких жидкостей складывалось из статического давления и среднего динамического напора пульсаций (напряжения Рейнольдса). В упруго-вязкой жидкости в давление добавится новое слагаемое $\sigma(t)$ (для амплитудного значения напряжения σ можно привести оценку $\theta\nu v_l^2\, l^{-2}$, где v_l и l — характерные скорости и длина турбулентных вихрей, на которые приходится максимум нормальных напряжений; для развитой турбулентности вязкой жидкости максимум касательных напряжений приходится на $l \sim \lambda_0$ — внутренний масштаб турбулентности).

Вводя спектральную плотность кинетической энергии $E(k, t)$ согласно равенству

$$\frac{1}{2}\langle v_\alpha^2\rangle = \int\limits_0^\infty E(k,t)\,dk$$

для случая изотропной турбулентности уравнение (1.5) можно переписать

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{1}{\theta}\sigma = -\frac{2}{3}\int\limits_0^\infty \frac{\partial E(k,t)}{\partial t}\,dk \tag{1.6}$$

Кроме изменения величины турбулентного давления, нормальные напряжения, в силу нелинейных особенностей определяющих уравнений (1.1), будут участвовать во взаимодействии между пульсациями разных масштабов.

Вычитая из уравнений (1.1) уравнения (1.3), получим уравнения для пульсационной части поля напряжений $\sigma_{ij}' = \sigma_{ij} - \langle\sigma_{ij}\rangle$

$$\frac{\partial\sigma_{ij}'}{\partial t} + v_\alpha\frac{\partial\sigma_{ij}'}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha}\sigma_{\alpha j}' - \frac{\partial v_j}{\partial x_\alpha}\sigma_{\alpha i}' + \left\langle\frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha}\sigma_{\alpha j}'\right\rangle + \\ + \left\langle\frac{\partial v_j}{\partial x_\alpha}\sigma_{\alpha i}'\right\rangle + \frac{1}{\theta}\sigma_{ij}' = \frac{\nu + \theta\sigma(t)}{\theta}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.7}$$

Полученное уравнение лишь заменой вязкости ν на $\nu + \theta\sigma(t)$ отличается от уравнения для случая, когда среднее напряжение σ отсутствует. Из (1.2) и (1.7) следует, что это же касается и уравнений для корреляцион-

[1] Такая черта турбулентности упруго-вязкой жидкости, возможно, родственна с наблюдавшимися сильными иррегулярностями течений расплавов и растворов высокоэластических полимеров — явлением, получившим названия «разрушение расплава» и «эластическая турбулентность» [3-5].

ных моментов полей v_i и σ_{ij}', которые можно вывести при помощи (1.2) и (1.7). Уравнение (1.6) при этом будет тем дополнительным соотношением, которое связывает $\sigma(t)$ со вторым корреляционным моментом поля скоростей.

Отметим, что поскольку σ меняет знак, выражение $\nu + \theta\sigma(t)$, выполняющее роль вязкости в уравнении (1.7), может стать отрицательным, когда амплитуда $\sigma(t)$ превысит $\nu\theta^{-1}$. Таким образом, можно ожидать изменения характера турбулентности [1], когда $\nu\theta^{-1} \sim \sigma_{\max} \sim \theta\nu v_l^2 l^{-2}$, т. е. когда $\theta v_l\, l^{-1} \sim 1$.

2. Перейдем к рассмотрению вырождения турбулентности в этой жидкости. Предположим, что существует такая стадия вырождения, когда роль корреляционных моментов третьего порядка полей скоростей и напряжений уже пренебрежимо мала, но нормальные напряжения все еще существенны. На этой стадии турбулентные движения разных масштабов (с различными волновыми числами k) остаются еще взаимосвязанными, взаимодействие между ними осуществляется не через моменты третьего порядка, а средними напряжениями $\sigma(t)$.

Используя уравнения (1.2) и (1.7), можно получить уравнения, связывающие друг с другом корреляционные моменты второго порядка полей v_i и σ_{ij}' (пренебрегая всеми моментами третьего порядка) [2]. Эти уравнения отличаются от системы (1.4) работы [1] лишь заменой ν на $\nu + \theta\sigma(t)$ и позволяют написать уравнение для $E(k, t)$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2}{\theta}\frac{\partial}{\partial t} + 4k^2\frac{\nu + \theta\sigma}{\theta}\right]\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\theta}\right)E = -2k^2\frac{\partial\sigma}{\partial t}E \qquad (2.1)$$

Уравнения (2.1) и (1.6) составляют замкнутую систему уравнений относительно $\sigma(t)$ и $E(k, t)$ и описывают слабую турбулентность упруго-вязкой жидкости, когда корреляционные функции третьего порядка становятся малыми.

Если при затухании турбулентных движений напряжения $\sigma(t)$ убывают достаточно быстро,

$$J_1 = \int_1^\infty |\sigma(t)|\,dt < \infty$$

то при $t \to \infty$ функция $E(k, t)$ асимптотически стремится [6] к решению уравнения типа (2.1) с $\sigma = 0$.

Таким образом, при достаточно больших временах рассматриваемая стадия переходит в конечную стадию, описанную в [1], а решение уравнения (2.1) стремится к функции

$$C_1\exp(-t/\theta) + C_2\exp[-t(\beta+1)/\theta] + C_3\exp[t(\beta-1)/\theta]$$

$$\beta(k) = (1 - k^2/k_\theta^2)^{1/2}, \qquad k_\theta = {}^1/_2\,\nu^{-1/2}\theta^{-1/2}, \qquad 2C_2 = 2\bar{C}_3 = A(k) + iB(k)$$

при $k > k_\theta$, и функции $C_i(k)$ связаны с E, $\partial E/\partial t$ и $\partial^2 E/\partial t^2$ в некоторый момент времени ($t = 0$) конечной стадии вырождения, принятый за начальный; их можно выразить и через корреляционные тензоры

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = \langle v_i(\mathbf{x})\, v_j(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle, \qquad S_{ijk}(\mathbf{r}) = \langle v_i(\mathbf{x})\,\sigma_{jk}'(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle$$
$$W_{ijkl}(\mathbf{r}) = \langle\sigma_{ij}'(\mathbf{x})\,\sigma_{kl}'(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle$$

в этот же момент.

---

[1] Отметим, что значение безразмерного параметра $\sigma\theta\nu^{-1} = \sigma g^{-1} \sim 1$ ($g = \theta\nu^{-1}$ — кинематический модуль упругости жидкости) близко к критическому значению, при котором наступает явление «эластической турбулентности» [5].

[2] Поскольку теперь $\langle\sigma_{ij}\rangle \neq 0$, то корреляционные тензоры нужно писать для $\sigma_{ij}' = \sigma_{ij} - \langle\sigma_{ij}\rangle$. При этом кинематические соотношения типа (1.6) из [1] остаются в силе, а функция $E(k, t)$ выражается через $R(k, t)$ как $E(k, t) = -4\,k^4 R(k, t)$.

На конечной стадии вырождения полная кинетическая энергия турбулентности

$$\int_0^\infty E(k, t)\,dk = \int_0^{k_\theta} C_3(k)\exp\left[t(\beta - 1)/\theta\right] dk + \Sigma$$

Здесь Σ означает группу слагаемых, каждое из которых убывает во времени не медленнее, чем $\exp(-t/\theta)$. При больших временах ($t \gg \theta$) основной вклад в этот интеграл вносят малые k и асимптотически он равен

$$J_2(k_\theta) = \int_0^{k_\theta} C_3(k)\, e^{-2\nu k^2 t}\,dk \tag{2.2}$$

и с точностью до слагаемого, убывающего как $\exp(-t/2\theta)$, можно переписать $J_2(\infty)$, т. е. так же, как и в вязкой жидкости. Если, как и в вязкой жидкости, при $k \to 0$ выполняется условие $C_0 = \lim k^{-4} C_3(k) < \infty$, $C_0 \neq 0$, являющееся кинематическим требованием, по существу не зависящим от конкретной модели несжимаемой жидкости, то при больших временах полная кинетическая энергия будет убывать как $(\nu t)^{-5/2}$.

Тогда, согласно уравнению (1.6), среднее нормальное напряжение $\sigma(t)$ будет убывать асимптотически ($t \gg \theta$) как $\sim \theta\nu^{-5/2} t^{-7/2}$; как и предполагалось $J_1 < \infty$.

Остановимся теперь на сравнении затухания корреляций, связанных с нормальными напряжениями, в частности пульсационной части нормальных напряжений, с затуханием других компонент корреляционных тензоров на конечной стадии вырождения. Можно убедиться (см. (1.6) из [1]), что в однородной изотропной турбулентности несжимаемой среды

$$S_{i\alpha\alpha}(r) = \langle v_i(\mathbf{x})\,\sigma_{\alpha\alpha}'(\mathbf{x} + \mathbf{r})\rangle = 0 \tag{2.3}$$

т. е. между полем скоростей и суммарными нормальными напряжениями пульсаций корреляция отсутствует.

Учитывая это, воспользовавшись уравнениями конечной стадии для корреляционных тензоров (уравнения (1.4) из [1]), можно показать, что корреляции, затрагивающие сумму нормальных напряжений пульсаций

$$T_{\alpha\alpha}(\mathbf{r}) = \langle \sigma_{\alpha\alpha}'(\mathbf{x})\,p'(\mathbf{x} + \mathbf{r})\rangle, \qquad W_{ij\alpha\alpha}(\mathbf{r}) = \langle \sigma_{ij}'(\mathbf{x})\,\sigma_{\alpha\alpha}'(\mathbf{x} + \mathbf{r})\rangle$$

убывают экспоненциально быстро со временем как $\exp(-2t/\theta)$ независимо от r. В частности, среднее пульсационное нормальное напряжение $\langle \sigma_{\alpha\alpha}'^2\rangle^{1/2}$ убывает как $\exp(-t/\theta)$.

Нетрудно убедиться, что

$$\frac{\partial^2}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} S_{i\alpha\beta}(\mathbf{r}) = 0$$

Используя это уравнение и уравнения конечной стадии вырождения, получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2}{\theta}\right)\frac{\partial^2}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} W_{ij\alpha\beta}(\mathbf{r}) = 0$$

$$\Delta\langle p'(\mathbf{x})\,p'(\mathbf{x} + \mathbf{r})\rangle = \frac{\partial^2}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} T_{\alpha\beta}(\mathbf{r}), \qquad \Delta T_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{\partial^2}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} W_{ij\alpha\beta}(\mathbf{r})$$

Из этих уравнений следует, что корреляции давлений $\langle p'(\mathbf{x})p'(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle$ так же затухают как $\exp(-2t/\theta)$.

Что касается компонент корреляционных тензоров, то на конечной стадии они убывают как и в вязкой жидкости: компоненты $R_{ij}(\mathbf{r})$ при малых r убывают, как и полная кинетическая энергия, по закону $t^{-5/2}$, компоненты $W_{ijkl}(\mathbf{r})$ и $S_{ilk}(\mathbf{r})$ убывают более быстро, при малых r, как и средние напряжения, по закону $t^{-7/2}$.

Таким образом, на конечной стадии вырождения турбулентности корреляционные характеристики, связанные с нормальными напряжениями пульсаций (включая давление), экспоненциально быстро затухают, остальные корреляции затухают в упруго-вязкой жидкости так же, как и в вязкой. Различие состоит в затухании среднего нормального напряжения (закон $t^{-7/2}$) [1] и в характере затухания мелкомасштабных турбулентных движений.

3. В предыдущих пунктах рассматривалась одна из моделей несжимаемой упруговязкой жидкости с одним временем релаксаций. Сравним поведение нормальных напряжений для других моделей с другими нелинейными особенностями уравнений. При этом динамические уравнения и уравнения несжимаемости останутся прежними (см. уравнения (1.2)), а меняться будут лишь определяющие уравнения типа (1.1).

Рассмотрим модель жидкости с определяющими уравнениями [2]

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial t}+v_\alpha\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_i}\sigma_{\alpha j}+\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_j}\sigma_{\alpha i}+\frac{1}{\theta}\sigma_{ij}=\frac{\nu}{\theta}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{3.1}$$

В случае однородной изотропной турбулентности среднее нормальное напряжение подчиняется в этой модели уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{\theta}\right)\sigma=\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t}\langle v_\alpha^2\rangle=\frac{2}{3}\int\limits_0^\infty\frac{\partial E(k,t)}{\partial t}dk \tag{3.2}$$

а пульсационная часть напряжения — уравнениям

$$\frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial t}+v_\alpha\frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial x_\alpha}+\frac{1}{\theta}\sigma'_{ij}+\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_i}\sigma'_{\alpha j}+\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_j}\sigma'_{\alpha i}+$$
$$+\left\langle v_\alpha\frac{\partial\sigma'_{\alpha i}}{\partial x_j}\right\rangle+\left\langle v_\alpha\frac{\partial\sigma'_{\alpha j}}{\partial x_i}\right\rangle=\frac{\nu-\theta\sigma}{\theta}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{3.3}$$

Уравнения (3.3) показывают, что роль средних напряжений в этой модели сводится к замене постоянной вязкости ν на зависящую от времени $\nu-\theta\sigma(t)$. На стадии затухания турбулентных движений, когда корреляционными функциями третьего порядка можно пренебречь, нетрудно получить из уравнений (3.3) и (1.2) уравнение для $E(k,t)$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{2}{\theta}\frac{\partial}{\partial t}+4k^2\frac{\nu-\theta\sigma}{\theta}\right]\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{\theta}\right)E=2k^2\frac{\partial\sigma}{\partial t}E \tag{3.4}$$

Сравнивая уравнения (3.2), (3.4) с уравнениями (1.6), (2.1), видим, что единственное их различие в знаке перед напряжением $\sigma(t)$. Следовательно, на конечной стадии вырождения, когда полная кинетическая энергия затухает по закону $At^{-\alpha}$, $\alpha={}^5/_2$, $A>0$, нормальное напряжение будет затухать как ${}^5/_3\,\theta At^{-\alpha-1}$, оставаясь положительным в модели с определяющими уравнениями (1.1), и как $-{}^5/_3\,\theta At^{-\alpha-1}$ — в модели с уравнениями (3.1). Подчеркнем, что различие знаков напряжений на конечной стадии вырождения турбулентности, вообще говоря, может служить экспериментальным основанием для выбора моделей того или иного типа.

В качестве следующего примера рассмотрим модель жидкости, определяющие уравнения которой явным образом содержат нелинейные по напряжениям члены

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial t}+v_\alpha\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_i}\sigma_{\alpha j}+\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_j}\sigma_{\alpha i}+\frac{1}{\theta}\sigma_{ij}-\frac{1}{\nu}\sigma_{i\alpha}\sigma_{\alpha j}=\frac{\nu}{\theta}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{3.5}$$

---

[1] Экспериментальная проверка, по-видимому, наталкивается, по крайней мере, на две трудности: измерение малых нормальных напряжений и отделение напряжений Рейнольдса. С этой точки зрения, обладает преимуществом случай неизотропной неоднородной турбулентности, например, для потока с поперечным сдвигом.

Здесь уже и в случае однородной изотропной турбулентности роль среднего напряжения $\sigma(t)$ не будет сводиться просто к замене постоянной вязкости на зависящую от времени. Уравнение для пульсационной части напряжений примет вид

$$\frac{\partial\sigma_{ij}'}{\partial t}+v_\alpha\frac{\partial\sigma_{ij}'}{\partial x_\alpha}+\frac{1}{\theta}\sigma_{ij}'-\frac{2\sigma}{\nu}\sigma_{ij}'+\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_i}\sigma_{\alpha j}'+\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_j}\sigma_{\alpha i}'-\frac{1}{\nu}\sigma_{i\alpha}'\sigma_{\alpha j}'+$$
$$+\frac{1}{\nu}\langle\sigma_{\alpha i}'\sigma_{\alpha j}'\rangle+\left\langle v_\alpha\frac{\partial\sigma_{\alpha i}'}{\partial x_j}\right\rangle+\left\langle v_\alpha\frac{\partial\sigma_{\alpha j}'}{\partial x_i}\right\rangle=\frac{\nu-\theta\sigma}{\theta}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \quad (3.6)$$

Уравнение для средних напряжений

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{\theta}\right)\sigma-\frac{1}{\nu}\sigma^2-\frac{1}{3\nu}\langle\sigma_{\alpha\beta}'^2\rangle=\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t}\langle v_\alpha^2\rangle \quad (3.7)$$

Отметим, что, в противоположность уравнениям (1.6) и (3.2) предыдущих моделей, это уравнение допускает нетривиальное стационарное решение. При этом пульсационная часть напряжений связана с нормальным напряжением:

$$\sigma_0-\sigma_0^2/g={}^1/_3 g^{-1}\langle\sigma_{\alpha\beta}'^2\rangle$$

и, следовательно, $g\geqslant\sigma_0>0$.

Система уравнений на стадии слабой турбулентности будет иметь также более сложный вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{\theta}\right)\sigma-\frac{1}{\nu}\sigma^2=\frac{2}{3}\int_0^\infty\frac{\partial E(k,t)}{\partial t}dk+\frac{1}{3\nu}\langle\sigma_{\alpha\beta}'^2\rangle$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{2}{\theta}-\frac{4\sigma}{\nu}\right)\langle\sigma_{\alpha\beta}'^2\rangle=-4\frac{\nu-\theta\sigma}{\theta}\int_0^\infty\frac{\partial E(k,t)}{\partial t}dk \quad (3.8)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{2}{\theta}-\frac{4\sigma}{\nu}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{\theta}-\frac{2\sigma}{\nu}\right)\frac{\partial}{\partial t}E(k,t)=$$
$$=2k^2\frac{\partial\sigma}{\partial t}E(k,t)-4k^2\frac{\nu-\theta\sigma}{\theta}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{\theta}-\frac{2\sigma}{\nu}\right)E(k,t)$$

На конечной стадии вырождения турбулентности, когда средние нормальные напряжения становятся достаточно малыми, они затухают по закону $t^{-7/2}$, имея отрицательный знак, как и в предыдущей рассмотренной модели.

В качестве примеров моделей, для которых стадия слабой турбулентности (в смысле п. 2) отсутствует, рассмотрим следующие модели.

Прежде всего это модели, для которых $\sigma_{\alpha\alpha}=0$. В случае изотропной турбулентности среднее нормальное напряжение $\langle\sigma_{ij}\rangle=\sigma\delta_{ij}$ в них вообще отсутствует.

Другим примером являются модели с релаксацией скоростей деформации. К ним относится так называемая жидкость второго порядка Ривлина — Эриксена [7] с определяющими уравнениями

$$\sigma_{ij}=\nu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)+\nu\theta\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j}+\frac{\partial a_j}{\partial x_i}+2\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_j}\right)+$$
$$+\nu_c\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_i}+\frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha}\right)\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_\alpha}\right),\qquad a_i=\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_\alpha\frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha} \quad (3.9)$$

Здесь ν, θ, ν_c — константы материала в наиболее простом случае.

Осредняя это равенство, для среднего напряжения однородной изотропной турбулентности получим выражение

$$\sigma=-{}^2/_3(\nu\theta+\nu_c)\lim_{r\to0}\Delta R_{\alpha\alpha}(r)=-{}^4/_3(\nu\theta+\nu_c)\int_0^\infty E(k,t)k^2dk \quad (3.10)$$

На конечной стадии вырождения турбулентности, когда затухание движений с очень малыми k носит вязкий характер [1], полная кинетическая энергия убывает как $At^{-5/2}$, а среднее напряжение как $-{}^5/_3(\theta+\nu_c/\nu)At^{-7/2}$.

Таким образом, несмотря на различия определяющих уравнений рассмотренных моделей зависимость от времени среднего нормального напряжения $\sigma(t)$ на конечной стадии вырождения турбулентности одна и та же: $t^{-7/2}$ (напряжения Рейнольдса при этом вырождаются более медленно по закону $t^{-5/2}$).

В пп. 2 и 3 подробно рассматривалась по существу лишь конечная стадия вырождения, когда поведение упруго-вязкой жидкости оказалось в целом подобным поведению вязкой жидкости. Здесь остановимся на анализе стадии, предшествующей конечной и описываемой уравнениями типа (1.6) и (2.1), (3.2) и (3.4), (3.8). Эти уравнения выведены в предположении, что можно пренебречь корреляционными функциями третьего порядка, оставив средние нормальные напряжения, и описывают такую стадию затухания турбулентных движений, названную для краткости слабой турбулентностью, когда порождением движений новых пространственных масштабов можно пренебречь. Действительно, энергия, первоначально локализованная в некоторой области волнового пространства, согласно уравнениям (1.6) и (2.1) (для краткости будем пользоваться только этими уравнениями), остается в ней во все последующие моменты времени. Нелинейности системы уравнений сказываются лишь на характере изменения $E(k, t)$ и $\sigma(t)$ во времени, к этому сводится роль взаимодействия между движениями с различными масштабами.

4. Рассмотрим поведение $E(k, t)$ при небольших временах, когда еще существенны и нелинейные особенности уравнений (1.6), (2.1).

Ограничимся случаем столь небольших времен, чтобы отклонения от начальных распределений $\sigma(t) - \sigma_0$ и $E'(k, t) = E(k, t) - E(k, 0)$ можно было считать малыми и линеаризовать эти уравнения

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2}{\theta}\frac{\partial}{\partial t} + 4k^2\frac{\nu + \theta\sigma_0}{\theta}\right]\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\theta}\right)E'(k, t) = -2k^2E(k, 0)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2}{\theta}\right)\sigma$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\theta}\right)\sigma(t) = -\frac{2}{3}\int_0^\infty \frac{\partial E'(k, t)}{\partial t}\,dk \qquad (4.1)$$

Исключив $\sigma(t)$, можно получить одно уравнение для $E'(k, t)$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2}{\theta}\frac{\partial}{\partial t} + 4k^2\frac{\nu + \theta\sigma_0}{\theta}\right]\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\theta}\right)^2 E'(k, t) =$$

$$= \frac{4}{3}k^2E(k, 0)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2}{\theta}\frac{\partial}{\partial t}\right)\int_0^\infty E'(p, t)\,dp \qquad (4.2)$$

Сначала остановимся на затухании вихревых движений некоторого фиксированного размера $\sim 1/k_1$, описываемых спектральной функцией $E(k, t) = E_1(t)\delta(k - k_1)$, при этом $E_1(t = 0) = E_{10}$ задает начальную энергию этого турбулентного вихря.

Уравнение (4.2) для функции $E_1'(t) = E_1(t) - E_{10}$ примет вид

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2}{\theta}\frac{\partial}{\partial t} + 4k_1^2\frac{\nu + \theta\sigma_0}{\theta}\right]\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\theta}\right)^2 E_1' = \frac{4}{3}k_1^2E_{10}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2}{\theta}\frac{\partial}{\partial t}\right)E_1' \qquad (4.3)$$

Решение этого уравнения

$$E_1'(t) = \sum_{i=1}^4 C_i \exp\frac{-t(1 + p_i)}{\theta}, \qquad E_1'(0) = \sum_{i=1}^4 C_i = 0$$

где C_i — константы, определяемые начальными условиями для $E(t)$ и $\sigma(t)$, p_i — корни квадратных уравнений

$$2(p^2 - 1) = \left[4\theta^2k_1^2\left(\frac{E_{10}}{3} - \frac{\nu + \theta\sigma_0}{\theta}\right) - 1\right] \pm$$

$$\pm\left\{\left[4\theta^2k_1^2\left(\frac{E_{10}}{3} - \frac{\nu + \theta\sigma_0}{\theta}\right) - 1\right]^2 - 16\theta k_1^2(\nu + \theta\sigma_0)\right\}^{1/2} \qquad (4.4)$$

Из этих выражений видно, что при $\nu + \theta\sigma_0 < 0$ уравнение со знаком плюс перед корнем всегда приводит к $p^2 > 1$ и, следовательно, одно из решений $\exp\,[-t(1+p)/\theta]$ будет растущим.

Если же $\nu + \theta\sigma_0 > 0$, то $\mathrm{Re}\,p^2 > 1$ будет выполнено при условии $^1/_4\,\theta^{-2}k_1^{-2} < {}^1/_3\,E_{10} - (\nu + \theta\sigma_0)/\theta$. Таким образом, при некоторых начальных условиях уравнение (4.3) имеет растущие со временем решения.

В дальнейшем ограничимся случаем $(\nu + \theta\sigma_0)\,/\,\theta > {}^2/_3 E_0$. При этом, как видно из предыдущего, все решения уравнения (4.3) будут убывающими. При малых k_1 ($k_1^2\theta\,(\nu + \theta\sigma_0) \ll 1$) выражения (4.4) сильно упрощаются

$$p^2_{1,2} \approx 1 - 4\theta k_1^2\,(\nu + \theta\sigma_0), \qquad p^2_{3,4} \approx {}^4/_3\,\theta^2 k_1^2 E_{10} \tag{4.5}$$

Такими выражениями будет описываться затухание отдельного крупно-масштабного турбулентного вихря. Выясним теперь, как на затухание этого вихря влияет присутствие вихря другого масштаба. Для этого возьмем спектральную функцию в виде суммы двух дельта распределений $E\,(k,\ t) = E_1\,(t)\delta\,(k - k_1) + E_2\,(t)\delta\,(k - k_2)$. Уравнение (4.2) тогда примет вид системы двух уравнений с постоянными коэффициентами для двух функций $E_1'\,(t) = E_1\,(t) - E_{10}$, $E_2'\,(t) = E_2\,(t) - E_{20}$

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2}{\theta}\frac{\partial}{\partial t} + 4k_1^2\,\frac{\nu + \theta\sigma_0}{\theta}\right]\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\theta}\right)^2 E_1' = \\
&\qquad = \frac{4}{3}\,k_1^2 E_{10}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2}{\theta}\frac{\partial}{\partial t}\right)(E_1' + E_2') \\
&\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2}{\theta}\frac{\partial}{\partial t} + 4k_2^2\,\frac{\nu + \theta\sigma_0}{\theta}\right]\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\theta}\right)^2 E_2' = \\
&\qquad = \frac{4}{3}\,k_2^2\,E_{20}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2}{\theta}\frac{\partial}{\partial t}\right)(E_2' + E_1')
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Если искать решение с зависимостью от времени вида $\exp\,[-t(1+p)/\theta]$, то p^2 должно удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned}
&p^4\,[p^2 - 1 + 4k_1^2\theta\,(\nu + \theta\sigma_0)][p^2 - 1 + 4k_2^2\theta(\nu + \theta\sigma_0)] = \\
&= {}^4/_3\,\theta^2 p^2\,(p^2 - 1)\,[(p^2 - 1)(k_1^2 E_{10} + k_2^2 E_{20}) + \\
&\quad + 4k_1^2 k_2^2\,(\nu + \theta\sigma_0)\theta\,(E_{10} + E_{20})]
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Здесь, как и прежде, выпишем значения для p^2 лишь для малых волновых чисел k_1, k_2

$$\begin{aligned}
&\theta,\ {}^4/_3\,\theta^2\,(E_{10}k_1^2 + E_{20}k_2^2) + \ldots,\quad 1 - 4\theta(\nu + \theta\sigma_0)k_1^2 + \ldots, \\
&\qquad 1 - 4\theta\,(\nu + \theta\sigma_0)k_2^2 + \ldots
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Сравнивая (4.8) с (4.5), можно видеть, что набор характеристических показателей p значительно меняется, т. е. меняется зависимость $E_1'\,(t)$ от времени. Существенное влияние среднего нормального напряжения на скорость вырождения турбулентности может быть понято из общего вида уравнений без более подробного их анализа. Действительно, на достаточно далекой стадии вырождения определяющую роль начинает играть вязкость, а в рассмотренных моделях наличие нормальных напряжений приводило прежде всего к изменению вязкости (см. уравнения (1.7) и (3.3)). Таким образом, на стадии слабой турбулентности, во всяком случае, наличие нормальных напряжений у упруго-вязкой жидкости сильно влияет не только на мелкомасштабные движения, но и на движения крупных масштабов.

В заключение остановимся на оценке роли средних нормальных напряжений в незатухающей однородной изотропной турбулентности упруго-вязких жидкостей. Очевидным свойством упругости жидкости является ее влияние на мелкомасштабные (высокочастотные) вихри, если характерная длина $(\nu\theta)^{1/2}$ становится сравнимой с размером вихря. Что касается более крупных вихрей, то влияние на них менее очевидно. Можно ожидать, что нормальные напряжения приведут к изменению в крупных вихрях. Через среднее нормальное напряжение осуществляется связь между турбулентными движениями, вообще говоря, всех масштабов: все вихри вносят вклад в нормальное напряжение и, в свою очередь, нормальные напряжения входят в уравнение, определяющее поведение вихрей. Если бы максимальными нормальными напряжениями обладали наиболее мелкие вихри, то изменение мелкомасштабных движений через посредство нормальных напряжений приводило бы и к изменению крупномасштабных движений и, в частности, к изменениям явлений переноса в таких жидкостях

В жидкостях с малой упругостью это, по-видимому, может иметь место. В ламинарных течениях рассмотренных жидкостей нормальные напряжения пропорциональны квадрату градиента скорости течения, что можно принять в качестве оценки нормального напряжения и турбулентного вихря. Поскольку в турбулентности вязкой жидкости максимум градиента скорости приходится на самые мелкие турбулентные вихри (область диссипации), то для упругих жидкостей, близких к вязким, основной вклад в нормальные напряжения будут давать мелкие вихри. Нормальные напряжения, изменяя крупные энергосодержащие вихри, тем самым влияют на перенос количества движения.

Такая роль нормальных напряжений может оказаться причиной хорошо известного явления снижения сопротивления малыми добавками полимеров при турбулентном течении (см. например, [8]).

Замечание. Пренебрежение нелинейными членами в динамическом уравнении предполагает малость чисел Рейнольдса рассматриваемых движений, т. е. $v_l/l \ll \nu/l^2$.

Описанная квазилинейная стадия слабой турбулентности имеет смысл для движений с пульсациями касательных и нормальных напряжений, $\nu v_l/l$, $\nu\theta v_l^2/l^2 \ll \sigma$.

σ можно оценить, исходя из того, что на стадии вырождения, близкой к конечной «ламинарной», максимальными градиентами скоростей будут обладать движения тех же масштабов l_0, на которые в данный момент приходится максимум пульсационной энергии, так что $\sigma \sim \nu\theta v_{l_0}^2/l_0^2$. Все три оценки показывают, что стадия слабой турбулентности имеет смысл лишь для движений, не относящихся к «энергосодержащим» (более мелким и более крупным).

Автор благодарен Г. И. Баренблатту за внимание к работе.

Поступила 26 IX 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Городцов В. А., Мясников В. П. Конечный период вырождения турбулентных движений упруго-вязких жидкостей. ПМТФ, 1965, № 4.
2. Oldroyd J. G. On the formulation of rheological equations of state. Proc. Roy. Soc., A, 1950, vol. 200, No. 1063.
3. Howells E. R., Benbow J. J. Flow defects in polymer melts. Plast. Inst. Trans. J., 1962, vol. 30, No. 88.
4. Vinogradov G. V., Manin V. N. An expiremental study of elastic turbulence. Kolloid - Z. und Z. Polymere, 1965, band 201, heft 2.
5. Малкин А. Я., Леонов А. И. О критериях неустойчивости режимов сдвиговых деформаций упруго-вязких полимерных систем. Докл. АН СССР, 1963, т. 151, № 2.
6. Коддингтон Э. А., Левинсон А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. иностр. лит., 1958.
7. Rivlin R. S., Ericksen J. L. Stress — deformation relations for isotropic materials. J. Rat. Mech. and Analisis, 1955, vol. 4, No. 2.
8. Баренблатт Г. И., Булина И. Г., Мясников В. П., Шоломович Г. И. О влиянии малых добавок растворимых высокомолекулярных соединений на режим движения жидкости. ПМТФ, 1965, № 4.