ПМТФ, № 3, 1965

ВЯЗКОСТЬ ПЛАЗМЫ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Ю. М. Алиев (Москва)

Изучается вязкость плазмы в условиях, когда магнитное поле влияет на акт соударения частиц. Полученные выражения для коэффициентов вязкости существенно отличаются от коэффициентов, получаемых в обычной теории. Показано, что при достаточно сильных полях между электронной и ионной компонентами плазмы возникает разность температур, пропорциональная скорости сдвигов и логарифмически зависящая от величины магнитного поля.

1. Рассмотрим поток плазмы в однородном постоянном магнитном поле $\mathbf{H}$. Если средняя массовая скорость потока $\mathbf{v}_0$ является функцией координат, то в таком потоке будут возникать напряжения, обусловленные переносом импульса частиц.

Зная функцию распределения скоростей α-сорта частиц плазмы $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\alpha, t)$, можно найти тензор давления:

$$p_{ij}^{(\alpha)} = \int m_\alpha (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_0)_i (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_0)_j f_\alpha (\mathbf{r}, \mathbf{v}_\alpha t)\, d\mathbf{v}_\alpha \qquad (1.1)$$

Функция f_α является решением кинетического уравнения:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \Omega_\alpha (\mathbf{h} \times \mathbf{v}_\alpha) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}_\alpha} = I_{st}, \qquad \Omega_\alpha = \frac{q_\alpha H}{m_\alpha c} \qquad (1.2)$$

Здесь I_{st} — член, описывающий столкновения частиц; Ω_α — ларморовская частота; $\mathbf{h}$ — единичный вектор, направленный вдоль магнитного поля.

Будем считать, что f_α не слишком сильно отличается от максвелловской функции и может быть представлена в виде:

$$f_\alpha = f_\alpha^{(0)} (1 + \Phi_\alpha) \qquad (\Phi_\alpha \ll 1) \qquad (1.3)$$

Здесь $f_\alpha^{(0)}$ — «локальная» максвелловская функция:

$$f_\alpha^{(0)} = n_\alpha (\mathbf{r}, t) \left(\frac{m_\alpha}{2\pi T(\mathbf{r}, t)}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m_\alpha}{2T(\mathbf{r}, t)} [\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t)]^2\right\} \qquad (1.4)$$

Тогда, учитывая, что $\Phi_\alpha \ll 1$, кинетическое уравнение (1.2) можно линеаризовать.

Переходя к системе координат, движущейся со скоростью $\mathbf{v}_0$, после несложных преобразований это уравнение можно привести к следующему виду:

$$\frac{m_\alpha}{2T} v_{\alpha i} v_{\alpha j} e_{ij}^\circ f_\alpha^{(0)} = -\Omega_\alpha (\mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{h}) \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \cdot f_\alpha^{(0)} + I_{st}(\Phi) \qquad (1.5)$$

$$e_{ij}^\circ = \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{v}_0 \qquad (1.6)$$

Здесь $I_{st}(\Phi)$ — линейная по Φ часть интеграла столкновений, e_{ij}° — тензор скорости сдвигов.

Во всех предыдущих работах по теории коэффициентов вязкости в качестве $I_{st}(\Phi)$ использовался либо классический интеграл столкновений Больцмана (см., например, [1-3]), либо интеграл столкновений Ландау (см., например, [4]) [1]. Ни один из этих видов интеграла столкновений не применим в условиях, когда ларморовские радиусы частиц становятся меньше радиусов эффективной области их взаимодействия.

В последнее время был получен ряд столкновительных интегралов [7-9], которые дают возможность рассматривать процессы переноса в достаточно сильных магнитных полях, когда ларморовские радиусы частиц могут быть меньше размеров эффективной области их взаимодействия.

Воспользуемся следующей формой интеграла столкновений (см. [10])

$$I_{st}(\Phi) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \sum_{\beta=e,i} \mathbf{J}_{\alpha\beta} \tag{1.7}$$

где

$$\mathbf{J}_{\alpha\beta} = \frac{2}{\pi m_\alpha}(q_\alpha q_\beta)^2 \int \frac{dk}{k^4}\mathbf{k} \int_0^{\tau_{\max}} d\tau S_\tau^{(0)}\, \mathbf{k}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\alpha} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\beta}\right) \times$$
$$\times f_\alpha f_\beta \exp\left[i\mathbf{k}(S_\tau^{(0)} - 1)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\beta)\right] d\mathbf{v}_\beta$$

Здесь $\tau_{\max}$ — максимальное время взаимодействия частиц, $S_\tau^{(0)}$ — оператор, заменяющий динамические переменные частиц, находящихся в однородном магнитном поле, на их значения через время τ, предполагая частицы невзаимодействующими.

2. Будем искать решение кинетического уравнения (1.5) в виде

$$\Phi_\alpha = \Phi_{ij}{}^\alpha w_{\alpha i} w_{\alpha j} \qquad (w_\alpha = (2T/m_\alpha)^{1/2} v_\alpha) \tag{2.1}$$

(w_α — безразмерная скорость)

Тензор Φ_{ij}^α должен быть линеен по возмущению e_{ij}°. Легко показать, что имея псевдовектор $\mathbf{h}$, можно составить только следующие шесть независимых взаимноортогональных тензоров второго ранга, линейных по e°

$$Q_{ij}^{(0)} = h_i h_j h_\mu h_\nu e_{\mu\nu}^\circ, \qquad Q_{ij}^{(3)} = {}^1/_2 (\delta_{i\mu}^\perp \varepsilon_{j\gamma\nu} + \delta_{j\nu}^\perp \varepsilon_{i\gamma\mu}) h_\gamma e_{\mu\nu}^\circ$$

$$Q_{ij}^{(1)} = \left(\delta_{i\mu}^\perp \delta_{j\nu}^\perp + {}^1/_2 \delta_{ij}^\perp h_\mu h_\nu\right) e_{\mu\nu}^\circ, \qquad Q_{ij}^{(4)} = (h_i h_\mu \varepsilon_{j\gamma\nu} + h_j h_\nu \varepsilon_{i\gamma\mu}) h_\gamma e_{\mu\nu}^\circ \tag{2.2}$$

$$Q_{ij}^{(2)} = (\delta_{i\mu}^\perp h_j h_\nu + \delta_{j\nu}^\perp h_i h_\mu) e_{\mu\nu}^\circ, \qquad Q_{ij}^{(5)} = \delta_{ij}^\perp h_\mu h_\nu e_{\mu\nu}^\circ \quad (\delta_{ij}^\perp = \delta_{ij} - h_i h_j)$$

Здесь $\varepsilon_{ij\gamma}$ — антисимметричный тензор. Все эти тензоры, кроме $Q^{(0)}$ и $Q^{(5)}$, бездивергентны, т. е. имеют след, равный нулю.

Итак, $\Phi_{ij}{}^{(\alpha)}$ — линейная комбинация этих шести тензоров

$$\Phi_\alpha = -\sum_{p=0}^{5} b_\alpha{}^{(p)} Q_{ij}{}^{(p)} w_{\alpha i} w_{\alpha j} \tag{2.3}$$

Коэффициенты $b_\alpha^{(p)}$, вообще говоря, функции w_α^2. Однако будем считать их не зависящими от скорости, что соответствует первому приближению при разложении этих коэффициентов в ряд по полиномам Лагерра.

Подставляя (2.3) в (1.5), после умножения на $w_{\alpha i} w_{\alpha j} d\mathbf{v}_\alpha$ и интегрирования, получим:

$$e_{ij}^\circ = \Omega_\alpha \left(2b_\alpha{}^{(1)} Q_{ij}{}^{(3)} + b_\alpha{}^{(2)} Q_{ij}{}^{(4)} - 2b_\alpha{}^{(3)} Q_{ij}{}^{(1)} - b_\alpha{}^{(4)} Q_{ij}{}^{(2)}\right) +$$
$$+ \frac{2}{\pi^4 m_\alpha T} \sum_{\beta=e,i} (q_\alpha q_\beta)^2 n_\beta \int \frac{dk}{k^4} k_t \int_0^{\tau_{\max}} d\tau \int d\mathbf{w}_\alpha d\mathbf{w}_\beta \times$$
$$\times \exp\left[-w_\alpha{}^2 - w_\beta{}^2 + i\mathbf{k}(S_\tau^{(0)} - 1)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\beta)\right] \times$$
$$\times (w_{\alpha i} k_j + w_{\alpha j} k_i) \sum_{p=0}^{5} Q_{rt}{}^{(p)} S_\tau^{(0)} \left[b_\alpha{}^{(p)} w_{\alpha r} - \left(\frac{m_\alpha}{m_\beta}\right)^{1/2} b_\beta{}^{(p)} w_{\beta r}\right] \tag{2.4}$$

---

[1] Речь идет об интегралах столкновений для парных взаимодействий. Влияние коллективных эффектов на явления переноса рассматривалось в [5, 6].

Действие оператора $S_\tau^{(0)}$ на динамические переменные представим в виде:

$$S_\tau^{(0)} w_{\alpha i} = (h_i h_m + \sin \Omega_\alpha \tau \varepsilon_{imk} h_k + \cos \Omega_\alpha \tau \delta_{im}^{\perp})\, w_{\alpha m} \tag{2.5}$$

$$S_\tau^{(0)} r_{\alpha i} = \int_0^\tau S_{\tau'}^{(0)} w_{\alpha i} d\tau' \tag{2.6}$$

После этого произведем интегрирование по скоростям в столкновительном члене в (2.4). Записав e° в виде:

$$e^{\circ} = Q^{(0)} + Q^{(1)} + Q^{(2)} - {}^1/{}_2 Q^{(5)} \tag{2.7}$$

используя свойство ортогональности тензоров $Q^{(p)}$, получаем

$$\begin{aligned} 1 = \frac{2}{\pi m_\alpha T} \sum_{\beta=e,\,i} (q_\alpha q_\beta)^2 n_\beta \{ b_\alpha^{(0)} [-L_1^{\alpha\beta} (\rho_\alpha^2 \Omega_\alpha^2 \tau^2) + 2K_2^{\alpha\beta}] - \\ -2b_\alpha^{(5)} L_3^{\alpha\beta} (\rho_\alpha^2 \Omega_\alpha \tau \sin \Omega_\alpha \tau) - \rho_\alpha^2 \frac{q_\alpha}{q_\beta} [b_\beta^{(0)} L_1^{\alpha\beta} (\Omega_\alpha \Omega_\beta \tau^2) + 2b_\beta^{(5)} L_3^{\alpha\beta} (\Omega_\alpha \tau \sin \Omega_\beta \tau)]\} \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi m_\alpha T} \sum_{\beta=e,\,i} (q_\alpha q_\beta)^2 n_\beta \{ b_\alpha^{(0)} [-L_3^{\alpha\beta} (\rho_\alpha^2 \Omega_\alpha \tau \sin \Omega_\alpha \tau)] + \\ + 2b_\alpha^{(5)} [K_1^{\alpha\beta} (\cos \Omega_\alpha \tau) - 2L_2^{\alpha\beta} (\rho_\alpha^2 \sin^2 \Omega_\alpha \tau)] - \\ - \rho_\alpha^2 [b_\beta^{(0)} L_3^{\alpha\beta} (\Omega_\beta \tau \sin \Omega_\alpha \tau) + 4b_\beta^{(5)} L_2^{\alpha\beta} (\sin \Omega_\alpha \tau \sin \Omega_\beta \tau)]\} \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} 1 = -2\Omega_\alpha M_\alpha + \frac{2}{\pi m_\alpha T} \sum_{\beta=e,\,i} (q_\alpha q_\beta)^2 n_\beta \Big\{ -2M_\alpha K_1^{\alpha\beta} \Big(\exp \Big[i \Big(\frac{\pi}{2} \Omega_\alpha \tau \Big) \Big] \Big) + \\ + \frac{8\rho_\alpha^2 q_\alpha}{q_\beta} M_\beta L_2^{\alpha\beta} \Big(\sin \frac{\Omega_\alpha \tau}{2} \sin \frac{\Omega_\beta \tau}{2} \exp \Big[i \Big(\frac{\pi}{2} - \frac{\Omega_\alpha + \Omega_\beta}{2} \tau \Big) \Big] \Big) + \\ + 8\rho_\alpha^2 M_\alpha L_2^{\alpha\beta} \Big(\sin^2 \frac{\Omega_\alpha \tau}{2} \exp \Big[i \Big(\frac{\pi}{2} - \Omega_\alpha \tau \Big) \Big] \Big) \Big\} \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} 1 = -\Omega_\alpha N_\alpha + \frac{2}{\pi m_\alpha T} \sum_{\beta=e,\,i} (q_\alpha q_\beta)^2 n_\beta \Big\{ i N_\alpha \Big[\rho_\alpha^2 L_3^{\alpha\beta} \Big(\frac{\Omega_\alpha^2 \tau^2}{2} + \\ + 2\sin^2 \frac{\Omega_\alpha \tau}{2} \cos \Omega_\alpha \tau + \Omega_\alpha \tau \sin \Omega_\alpha \tau \Big) - K_1^{\alpha\beta} - K_2^{\alpha\beta} (\cos \Omega_\alpha \tau) \Big] + \\ + N_\alpha \Big[2\rho_\alpha^2 L_3^{\alpha\beta} \Big(\sin^2 \frac{\Omega_\alpha \tau}{2} \sin \Omega_\alpha \tau + \Omega_\alpha \tau \sin^2 \frac{\Omega_\alpha \tau}{2} \Big) - K_2^{\alpha\beta} (\sin \Omega_\alpha \tau) \Big] + \\ + \frac{\rho_\alpha^2 q_\alpha}{q_\beta} \Big[i N_\beta L_3^{\alpha\beta} \Big(\frac{\Omega_\alpha \Omega_\beta \tau^2}{2} + 2\sin \frac{\Omega_\alpha \tau}{2} \sin \frac{\Omega_\beta \tau}{2} \cos \frac{\Omega_\alpha + \Omega_\beta}{2} \tau + \\ + \frac{\Omega_\alpha \tau}{2} \sin \Omega_\beta \tau + \frac{\Omega_\beta \tau}{2} \sin \Omega_\alpha \tau \Big) + 2N_\beta L_3^{\alpha\beta} \Big(\sin \frac{\Omega_\alpha \tau}{2} \sin \frac{\Omega_\beta \tau}{2} \sin \frac{\Omega_\alpha + \Omega_\beta}{2} \tau \Big) \Big] \Big\} \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$(M_\alpha = b_\alpha^{(3)} + i b_\alpha^{(1)}), \quad N_\alpha = b_\alpha^{(4)} + i b_\alpha^{(2)})$$

Интегральные операторы $L_i^{\alpha\beta}$ определены соотношениями

$$L_1^{\alpha\beta} = \int \frac{d\mathbf{k}}{k^4} k_{\parallel}^4 \int_0^{\tau_{max}} d\tau e^{-t_\alpha - t_\beta}, \qquad L_2^{\alpha\beta} = \frac{1}{8} \int \frac{dk}{k^4} k_{\perp}^4 \int_0^{\tau_{max}} d\tau\, e^{-t_\alpha - t_\beta}$$

$$L_3^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{k}}{k^4} k_{\perp}^2 k_{\parallel}^2 \int_0^{\tau_{max}} d\tau\, e^{-t_\alpha - t_\beta}$$

Интегральные операторы $K_i^{\alpha\beta}$ определены соотношением

$$K_1^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\int \frac{d\mathbf{k}}{k^4} k_\perp^2 \int\limits_0^{\tau_{\max}} d\tau\, e^{-t_\alpha - t_\beta}, \qquad K_2^{\alpha\beta} = \int \frac{d\mathbf{k}}{k^4} k_\parallel^2 \int\limits_0^{\tau_{\max}} d\tau\, e^{-t_\alpha - t_\beta}$$

$$t_\alpha = \rho_\alpha^2 \left(k_\parallel^2 \frac{\Omega_\alpha^2 \tau^2}{4} + k_\perp^2 \sin^2 \frac{\Omega_\alpha \tau}{2} \right), \qquad \rho_\alpha = \frac{1}{\Omega_\alpha} \left(\frac{2T}{m} \right)^{1/2} \tag{2.12}$$

Здесь ρ_α — ларморовский радиус, α — частицы, $k_\parallel$ и $k_\perp$ — составляющие вектора $\mathbf{k}$ вдоль и поперек поля соответственно.

Система уравнений (2.8) — (2.11) отличается от уравнений, получаемых в обычной теории, когда влияния магнитного поля на соударения не учитываются. Особенность интеграла столкновений (1.7) заключается в явной зависимости от магнитного поля. Эта зависимость проявилась в том, что действие интеграла столкновений на какой-либо из тензоров $Q^{(p)}$ дает, кроме этого тензора, еще один. Однако по-прежнему возмущение можно разбить на три независимые части: $Q^{(0)}$ и $Q^{(5)}$, $Q^{(1)}$ и $Q^{(3)}$, $Q^{(2)}$ и $Q^{(4)}$. В обычной теории Φ_α ищется в виде разложения не по шести, а по пяти тензорам (см. например [4]). Фактически это означает, что в разложении (2.3) независимыми являются только пять коэффициентов. Коэффициенты $b_2^{(0)}$ и $b_\alpha^{(5)}$ в обычной теории связаны между собой соотношением:

$$b_\alpha^{(0)} + 2b_\alpha^{(5)} = 0 \tag{2.13}$$

Это представляется очевидным, если учесть, что вязкие напряжения, возникающие из-за возмущения плазмы, описываемого тензорами $Q^{(0)}$ и $Q^{(5)}$, в обычной теории такие же, как и без магнитного поля. На эти возмущения, как видно из уравнений (2.8), (2.9), магнитное поле непосредственно не влияет в том смысле, что отсутствует член, связанный с силой Лоренца. Поэтому в теории с изотропным интегралом столкновений оба эти возмущения тождественны и описываются одним коэффициентом вязкости. Наш интеграл столкновений явно зависит от магнитного поля и поэтому вносит дополнительную анизотропию. Можно ожидать, что возмущения плазмы, описываемые тензорами $Q^{(0)}$ и $Q^{(5)}$, будут характеризоваться различными коэффициентами вязкости. Это будет означать, если учесть вид $Q^{(0)}$ и $Q^{(5)}$, различие во временах релаксации импульса вдоль и поперек поля (ср. [9, 11]).

3. Используя систему уравнений (2.8) — (2.11), найдем решение кинетического уравнения (1.5) с точностью до функции

$$\Phi_\alpha' = a_\alpha^{(1)} + {}^1/_2 a^{(2)} m_\alpha v_\alpha^2 \tag{3.1}$$

обращающей в нуль правую часть (1.5).

Коэффициенты $a_\alpha^{(1)}$, $a^{(2)}$ определяются из следующих уравнений, являющихся следствием того факта, что нулевое приближение $f_\alpha^{(0)}$ полностью определяет плотность и температуру плазмы в данной точке

$$\int f_\alpha^{(0)} (\Phi_\alpha + \Phi_\alpha')\, d\mathbf{v}_\alpha = \sum_{\beta=e,i} \int f_\alpha^{(0)} (\Phi_\beta + \Phi_\beta') \frac{m_\beta v_\beta^2}{2} d\mathbf{v}_\beta = 0 \tag{3.2}$$

Нетрудно проверить, что эти требования будут удовлетворены, если

$$a^{(2)} = 0, \qquad a_\alpha^{(1)} = {}^1/_2 (b_\alpha^{(0)} + 2b_\alpha^{(5)}) h_\mu h_\nu e_{\mu\nu}^\circ$$

а на коэффициенты $b_\alpha^{(0)}$ и $b_\alpha^{(5)}$ наложить условие

$$\sum_{\beta=e,i} n_\alpha (b_\alpha^{(0)} + 2b_\alpha^{(5)}) = 0 \tag{3.3}$$

После этого можно найти тензор напряжений:

$$\pi_{ij}^{(\alpha)} = \int f_\alpha^{(0)} (\Phi_\alpha + \Phi_\alpha') m_\alpha v_{\alpha i} v_{\alpha j} dv_\alpha = \pi_{ij}^{\circ(\alpha)} + \Delta p_\alpha \delta_{ij} \qquad (3.4)$$

из которого выделена бездивергентная часть

$$\pi_{ij}^{\circ(\alpha)} = -\sum_{p=0}^{4} \eta_\alpha^{(p)} W_{ij}^{(p)}$$

Второе слагаемое в (3.4) представляет собой поправку к гидростатическому давлению:

$$\Delta p_\alpha = -{}^1/_3 n_2 T \left(b_\alpha^{(0)} + 2b_\alpha^{(5)}\right) \qquad (3.5)$$

Коэффициенты вязкости $\eta_\alpha^{(p)}$ и тензоры $W_{ij}^{(p)}$ определены следующим образом:

$$\eta_\alpha^{(0)} = \left(b_\alpha^{(0)} - b_\alpha^{(5)}\right) \eta_\alpha T, \quad \eta_\alpha^{(p)} = \eta_\alpha T b_\alpha^{(p)} \quad \text{при } p \neq 0$$

$$W_{ij}^{(0)} = \left(h_i h_j - {}^1/_3\, \delta_{ij}\right) h_\mu h_\nu e_{\mu\nu}^\circ, \quad W_{ij}^{(p)} = Q_{ij}^{(p)} \quad \text{при } p \neq 0$$

4. Система уравнений (2.8) — (2.11) совместно с (3.3) позволяет найти коэффициенты вязкости.

а) Коэффициенты $\eta_\alpha^{(0)}$. Рассмотрим случай, когда магнитное поле настолько слабое, что можно пренебречь эффектами, связанными с конечностью ларморовского радиуса. Тогда, полагая в (2.8) — (2.9) магнитное поле равным нулю, получаем известные выражения для коэффициентов вязкости:

$$\eta_e^{(0)} = \frac{5 n_e T}{4\nu_e (1+R) \ln r_D^*}, \qquad \eta_i^{(0)} = \frac{5 n_i T}{4\nu_i \ln r_D^*}, \quad R = \frac{1}{z\sqrt{2}}, \quad \left|\frac{q_i}{q_e}\right| = z \qquad (4.1)$$

$$\nu_e = \frac{4\sqrt{2\pi}\,(q_e q_i)^2 n_i}{3\sqrt{m_e}\, T^{3/2}}, \qquad \nu_i = \frac{4\sqrt{\pi}\, q_i^4 n_i}{3\sqrt{m_i}\, T^{3/2}} \qquad (4.2)$$

Здесь z — заряд иона, верхним индексом * обозначаются величины, отнесенные к $r_{\min}$, например, $r_D^* \equiv r_D / r_{\min}$.

Рассмотрим далее случай, когда в процессе столкновения магнитное поле существенно влияет на движение хотя бы одной из взаимодействующих частиц. Выражения для коэффициентов вязкости усложняются и с логарифмической точностью имеют следующий вид:

$$\eta_e^{(0)} = \frac{5 n_e T}{4\nu_e} \left[(1+R) \ln \rho_e^* + \frac{45}{16} R \ln \frac{r_D}{\rho_e}\right]^{-1} \qquad (\rho_e \ll r_D) \qquad (4.3)$$

$$\eta_i^{(0)} = \frac{5 n_i T}{4\nu_i} \left[\ln \rho_i^* + \frac{45}{16} \ln \frac{r_D}{\rho_e}\right]^{-1} \qquad (\rho_i \ll r_D) \qquad (4.4)$$

Вычислим среднюю энергию хаотического движения (температуру) каждой из компонент плазмы:

$$\frac{3}{2} n_\alpha T_\alpha = \frac{1}{2} \int f_\alpha^{(0)} m_\alpha v_\alpha^2 dv_\alpha = \frac{3}{2} n_\alpha T - \frac{1}{2} n_\alpha T \left(b_\alpha^{(0)} + 2b_\alpha^{(5)}\right) h_\mu h_\nu e_{\mu\nu}^\circ \qquad (4.5)$$

Имея в виду (2.13), приходим к выводу, что температура обоих компонент плазмы в слабом магнитном поле одинакова.

В сильном магнитном поле соотношение (2.13) не имеет больше места и, следовательно, согласно (4.5), температура электронов не будет равна температуре ионов:

$$T_e - T_i = \frac{5 T \Lambda_0 h_\mu h_\nu e_{\mu\nu}^\circ}{12\nu_i \Lambda^{(i)} (\ln \rho_e^* + \Lambda_0)} \qquad (4.6)$$

Вместе с этим изменится и давление компонент плазмы (см. (3.5)).

В равенство (4.6) введены следующие обозначения

$$\Lambda^{(i)} = \ln r_D^* \qquad (\rho_i \gg r_D) \tag{4.7}$$

$$\Lambda^{(i)} = \ln \rho_i^* + \frac{45}{16} \ln \frac{r_D}{\rho_i} \qquad (r_D \ll \rho_i) \tag{4.8}$$

$$\Lambda_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{m_i}{m_e} \ln \frac{r_D}{\rho_e} \qquad \left(\rho_i \gg r_D \gg \rho_e \gg r_0 = \frac{m_i}{m_e} r_{\min}\right) \tag{4.9}$$

$$\Lambda_0 = \frac{1}{4} \ln \frac{r_0}{\rho_e} \ln \rho_e^* r_0^* + \frac{1}{2} \ln \frac{m_i}{m_e} \ln \frac{r_D}{r_0} \qquad (\rho_i \gg r_D \gg r_0 \gg \rho_e) \tag{4.10}$$

$$\Lambda_0 = \frac{1}{4} \ln \frac{r_D}{\rho_e} \ln \rho_e^* r_D^* \qquad (\rho_i \gg r_0 \gg r_D \gg \rho_e) \tag{4.11}$$

$$\Lambda_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{\rho_i}{\rho_e} \ln \frac{m_i}{m_e} + \frac{1}{2} \ln \frac{r_D}{\rho_i} \ln \frac{m_i \rho_i}{m_e r_D} \qquad \left(\frac{\sqrt{m_i}}{\sqrt{m_e}} \rho_i \gg r_D \gg \rho_i \gg \rho_e \gg r_0\right) \tag{4.12}$$

$$\Lambda_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{\rho_i}{\rho_e} \ln \frac{m_i}{m_e} + \frac{1}{8} \ln^2 \frac{m_i \rho_i}{m_e r_D} \qquad \left(r_D \gg \frac{\sqrt{m_i}}{\sqrt{m_e}} \rho_i \gg \rho_i \gg \rho_e \gg r_0\right) \tag{4.13}$$

$$\Lambda_0 = \frac{1}{4} \ln \frac{r_0}{\rho_e} \ln \rho_e^* r_0^* + \frac{1}{2} \ln \frac{m_i}{m_e} \ln \frac{\rho_i}{r_0} + \frac{1}{2} \ln \frac{r_D}{\rho_i} \ln \frac{m_i \rho_i}{m_e r_D}$$
$$\left(\frac{\sqrt{m_i}}{\sqrt{m_e}} \rho_i \gg r_D \gg \rho_i \gg r_0 \gg \rho_e\right) \tag{4.14}$$

$$\Lambda_0 = \frac{1}{4} \ln \frac{r_0}{\rho_e} \ln \rho_e^* r_0^* + \frac{1}{2} \ln \frac{m_i}{m_e} \ln \frac{\rho_i}{r_0} + \frac{1}{8} \ln^2 \frac{m_i \rho_i}{m_e r_D}$$
$$\left(r_D \gg \frac{\sqrt{m_i}}{\sqrt{m_e}} \rho_i \gg \rho_i \gg r_0 \gg \rho_e\right) \tag{4.15}$$

$$\Lambda_0 = \frac{1}{4} \ln \frac{r_D}{\rho_e} \ln \rho_e^* r_D^* \begin{cases} r_0^{1/3} \rho_i^{2/3} \equiv r_1 \gg \rho_i \gg r_D \gg \rho_i \\ r_1 \gg r_D \gg \rho_i \gg \rho_e \end{cases} \tag{4.16}$$

$$\Lambda_0 = \frac{1}{4} \ln \frac{r_1}{\rho_e} \ln r_1^* \rho_e^* + \ln \frac{r_D}{r_1} \ln \left| \frac{\Omega_e \rho_e}{\Omega_i \sqrt{r_D r_1}} \right| \qquad \left(\rho_e \left| \frac{\Omega_e}{\Omega_i} \right| \gg r_D \gg r_1 \gg \rho_i \gg \rho_e\right) \tag{4.17}$$

$$\Lambda_0 = \frac{1}{4} \ln \frac{r_1}{\rho_e} \ln r_1^* \rho_e^* + \frac{1}{2} \ln^2 \left| \frac{\rho_e}{r_1} \frac{\Omega_e}{\Omega_i} \right| \qquad \left(r_D \gg \rho_e \left| \frac{\Omega_e}{\Omega_i} \right| \gg r_1 \gg \rho_i \gg \rho_e\right) \tag{4.18}$$

б) Коэффициенты $\eta_\alpha^{(2)}$ и $\eta_\alpha^{(4)}$. Коэффициент $\eta_\alpha^{(4)}$ в первом приближении не зависит от частоты столкновений и равен:

$$\eta_\alpha^{(4)} = -\frac{n_\alpha T}{\Omega_\alpha}$$

Для коэффициента $\eta_\alpha^{(2)}$ получаем:

$$\eta_e^{(2)} = \frac{4 n_e T \nu_e}{\Omega_e^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{10} R\right) \ln r_D^* \qquad (\rho_e \gg r_D) \tag{4.19}$$

$$\eta_i^{(2)} = \frac{6 n_i T \nu_i}{5 \Omega_i^2} \ln r_D^* \qquad (\rho_i \gg r_D) \tag{4.20}$$

При более сильных полях имеем:

$$\eta_e^{(2)} = \frac{4n_eT\nu_e}{\Omega_e^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{10}R\right)\ln \rho_e^* + \frac{3n_eT\nu_e}{4\Omega_e^2}\Lambda_1 \qquad (4.21)$$

где Λ_1 в зависимости от величины магнитного поля, плотности и температуры плазмы имеет следующий вид:

$$\Lambda_1 = \ln\frac{m_i}{m_e}\ln\frac{r_D}{\rho_e} \qquad (\rho_i \gg r_D \gg \rho_e \gg r_0) \qquad (4.22)$$

$$\Lambda_1 = \ln\frac{m_i}{m_e}\ln\frac{r_D}{\rho_e} + \frac{1}{2}\ln\frac{r_0}{\rho_e}\ln r_D^*\rho_e^* \qquad (\rho_i \gg r_D \gg r_0 \gg \rho_e)$$

$$\Lambda_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{r_D}{\rho_e}\ln r_D^*\rho_e^* \qquad (\rho_i,\ r_0 \gg r_D \gg \rho_e)$$

$$\Lambda_1 = \frac{1}{2}\ln^2\frac{m_i}{m_e} + \frac{1}{2}\ln\frac{r_D}{\rho_i}\ln r_D^*\rho_i^* \qquad (r_D \gg \rho_i \gg \rho_e \gg r_0)$$

$$\Lambda_1 = \ln\frac{m_i}{m_e}\ln\frac{\rho_i}{r_0} + \frac{1}{2}\ln\frac{r_0}{\rho_e}\ln \rho_e^* r_0^* + \frac{1}{2}\ln\frac{r_D}{\rho_i}\ln r_D^*\rho_i^*$$
$$(r_D \gg \rho_i \gg r_0 \gg \rho_e)$$

$$\Lambda_1 = \frac{1}{4}\ln\frac{m_i}{m_e}\ln r_D^*\rho_e^* + \frac{1}{2}\ln\frac{r_D}{\rho_i}\ln r_D^*\rho_i^* \qquad (r_D,\ r_0 \gg \rho_i \gg \rho_e)$$

В коэффициент вязкости $\eta_i^{(2)}$ основной вклад дают ион-ионные столкновения. В случае, когда ларморовский радиус иона становится меньше r_D вместо формулы (4.20) получаем:

$$\eta_i^{(2)} = \frac{6\nu_i n_i T}{5\Omega_i^2}\ln \rho_i^* \qquad (4.23)$$

в) Коэффициенты $\eta_\alpha^{(1)}$ и $\eta_\alpha^{(3)}$. Коэффициент $\eta_\alpha^{(3)}$, так же как и в ([4]), не зависит от частоты столкновений и равен:

$$\eta_\alpha^{(3)} = -\frac{n_\alpha T}{2\Omega_\alpha} \qquad (4.24)$$

Для коэффициента $\eta_\alpha^{(1)}$ получаем:

$$\eta_\alpha^{(1)} = \frac{1}{4}\eta_\alpha^{(2)} \qquad (\rho_e \gg r_D) \qquad (4.25)$$

При более сильных магнитных полях имеем:

$$\eta_e^{(1)} = \frac{\nu_e}{\Omega_e^2}\ln \rho_e^*\left[\frac{1}{2} + \frac{3}{10}R + \frac{1}{4}R\left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{2\pi}\right)\right] \qquad (\rho_e \ll r_D) \qquad (4.26)$$

$$\eta_i^{(1)} = \frac{\nu_i}{\Omega_i^2}\ln \rho_i^*\left[\frac{3}{10} + \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{2\pi}\right)\right] \qquad (\rho_i \ll r_D) \qquad (4.27)$$

Следует сказать несколько слов о значениях величин, обусловленных влиянием сильного магнитного поля на соударения частиц. Рассмотрим, например, дважды логарифмические добавки, представленные формулами (4.22). Заметим, что первые три формулы из этой группы имеют место, когда $\rho_e \ll r_D \ll \rho_i$, т. е. для водородной плазмы, при выполнении условий

$$1 \ll 4.1 \cdot 10^2 H / \sqrt{n} \ll 43 \qquad (4.28)$$

Здесь H — магнитное поле в гауссах, n — плотность. Последние три формулы из группы (4.22) справедливы при условии

$$\rho_e \ll \rho_i \ll r_D$$

т. е.

$$H / \sqrt{n} \gg 0.1$$

Температура плазмы определяет величину $r_0 = 3 \cdot 10^{-4} \cdot T^{-1}$, где T — температура в электронвольтах, и, таким образом, отбирает различные частные случаи из (4.22).

В качестве примера рассмотрим плазму с плотностью $n \approx 10^{10}$ *см*$^{-3}$, находящуюся в магнитном ноле с напряженностью $H \approx 10^4$ *гс* при температуре 1 *эв*. В этом случае $r_D \approx 0.7 \cdot 10^{-2}$ *см*, $\rho_e \approx 0.17 \cdot 10^{-3}$ *см*, $r_{\min} \approx 0.74 \cdot 10^{-6}$ *см* и $\Lambda_1 \approx 28.0$ в то время, как кулоновский логарифм равен 10.6. Отсюда видно, что поправки, обусловленные учетом влияния магнитного поля на соударения частиц, более чем в два раза превосходят кулоновский логарифм, получаемый в обычной теории.

Из приведенных выше выражений для коэффициентов вязкости видно, что в сильном магнитном поле, влияющем на соударения частиц, вязкость плазмы проявляется существенно иным образом. Так, например, между электронной и ионной компонентами плазмы возникает разность температур, пропорциональная скорости сдвигов $h_\mu h_\nu e_{\mu\nu}^\circ$ и логарифмически зависящая от магнитного поля (4.6).

В заключение автор благодарит В. П. Силина за предложенную тему и многочисленные полезные обсуждения работы.

Поступила 27 III 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. Изд-во иностр. лит., 1960.
2. Marshall W. Kinetic theory of ionized gases. AERE, t/r 2419, 1960.
3. Whright J. Phys. Fluids, 1961, vol. 4, p. 11.
4. Брагинский С. И. Вопросы теории плазмы. ч. I. Госатомиздат, 1963.
5. Силин В. П., Горбунов Л. М. Докл. АН СССР, 1962, т. 145, стр. 1265.
6. Силин В. П. Ядерный синтез, 1962, т. 2, № 3, 4.
7. Беляев С. Т. Физика плазмы и проблема управляемых термо-ядерных реакций. Изд-во АН СССР, 1958, т. 3, стр. 66.
8. Силин В. П. Ж. Эксперим. и теор. физ., 1960, т. 38, стр. 1771.
9. Алиев Ю. М., Силин В. П. Ядерный синтез, 1963, вып. 3. О скорости выравнивания «продольной» и «поперечной» температур плазмы в магнитном поле.
10. Алиев Ю. М., Шистер А. Р. Явление переноса в плазме в сильном магнитном поле. Ж. Эксперим. и теор. физ., 1963, т. 45, № 11, стр. 1499.