

УДК 532.5

МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМ ЛОПАСТЕЙ ПРИ АЭРОДИНАМИЧЕСКОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ РЕШЕТКИ ВЕНТИЛЯТОРА

Е. А. Батяев, В. Б. Курзин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Разработан метод расчета геометрических параметров решетки осевого вентилятора заданной производительности, основанный на минимизации некоторого функционала и использовании решения обратной задачи обтекания решетки в рамках гипотезы цилиндрических сечений. Для минимизации функционала применяется итерационный метод линеаризации. Приведены примеры расчетов.

Введение. Аэродинамические конструкции часто несовершенны с точки зрения эксплуатационных затрат, надежности и т. п. Одним из способов совершенствования конструкций, в частности решеток вентиляторов, является оптимизация их геометрических параметров. При аэродинамическом проектировании решеток вентилятора необходимо обеспечить заданную производительность решетки и безударность входа потока в нее. С этой целью в [1, 2] разработан метод расчета геометрических параметров решетки, основанный на решении обратной задачи аэродинамики, который позволяет удовлетворить дополнительным условиям, позволяющим улучшить свойства конструкции. В предложенном методе число варьируемых геометрических параметров равно числу условий, которым необходимо удовлетворить. Очевидно, что фиксированные параметры (не включенные в число варьируемых) являются определенным резервом для улучшения характеристик решетки. В настоящей работе данный резерв предлагается использовать посредством решения экстремальной задачи, в качестве минимизируемого функционала которой могут быть выбраны, например, выражения для потерь полного давления, массы конструкции, напряжений в лопастях и др.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу определения геометрических параметров двойной решетки тонких лопастей рабочего колеса осевого вентилятора (рис. 1), которая в так называемом расчетном режиме должна обеспечивать заданную производительность вентилятора при безотрывном обтекании лопастей несжимаемой жидкостью.

При постановке задачи используется условие безударности входа потока в решетку, а условия безотрывности обтекания принимаются в виде неравенств, полученных в [3] для плоских решеток:

$$D_\varepsilon = (\sin \theta_1 / \sin \theta_2) [1,12 + 0,61 \sin^2 \theta_1 (\operatorname{ctg} \theta_1 - \operatorname{ctg} \theta_2) / \tau] \leq 2, \quad (1.1)$$

где D_ε — параметр диффузорности решетки; τ — густота решетки; θ_1, θ_2 — углы входа и выхода потока. При выполнении этих условий производительность решетки слабо зависит от вязкости жидкости, поэтому можно принять допущение об идеальности жидкости. При некоторых дополнительных условиях, не связанных с характером течения жидкости, в [1, 2] разработан метод расчета геометрических параметров решетки, основанный на решении обратной задачи обтекания ее идеальной несжимаемой жидкостью в рамках гипотезы цилиндрических сечений.

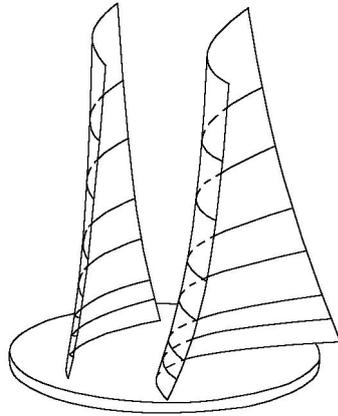


Рис. 1

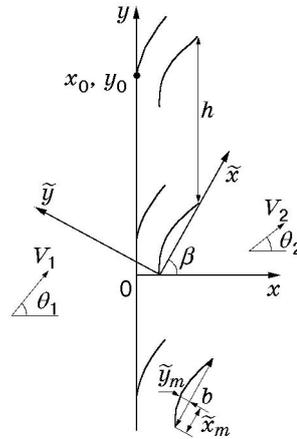


Рис. 2

Следует отметить, что в отличие от работы [4], в которой развиваются методы решения обратных краевых задач, в [1, 2] на течение жидкости ставятся условия лишь интегрального вида. Такой подход связан с принятым в инженерной практике параметрическим заданием геометрии профилей, при котором число геометрических параметров в цилиндрическом сечении решетки ограничено, в частности, для исследуемого типа решетки их двенадцать (рис. 2). В [1, 2] некоторые из этих параметров не включены в число варьируемых. В настоящей работе они используются для минимизации функционала J . Результатом минимизации функционала J являются лучшие по сравнению с исходными интегральные характеристики решетки. Параметры, обеспечивающие минимум данного функционала, будем считать условно-оптимальными.

Введем вектор $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$, компонентами которого являются искомые геометрические параметры решетки (рис. 2). Здесь $n = 12N$; N — число сечений, на которые разбивается решетка лопастей. Пусть $g_i(\mathbf{x}) = 0$ ($i = 1, \dots, m$) — накладываемые условия, а $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ ($i = m+1, \dots, m+s$) — ограничения типа (1.1), при выполнении которых геометрические параметры решетки могут быть определены методом, разработанным в [1, 2]. Тогда можно сформулировать экстремальную задачу

$$J(\mathbf{x}) \longrightarrow \inf, \quad \mathbf{x} \in X; \quad (1.2)$$

$$X = \{\mathbf{x} \in E^n: g_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, \dots, m; g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = m+1, \dots, m+s\}. \quad (1.3)$$

В качестве минимизируемого функционала могут быть рассмотрены, например, профильные потери полного давления при обтекании решетки, обусловленные влиянием вязкости жидкости. Минимизация, по существу, направлена на увеличение КПД вентилятора. Для расчетного режима обтекания решеток в [3, 5] полуэмпирическая зависимость коэффициента профильных потерь от максимального прогиба средней линии профиля \bar{f} представлена в виде

$$c_x^{\text{пр}} = 0,012 + 0,048\bar{f} + 0,0023\tau.$$

С учетом гипотезы цилиндрических сечений потери полного давления, обусловленные профильными потерями, вычисляются по формуле

$$\Delta P_{\text{пр}} = (\rho V_1^2 / 2) b N c_x^{\text{пр}} / (2\pi R), \quad (1.4)$$

где ρ — плотность жидкости; V_1 — скорость набегающего потока; b — полусумма длин хорд профилей в R -м сечении лопатки.

2. Метод решения оптимизационной задачи. На основе анализа ряда численных методов решения экстремальных задач выбран итерационный метод линеаризации [6] —

модифицированный аналог метода проекции градиента, в котором наиболее полно используются все особенности метода решения обратной задачи аэродинамики решеток, предложенного в [1, 2]. Согласно методу линеаризации, если множество

$$X_* = \{\mathbf{x} \in X: J(\mathbf{x}) = J_* = \inf J(\mathbf{x}) > -\infty\}$$

не пусто, то последовательное приближение \mathbf{x}_{k+1} вектора искомых параметров определяется из решения следующей задачи:

$$\begin{aligned} \Phi_k(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|^2 + \beta_k \sum_{j=1}^n \frac{\partial J(\mathbf{x}_k)}{\partial x_j} (x_j - x_{jk}) \longrightarrow \inf, \quad \mathbf{x} \in W_k, \beta_k > 0, \\ W_k &= \left\{ \mathbf{x} \in E^n: g_i(\mathbf{x}_k) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i(\mathbf{x}_k)}{\partial x_j} (x_j - x_{jk}) = 0, \quad i = 1, \dots, m; \right. \\ &\quad \left. g_i(\mathbf{x}_k) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i(\mathbf{x}_k)}{\partial x_j} (x_j - x_{jk}) \leq 0, \quad i = m + 1, \dots, m + s \right\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где β_k — шаг в методе линеаризации. Возможность такого подхода к решению задачи оптимизации геометрических параметров решетки обусловлена тем, что исходная прямая задача является линейной и решение \mathbf{x}_k промежуточных задач (2.1) не требует большого объема вычислений.

Поскольку функция $\Phi_k(\mathbf{x})$ сильно выпукла, а множество W_k , очевидно, выпукло и замкнуто, согласно теореме из [6] задача (2.1) имеет единственное решение. Введем обозначения

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_k = \mathbf{u}, \quad \mathbf{c} = \beta_k \nabla J(\mathbf{x}_k), \quad \mathbf{a}_i = \nabla g_i(\mathbf{x}_k), \quad b_i = -g_i(\mathbf{x}_k) \quad (2.2)$$

и перепишем задачу (2.1) в более удобной форме

$$\Phi_k(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle / 2 + \langle \mathbf{c}, \mathbf{u} \rangle \longrightarrow \inf; \quad (2.3)$$

$$\mathbf{u} \in U_k = \{ \mathbf{u} \in E^n: \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{u} \rangle = b_i, \quad i = 1, \dots, m; \quad \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{u} \rangle \leq b_i, \quad i = m + 1, \dots, m + s \}. \quad (2.4)$$

Так как множество U_k представляет собой многогранник, задача (2.3), (2.4) является задачей квадратичного программирования. В этом случае она решается с использованием функции Лагранжа и двойственной к (2.3), (2.4) задачи.

Функция Лагранжа задачи (2.3), (2.4) имеет вид

$$L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle / 2 + \langle \mathbf{c}, \mathbf{u} \rangle + \langle \boldsymbol{\lambda}, A\mathbf{u} - \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle / 2 + \langle \mathbf{c} + A^T \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u} \rangle - \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{b} \rangle,$$

где $\mathbf{u} \in E^n$; $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_0 = \{ \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{m+s}) \in E^{m+s}: \lambda_{m+1} \geq 0, \dots, \lambda_{m+s} \geq 0 \}$; A — матрица размерности $(m+s) \times n$ со строками $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{m+s}$; \mathbf{b} — вектор с компонентами b_1, \dots, b_{m+s} .

Поскольку $\Phi_{k*} = \inf \Phi_k(\mathbf{u}) > -\infty$, $U_{k*} = \{ \mathbf{u}_* \in U_k: \Phi_k(\mathbf{u}_*) = \Phi_{k*} \} \neq \emptyset$, согласно теореме из [6] функция $L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ имеет седловую точку $(\mathbf{u}_*, \boldsymbol{\lambda}^*)$, для которой, в частности, справедливо соотношение

$$\frac{\partial L(\mathbf{u}_*, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{u}_* + \mathbf{c} + A^T \boldsymbol{\lambda}^* = 0, \quad (2.5)$$

где $\mathbf{u}_* \in U_{k*}$; $\boldsymbol{\lambda}^* \in \Lambda_0$ ($i = 1, \dots, m + s$). При этом двойственная к (2.3), (2.4) задача

$$\psi(\boldsymbol{\lambda}) = \inf_{\mathbf{u} \in E^n} L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \longrightarrow \sup, \quad \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_0 \quad (2.6)$$

также имеет решение.

Из соотношения (2.5) в силу единственности решения задачи (2.3), (2.4) следует однозначное представление ее решения

$$\mathbf{u}_* = -(\mathbf{c} + A^T \boldsymbol{\lambda}^*), \quad (2.7)$$

где $\boldsymbol{\lambda}^*$ — произвольное решение задачи (2.6). Следовательно, зная выражение $\mathbf{u}(\boldsymbol{\lambda})$, функцию $\psi(\boldsymbol{\lambda})$ можно выписать явно:

$$\psi(\boldsymbol{\lambda}) = L(\mathbf{u}(\boldsymbol{\lambda}), (\boldsymbol{\lambda})) = -\langle AA^T \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \rangle / 2 - \langle A\mathbf{c} + \mathbf{b}, \boldsymbol{\lambda} \rangle - \langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle / 2. \quad (2.8)$$

Таким образом, двойственная задача (2.6) вида

$$-\psi(\boldsymbol{\lambda}) \longrightarrow \inf, \quad \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_0 \quad (2.9)$$

также является задачей квадратичного программирования, но множество Λ_0 по сравнению с множеством U_k (2.4) имеет более простую структуру. Тогда, зная какое-либо решение $\boldsymbol{\lambda}^*$ задачи (2.9), из (2.2), (2.7) получим решение промежуточной оптимизационной задачи (2.1)

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_* = \mathbf{x}_k - \mathbf{c} - A^T \boldsymbol{\lambda}^*. \quad (2.10)$$

Задача (2.9) значительно упрощается, если в исходной задаче (1.2), (1.3) отсутствуют ограничения типа неравенств. Тогда $s = 0$ и множества (1.3) и (2.4) принимают вид

$$X = \{\mathbf{x} \in E^n: g_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, \dots, m\}; \quad (2.11)$$

$$U_k = \{\mathbf{u} \in E^n: \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{u} \rangle = b_i, i = 1, \dots, m\}. \quad (2.12)$$

В этом случае $\Lambda_0 = E^m$, а решение задачи (2.9) с учетом (2.8) определяется из системы алгебраических уравнений

$$\frac{d\psi(\boldsymbol{\lambda})}{d\boldsymbol{\lambda}} = AA^T \boldsymbol{\lambda} + A\mathbf{c} + \mathbf{b} = 0. \quad (2.13)$$

Поскольку $AA^T > 0$, задача (2.9), а следовательно, и система (2.13) имеют единственное решение.

Таким образом, при $s = 0$ решение задачи (1.2), (2.11) сводится к решению на каждом шаге итерации двух систем линейных алгебраических уравнений (2.13) и (2.10). Поскольку решение таких систем может быть найдено за конечное число шагов, решение исходной задачи также определяется за конечное число итераций. При этом соответствующие коэффициенты матриц и векторов правых частей этих систем определяются из решения обратной задачи аэродинамики решеток, рассмотренной в [1, 2].

В случае, когда имеются условия связи типа неравенств, решение промежуточных задач на каждом шаге итерации также может быть сведено к решению конечного числа задач типа (2.3), (2.12). Возможность такого подхода связана с конечным числом так называемых особых точек задачи (2.3), (2.4), которые по определению являются решением задач вида

$$\Phi_k(\mathbf{u}) \longrightarrow \inf, \quad \mathbf{u} \in V_k = \{\mathbf{u} \in E^n: \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{u} \rangle = b_i, i \in \{1, \dots, m\} \cup I\},$$

где I — произвольное подмножество индексов $\{m + 1, \dots, m + s\}$ (случай $I = \emptyset$ не исключается). Для определения этих точек обычно используются специальные методы их упорядоченного перебора, заключающиеся в построении последовательности особых точек, в которых минимизируемая функция $J(\mathbf{u})$ строго убывает.

3. Примеры расчета. Для отладки программы расчета оптимальных форм решеток лопастей, исследования эффективности алгоритма и определения скорости сходимости соответствующего итерационного процесса проведена оптимизация геометрических параметров решетки рабочего колеса вентилятора ВО-21, спроектированного в 1989 г. во Всесоюзном научно-исследовательском институте горной механики им. М. М. Федорова

| Решетка | \tilde{y}_{m1} | β_1^0 | β_2^0 | $b_1^{BT}, \text{ м}$ | $b_1^{пер}, \text{ м}$ |
|-------------|------------------|-------------|-------------|-----------------------|------------------------|
| Исходная | 0,155 | 61,3 | 61,8 | 0,210 | 0,170 |
| Оптимальная | 0,160 | 63,3 | 61,8 | 0,225 | 0,143 |

(г. Донецк). В качестве расчетного выбран режим, соответствующий производительности $Q = 45 \text{ м}^3/\text{с}$ и полному теоретическому давлению $P_T = 6300 \text{ Па}$. При работе в таком режиме профильные потери данной решетки, определяемые из выражения (1.4), равны $\Delta P_{пр} = 99,62 \text{ Па}$. Для решения оптимизационной задачи минимизации профильных потерь в число варьируемых параметров дополнительно включены параметры b_1^{BT} (длина хорды у втулки) и $b_1^{пер}$ (длина хорды на периферии основной лопасти). При этом длины хорд лопастей вдоль радиуса изменялись по линейному закону, отношение длин хорд вспомогательной и основной лопастей $b_2/b_1 = 0,83$.

При численном исследовании зависимости $\Delta P_{пр}$ от $b_1^{BT}, b_1^{пер}$ получено, что профильные потери монотонно убывают с уменьшением этих параметров. В то же время из неравенства (1.1) следует обратная зависимость. Таким образом, согласно методу линеаризации решение оптимизационной задачи находилось с помощью замены неравенств (1.1) на равенства.

В результате решения экстремальной задачи получаем $\Delta P_{пр} = 94,71 \text{ Па}$, что на 5 % меньше, чем для исходной решетки. Значения варьируемых параметров исходной и оптимальной решеток приведены в таблице.

На рис. 3 представлены результаты расчета величины $R(k) = (J^{(k+1)} - J^{(k)})/J^{(k)}$, характеризующей скорость сходимости последовательных приближений $J^{(k)} = J(\mathbf{x}_k)$ (k — номер итерации) при минимизации функционала $J = \Delta P_{пр}$.

Необходимо отметить, что скорость сходимости итерационного процесса существенно зависит от коэффициента β_k , входящего в выражение для промежуточных оптимизационных задач (2.1). На рис. 3 сплошная линия соответствует $\beta_k = 0,01$, штриховая — $\beta_k = k/10$. Сравнение показывает существенное преимущество второго варианта выбора β_k для сходимости процесса. Время расчета одной итерации на персональном компьютере с процессором с частотой 715 МГц составляет примерно 1 с.

Независимо от полученного решения проведена также оптимизация форм лопастей данной решетки минимизацией их площадей. В качестве дополнительных варьируемых параметров определены положения максимальных прогибов обеих лопастей $\tilde{x}_{m1}, \tilde{x}_{m2}$. В результате решения получены значения $\tilde{x}_{m1} = \tilde{x}_{m2} = 0,5$, соответствующие серединам хорд.

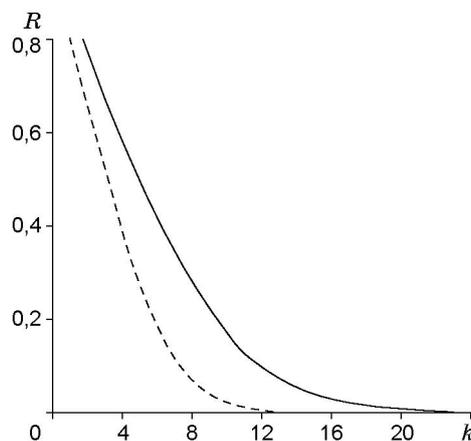


Рис. 3

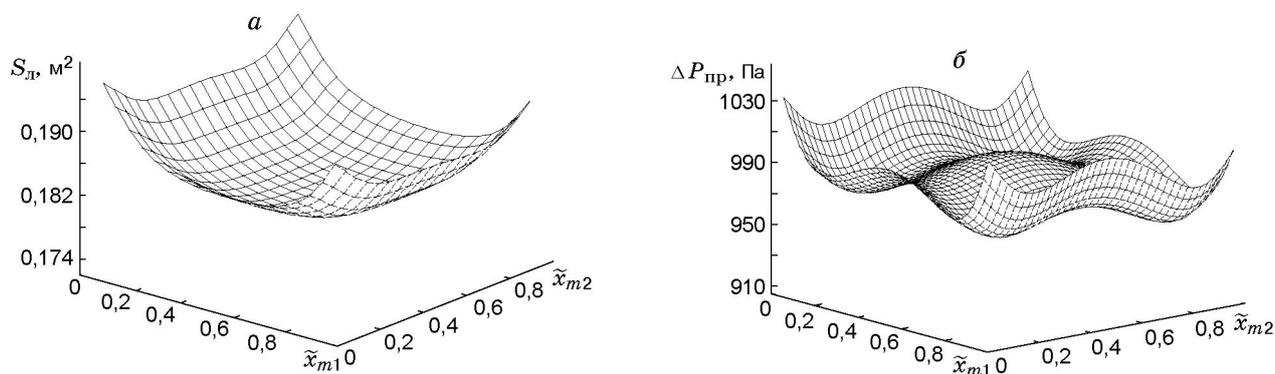


Рис. 4

Полученные оптимальные значения параметров позволяют уменьшить площадь лопатки на 2 %, что при толщине лопастей 5 мм и плотности стали 7810 кг/м^3 эквивалентно уменьшению массы каждой из шести лопаток колеса на 150 г.

На рис. 4,а представлены результаты расчета площадей лопаток S_l , полученные из решения обратных задач [1, 2] для различных значений \tilde{x}_{m1} , \tilde{x}_{m2} в диапазоне длины хорды $0,1 \div 0,9$. На рис. 4,б приведены результаты расчета зависимости профильных потерь решетки от тех же параметров. Сравнение данных зависимостей показывает, что оптимальные параметры решетки, минимизирующие одну из величин, могут быть далеки от оптимальных для других величин. Поэтому в задаче об аэродинамическом проектировании решеток при оптимизации форм лопастей по нескольким величинам предварительно необходимо определить их приоритеты и учесть их введением соответствующих весовых коэффициентов.

В заключение следует отметить, что в проведенной оптимизации в число варьируемых параметров, обеспечивающих выполнение основных требований, предъявляемых к решетке, дополнительно включены только два параметра, т. е. указанная оптимизация является неполной. Для включения всех геометрических параметров решетки в процесс полной оптимизации необходимо заранее знать пределы возможного их варьирования, обусловленные техническими и технологическими условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Батяев Е. А., Курзин В. Б., Чернышева О. В. Обратная задача аэродинамики двойной решетки осевого вентилятора // Теплофизика и аэромеханика. 1998. Т. 5, № 2. С. 167–174.
2. Батяев Е. А. Аэродинамическое проектирование регулируемых сдвоенных решеток осевых вентиляторов // Теплофизика и аэромеханика. 2000. Т. 7, № 2. С. 209–215.
3. Труды ЦАГИ. Жуковский, 1968. Вып. 1099: Исследования по аэродинамике осевого дозвукового компрессора / С. А. Довжик.
4. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В. Обратные краевые задачи аэрогидродинамики. М.: Наука, 1994.
5. Брусиловский И. В. Аэродинамический расчет осевых вентиляторов. М.: Машиностроение, 1986.
6. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.