

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПОЛИМЕРАХ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

А. А. Роговой, О. С. Столбова

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013 Пермь, Россия
E-mails: rogovoy@icmm.ru, sos@icmm.ru

С учетом конечных деформаций построена модель поведения полимера с памятью формы, испытывающего переход из высокоэластичного состояния в застеклованное и обратно в процессе деформирования и изменения температуры. Полученные соотношения протестированы на задачах, имеющих экспериментальное обеспечение.

Ключевые слова: конечные деформации, полимеры, релаксационный переход, память формы.

DOI: 10.15372/PMTF20150616

Введение. Полимеры с памятью формы относятся к классу интеллектуальных (функциональных) материалов, в которых эффект памяти формы может инициироваться путем воздействия на них различных внешних полей, например, температурного, электрического или магнитного поля. Эффект памяти формы может также инициироваться внутренним силовым полем, связанным с напряженным состоянием материала, а также совместным воздействием внутренних и внешних полей, фотохимическими или электрохимическими реакциями. Этот эффект обусловлен перестройкой структуры, происходящей в материале при изменении инициирующих полей в определенной области, причем новая структура, возникающая при изменении поля в одном направлении (прямой переход), возвращается к исходной при обратном изменении поля (обратный переход). Механизмы возникновения новой структуры у разных материалов различны. Например, в сплавах с памятью формы под действием температурных и (или) силовых полей меняется кристаллическая решетка [1], что приводит к дополнительным фазовым деформациям, достигающим, как правило, 8–10 %. При уменьшении температуры полимеры испытывают переход из высокоэластичного состояния в застеклованное (прямой переход), при возрастании температуры — из застеклованного состояния в высокоэластичное (обратный переход). Такой переход не является фазовым и называется релаксационным [2]. Его механизм объясняется возникновением дополнительных связей между полимерными цепочками при прямом переходе и их разрушении при обратном. При изменении температуры релаксационный переход имеет место практически во всех полимерах, эффект памяти формы характерен не для всех полимеров. Он проявляется в полимерах, имеющих определенную структуру,

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства РФ (Постановление № 220 от 9 апреля 2010 г.), договор № 14.В25.310006 от 24 июня 2013 г.

© Роговой А. А., Столбова О. С., 2015

при определенном воздействии на материал [3–5]. В отличие от сплавов с памятью формы деформации в полимерах с памятью формы могут достигать нескольких сотен процентов.

В настоящей работе исследуется эффект памяти формы в полимерах, испытывающих большие деформации. Такие материалы используются в медицине и аэрокосмических приложениях [6]. Построению моделей поведения таких материалов при конечных деформациях посвящены работы [7–13]. Подход, развиваемый в [7, 8], аналогичен подходу [9, 10], основанному на кинематике, определяемой градиентом места в виде мультипликации $F_{t_0}(t) = F_{t_*}(t) \cdot F_{t_0}(t_*)$, $t \geq t_* \geq t_0$. (Здесь $F_{\tau_\alpha}(\tau)$ — градиент места, переводящий конфигурацию, соответствующую моменту времени τ_α , в конфигурацию, соответствующую моменту времени τ , $\tau \geq \tau_\alpha$, $F_{\tau_\alpha}(\tau_\alpha) = g$; g — единичный тензор.) Время t_* соответствует переходу материальной точки среды из высокоэластичного состояния в застеклованное, градиент места $F_{t_*}(t)$, описывающий кинематику высокоэластичного состояния при $t > t_*$, в момент времени $\tau = t - t_*$ определяет кинематику застеклованного состояния, возникшего в момент времени t_* . Отсюда следует, что, если материал в высокоэластичном состоянии является несжимаемым, он остается несжимаемым в любой момент релаксационного перехода, несмотря на то что в нем образовалась застеклованная фаза.

В работе [11] модель поведения полимера с памятью формы строится на основе последовательного соединения температурного элемента с параллельно соединенными упругим и вязкоупругими структурными элементами. В работах [14, 15] с использованием процедуры наложения малых деформаций на конечные построены эволюционные определяющие соотношения для больших упругопластических и вязкоупругих деформаций с согласованными с этими уравнениями объективными производными. В работе [15] при моделировании поведения вязкоупругого материала использована структурная модель, аналогичная модели [11]. Подход, изложенный в [14, 15], получил дальнейшее развитие в работах [16–19], в которых созданы модели, описывающие поведение сложных сред при конечных деформациях и структурных изменениях в материалах и удовлетворяющие принципам термодинамики и объективности. В частности, результаты выполненных исследований показывают, что применительно к вязкоупругим структурным элементам тензор истинных напряжений зависит и от упругой, и от вязкоупругой кинематики, в отличие от работы [11], где этот тензор зависит только от упругой кинематики.

В работе [12] распространен на случай больших деформаций подход к построению модели поведения полимера с памятью формы, предложенный в [13]. Основные принципы данного подхода, адаптированные для случая конечных деформаций в соответствии с [14–19], использованы в настоящей работе. При данном подходе вводятся симметричные тензоры напряжений Пиолы — Кирхгофа высокоэластичного и застеклованного состояний, записанные через свободные энергии этих состояний. Каждая энергия зависит от меры деформаций Коши — Грина (или от тензора деформаций Коши — Грина) соответствующего состояния. Вводится также симметричный тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа, соответствующий полной кинематике релаксационного процесса. Однако в рамках настоящего подхода для него не существует свободной энергии, производящей этот тензор. В то же время ни кинематике высокоэластичного, ни кинематике застеклованного состояния невозможно поставить в соответствие вектор перемещений. Поэтому невозможно построить соответствующие этим кинематикам градиенты места. Вектор перемещений, соответствующий полной кинематике релаксационного процесса, существует и производит градиент места, необходимый для определения тензора истинных напряжений.

В настоящей работе в рамках указанного подхода строится модель поведения полимера с памятью формы, испытывающего переход из высокоэластичного состояния в застеклованное и обратно в результате деформирования и изменения температуры. В предположении, что характерные времена релаксации полимера в высокоэластичном состоянии

значительно меньше характерных времен внешних воздействий, его поведение считается упругим, в полностью застеклованном состоянии — вязкоупругим. Теплопроводность образца достаточно высокая, однородная температура окружающей среды изменяется медленно, поэтому в любой момент времени температура материала также является однородной и равна температуре окружающей среды. Это позволяет не рассматривать процесс установления температуры, т. е. не решать уравнение теплопроводности. Полученные соотношения протестированы на имеющих экспериментальное обеспечение задачах о конечных деформациях в образцах при прямом и обратном релаксационных переходах [13, 20].

1. Основные соотношения. Рассмотрим общие кинематические и определяющие соотношения, которые в дальнейшем конкретизируются для полимеров с памятью формы, обусловленной возникающим в материале релаксационным переходом.

1.1. *Кинематические соотношения.* В работах [14, 15] вводятся начальная \varkappa_0 , промежуточная \varkappa_* и текущая (актуальная) \varkappa конфигурации, причем конфигурации \varkappa_* и \varkappa близки. Эта близость характеризуется малым параметром ε , являющимся средством формализации малости не только вектора перемещений, но и других величин, определяемых через перемещения.

В соответствии с [16, 18] полный градиент места F , переводящий начальную конфигурацию в текущую, имеет вид $F = f \cdot F_*$, где градиент места F_* переводит начальную конфигурацию \varkappa_0 в промежуточную \varkappa_* , а f — промежуточную в близкую текущую \varkappa . Под градиентом места, переводящим конфигурацию, положение точки в которой определяется радиус-вектором \mathbf{R}_α , в конфигурацию, в которой положение той же точки определяется радиус-вектором \mathbf{R}_β , будем понимать тензор второго ранга $F_{\alpha\beta}$, построенный в соответствии с соотношением $F_{\alpha\beta} = (\overset{\alpha}{\nabla} \mathbf{R}_\beta)^\top$, где оператор Гамильтона $\overset{\alpha}{\nabla}$ определяется формулой $\overset{\alpha}{\nabla} = \mathbf{R}_\alpha^i \partial / \partial q^i$ (\mathbf{R}_α^i — векторы взаимного базиса, соответствующие $\mathbf{R}_\alpha(q^i)$; q^i — обобщенные лагранжевы координаты). Градиент места f определяется соотношением $f = g + \varepsilon h = g + \varepsilon(e + d)$, где h — градиент вектора малых перемещений, переводящих промежуточную конфигурацию \varkappa_* в текущую \varkappa ; e, d — тензоры малых деформаций и поворотов относительно промежуточной конфигурации \varkappa_* (симметричная и кососимметричная части тензора h). В результате полный градиент места F представляется в виде

$$F = (g + \varepsilon h) \cdot F_* = [g + \varepsilon(e + d)] \cdot F_*. \quad (1.1)$$

Здесь и далее индекс “*” соответствует промежуточной конфигурации \varkappa_* .

Используя представление F в виде (1.1), выражение для меры деформаций Коши — Грина $C = F^\top \cdot F$ запишем в виде

$$C = C_* + 2\varepsilon F_*^\top \cdot e \cdot F_*, \quad C_* = F_*^\top \cdot F_*, \quad (1.2)$$

а выражения для тензора деформаций Коши — Грина E — в виде

$$E = (C - g)/2 = E_* + \Delta E = E_* + \varepsilon F_*^\top \cdot e \cdot F_*. \quad (1.3)$$

В результате предельного перехода при стремлении промежуточной конфигурации к текущей из соотношений (1.2), (1.3) следует

$$\dot{C} = 2F^\top \cdot D \cdot F, \quad \dot{E} = F^\top \cdot D \cdot F, \quad (1.4)$$

где D — тензор деформаций скорости, совпадающий в данном случае с тензором скорости деформаций \dot{e} .

1.2. *Определяющее соотношение.* Из различных эквивалентных форм представления определяющих соотношений простого упругого материала [14, 15], удовлетворяющих принципу объективности [21], выберем форму

$$T = J^{-1} F \cdot \tilde{g}(C, \Theta) \cdot F^\top. \quad (1.5)$$

Здесь T — тензор истинных напряжений; $J = I_3(F)$ — третий инвариант F (якобиан, характеризующий относительное изменение объема). Тензор второго ранга \tilde{g} , или второй (симметричный) тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа P_{II} , зависит от свойств материала, в свою очередь зависящих от температуры Θ , определяет его отклик на чистую (без вращений) деформацию, мерой которой является мера Коши — Грина C , и отнесен к элементарной площадке начальной недеформированной конфигурации. Конструкция $J^{-1}F \cdot (\cdot) \cdot F^T$ преобразует тензор \tilde{g} к элементарной площадке текущей конфигурации. Тензор P_{II} определяется через упругий потенциал $W(C, \Theta)$ с помощью соотношения $P_{II} = 2\partial W(C, \Theta)/\partial C$, причем от Θ зависят только параметры функциональной зависимости $W(C)$. Например, упрощенный потенциал Мурнагана с параметрами a, b принимает вид $W = a(\Theta)[I_1(C) - 3] + b(\Theta)[I_2(C) - 3]$, где I_1, I_2 — первый и второй главные инварианты соответствующего тензорного аргумента.

В работе [19] для любого термоупруго-неупругого процесса получено выражение для \tilde{g} ($\tilde{g} = P_{II}$), в случае чисто упругого процесса имеющее вид

$$P_{II} \equiv \tilde{g} = 4 \int_0^t \left(\frac{\partial^2 W(C(\tau), \Theta(t))}{\partial C^2} \right) \cdot \cdot \dot{E}(\tau) d\tau = \\ = 4 \int_0^t \left(F(\tau) \circ \frac{\partial^2 W(C(\tau), \Theta(t))}{\partial C^2} \cdot F^T(\tau) \right) \cdot \cdot D(\tau) d\tau. \quad (1.6)$$

Здесь второй интеграл следует из первого в силу соотношения (1.4), под двойным скалярным произведением понимается внутреннее двойное скалярное произведение тензоров четвертого и второго рангов, определяемое соотношением $A^{ijkl} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \mathbf{r}_k \mathbf{r}_l \cdot \cdot B^{mn} \mathbf{r}_m \mathbf{r}_n = A^{ijkl} B^{mn} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_n) (\mathbf{r}_l \cdot \mathbf{r}_m)$ (последовательно перемножаются ближайшие векторы), операция $A \circ B^{IV}$ означает позиционное скалярное умножение слева тензора второго ранга A на третий базисный вектор тензора четвертого ранга B^{IV} . Представляя Θ в виде $\Theta = \Theta_* + \varepsilon\theta$ (Θ_* — значение Θ в промежуточной конфигурации \varkappa_* ; θ — приращение температуры при переходе в близкую текущую конфигурацию), разлагая $\partial^2 W(C(\tau), \Theta(t))/(\partial C)^2$ в ряд по ε , удерживая только линейные слагаемые относительно этого малого параметра

$$\frac{\partial^2 W(C, \Theta)}{\partial C^2} = \frac{\partial^2 W(C, \Theta_* + \varepsilon\theta)}{\partial C^2} = \frac{\partial^2 W(C, \Theta_*)}{\partial C^2} + \varepsilon\theta \left. \frac{\partial^3 W(C, \Theta)}{\partial \Theta \partial C^2} \right|_{\Theta=\Theta_*} \quad (1.7)$$

и разбивая интегралы от 0 до t в (1.6) на интегралы от 0 до t_* (t_* соответствует конфигурации \varkappa_*) и от t_* до t ($t - t_* = \Delta t$ — малая величина), получаем выражение для тензора P_{II} (функцию отклика материала \tilde{g}), записанное относительно промежуточной конфигурации \varkappa_* с точностью до линейных по ε слагаемых:

$$P_{II} = \tilde{P}_{II*} + \tilde{L}_*^{IV} \cdot \cdot \Delta E = P_{II*} + \varepsilon L_*^{IV} \cdot \cdot e, \\ \tilde{P}_{II*} = \tilde{P}_{II*}^{(1)} + \tilde{P}_{II*}^{(2)}, \quad P_{II*} = P_{II*}^{(1)} + P_{II*}^{(2)}. \quad (1.8)$$

Здесь $\tilde{P}_{II*}^{(1)}, P_{II*}^{(1)}, \tilde{P}_{II*}^{(2)}, P_{II*}^{(2)}$ — тензоры, при $t = t_*$ соответствующие в первом и втором интегралах (1.6) первому и второму слагаемым из (1.7); $\tilde{L}_*^{IV}, L_*^{IV}$ — тензоры четвертого ранга, определяющие отклик материала на приращение деформации $\Delta E = \dot{E} \Delta t$ и на малые упругие деформации $\varepsilon e = D \Delta t$ относительно промежуточной конфигурации соответственно [16]:

$$\tilde{L}_*^{IV} = 4 \left. \frac{\partial^2 W(C, \Theta_*)}{\partial C^2} \right|_{C=C_*}, \quad L_*^{IV} = 4F_* \circ \left. \frac{\partial^2 W(C, \Theta_*)}{\partial C^2} \right|_{C=C_*} \cdot F_*^T. \quad (1.9)$$

Приближенные соотношения (1.8), при получении которых сохранялись только линейные слагаемые относительно ε , сводятся к точным эволюционным соотношениям путем предельного перехода при стремлении промежуточной конфигурации к текущей ($\varkappa_* \rightarrow \varkappa$). В результате имеем

$$\dot{P}_{II} = \tilde{L}^{IV} \cdot \cdot \dot{E} = L^{IV} \cdot \cdot D, \quad (1.10)$$

где D — тензор деформации скорости, совпадающий в данном случае с тензором скорости деформации \dot{e} . Тензоры четвертого ранга \tilde{L}^{IV} , L^{IV} в (1.10) имеют те же аргументы, что и тензоры \tilde{L}_*^{IV} , L_*^{IV} в (1.9), но их значения соответствуют текущей конфигурации.

2. Кинематика и термодинамика релаксационного перехода в полимерах с памятью формы. Рассмотрим кинематические соотношения для материала в высокоэластичном и застеклованном состояниях, соотношение, связывающее кинематику материала в этих состояниях с полной кинематикой процесса деформирования полимера с памятью формы, и ограничения, налагаемые вторым законом термодинамики.

Известно, что при изменении температуры полимеры существенно меняют способность деформироваться [2, 4]. При температуре ниже Θ_l они находятся в застеклованном состоянии, характеризуемом большим модулем упругости и соответственно низкой способностью к деформированию. При температуре выше Θ_h они находятся в высокоэластичном состоянии, характеризуемом малым модулем упругости и соответственно высокой способностью к деформированию. Значение температуры $\Theta_l \leq \Theta \leq \Theta_h$ определяет переходную область между этими состояниями. В высокоэластичном состоянии характерные времена релаксации полимера значительно меньше характерных времен внешних воздействий, что позволяет считать его поведение упругим. В полностью застеклованном состоянии поведение полимера является вязкоупругим. В случае вязкоупругого поведения материала для оценки вкладов вязкости и упругости в свойства материала используется величина $\operatorname{tg} \delta$, называемая коэффициентом механических потерь. При прямом и обратном релаксационных переходах высокоэластичность — стеклование график зависимости этой величины от температуры имеет колоколообразный вид. Температура, соответствующая вершине этого графика, принимается в качестве характеристической температуры стеклования Θ_g .

Для установления количественной зависимости от температуры завершенности процесса релаксационного перехода из высокоэластичного (высокотемпературного) состояния в застеклованное (низкотемпературное) и наоборот вводится параметр φ_g — степень стеклования ($0 \leq \varphi_g \leq 1$), и экспериментальная зависимость φ_g от температуры Θ аппроксимируется различными соотношениями [2, 8, 12, 13]. Например, в работе [12] используется аппроксимация

$$\varphi_g(\Theta) = 1 - 1/(1 + a(\Theta_h - \Theta)^4),$$

график которой для $a = 2,76 \cdot 10^{-5}$, $\Theta_l = 273$ К, $\Theta_g = 343$ К, $\Theta_h = 358$ К представлен на рис. 1. В работе [2] для этих целей используется распределение Лапласа.

В результате приложения значительных по величине внешних силовых полей значение Θ_g изменяется, как это происходит в сплавах с памятью формы [22]. Поскольку экспериментальные данные о величине этого сдвига в полимерах отсутствуют, в настоящей работе он не учитывается.

Как отмечалось выше, эффект памяти формы не является свойством, характерным для всех полимеров. Он проявляется в полимерах, имеющих определенную структуру при определенном воздействии на материал [3–5]. Эффект памяти формы состоит в том, что в процессе релаксационного перехода из высокоэластичного состояния в застеклованное (охлаждение материала) деформация, имеющаяся в высокоэластичной фазе, “замораживается” в момент перехода, и деформации, возникающие в застеклованной фазе при дальней-

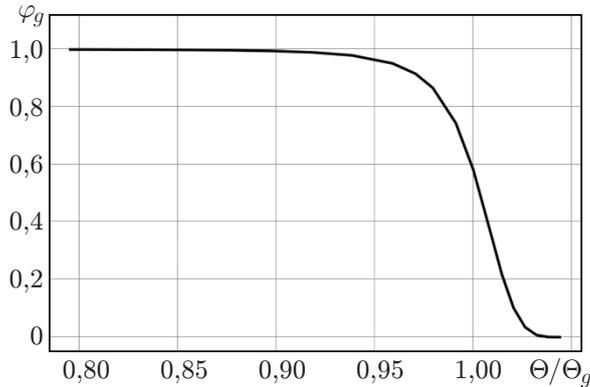


Рис. 1. Зависимость степени стеклования от температуры

шем деформировании, накладываются на эти “замороженные”. При нагревании последние постепенно “размораживаются”.

В настоящей работе для описания эффекта памяти формы в полимерах используется модель процесса, развиваемая в работах [12, 13] и адаптированная для конечных деформаций. В высокоэластичном состоянии кинематика процесса определяется градиентом места F_r , который согласно (1.1) в промежуточной конфигурации, близкой к текущей, принимает вид

$$F_r = [g + \varepsilon(e_r + d_r)] \cdot F_{r*}. \quad (2.1)$$

Здесь e_r, d_r — малые деформации и повороты, соответствующие переходу из промежуточной конфигурации в близкую текущую; F_{r*} — градиент места, переводящий начальную конфигурацию в промежуточную. Мера деформаций Коши — Грина и тензор деформаций Коши — Грина, соответствующие F_r , имеют вид

$$C_r = F_r^T \cdot F_r = C_{r*} + 2\varepsilon F_{r*}^T \cdot e_r \cdot F_{r*}; \quad (2.2)$$

$$E_r = (C_r - g)/2 = E_{r*} + \Delta E_{r*} = E_{r*} + \varepsilon F_{r*}^T \cdot e_r \cdot F_{r*}. \quad (2.3)$$

Из соотношения (2.3) в результате предельного перехода при стремлении промежуточной конфигурации к текущей получаем

$$\dot{E}_r = F_r^T \cdot D_r \cdot F_r, \quad (2.4)$$

где D_r — тензор деформации скорости, совпадающий в данном случае с тензором скорости деформации \dot{e}_r .

В застеклованном состоянии кинематика процесса определяется аналогичными соотношениями

$$F_g = [g + \varepsilon(e_g + d_g)] \cdot F_{g*}, \quad C_g = F_g^T \cdot F_g = C_{g*} + 2\varepsilon F_{g*}^T \cdot e_g \cdot F_{g*}, \quad (2.5)$$

$$E_g = (C_g - g)/2 = E_{g*} + \Delta E_{g*} = E_{g*} + \varepsilon F_{g*}^T \cdot e_g \cdot F_{g*}, \quad \dot{E}_g = F_g^T \cdot D_g \cdot F_g,$$

где D_g — тензор деформации скорости, в данном случае совпадающий с тензором скорости деформации \dot{e}_g .

Заметим, что для высокоэластичного и застеклованного состояний материала начальная конфигурация одна и та же, в то время как текущие — разные. В силу этого отнесенные к начальному состоянию кинематические тензоры, такие как C_r, E_r, \dot{E}_r и C_g, E_g, \dot{E}_g , соответствуют одной и той же начальной конфигурации, в то время как тензоры D_r, D_g соответствуют разным конфигурациям.

Определим взаимосвязь кинематики высокоэластичного и застеклованного состояния эволюционным соотношением

$$\dot{E} = (\varphi_r E_r) + (\varphi_g E_g) + \dot{E}_f + \dot{E}_\Theta + \varphi_g \dot{E}_V, \quad (2.6)$$

в котором все величины соответствуют одной и той же начальной конфигурации и учитывается, что вязкие свойства материала проявляются только в застеклованном состоянии. В терминах структурного моделирования сумму в правой части (2.6) удобно трактовать как последовательное соединение элементов из высокоэластичного и застеклованного материалов (с различными весовыми коэффициентами), “замороженного” материала, а также температурного и вязкого элементов. Выражение для тензора E полных деформаций из (2.6) имеет вид

$$E = E_* + \varepsilon F_*^T \cdot e \cdot F_*, \quad \dot{E} = F^T \cdot D \cdot F, \quad F = [g + \varepsilon(e + d)] \cdot F_*, \quad (2.7)$$

где D — тензор полных деформаций скорости, совпадающий в данном случае с тензором скорости полных деформаций \dot{e} ; $\varphi_r = \varphi_r(\Theta)$ — параметр, определяющий долю высокотемпературной фазы в процессе стеклования ($\varphi_r + \varphi_g = 1$); \dot{E}_f — скорость “замораживания” высокоэластичных деформаций в процессе стеклования и “размораживания” в процессе расстекловывания, которую согласно [12] определим следующим образом:

$$\dot{E}_f = \begin{cases} \dot{\varphi}_g E_r, & \dot{\Theta} < 0, \\ (\dot{\varphi}_g / \varphi_g) E_f, & \dot{\Theta} > 0, \\ 0, & \dot{\Theta} = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

В (2.6) \dot{E}_Θ , \dot{E}_V — скорости температурных и вязких деформаций, параметр φ_g при \dot{E}_V связывает вязкоупругое поведение полимера только с застеклованным состоянием. Скорости \dot{E}_Θ , \dot{E}_V находим из соотношений, аналогичных второму выражению в (2.7):

$$\dot{E}_\Theta = F^T \cdot D_\Theta \cdot F, \quad \dot{E}_V = F^T \cdot D_V \cdot F, \quad (2.9)$$

D_Θ определим в соответствии с законом изотропного температурного расширения, D_V — в соответствии с законом вязкости:

$$D_\Theta = \alpha \dot{\Theta} g, \quad D_V = T / \mu. \quad (2.10)$$

Здесь μ — вязкость (положительная величина); $\alpha = \alpha(\Theta, \dot{\Theta})$ — переменный коэффициент температурного расширения, функция $\alpha(\Theta, \dot{\Theta})$ определяется экспериментально и является одной и той же для процессов прямого и обратного релаксационного переходов. Подставляя (2.7)–(2.10) в (2.6) и учитывая взаимозависимость φ_r и φ_g , получаем

$$\dot{E} = \varphi_r \dot{E}_r + \varphi_g \dot{E}_g + \varphi_g F^T \cdot \frac{T}{\mu} \cdot F + \dot{\Theta} \begin{cases} \varphi'_g E_g + \alpha C, & \dot{\Theta} < 0, \\ \varphi'_g (E_g - E_r + E_f / \varphi_g) + \alpha C, & \dot{\Theta} > 0, \\ 0, & \dot{\Theta} = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

($\varphi'_g \equiv \partial \varphi_g / \partial \Theta$, $C = F^T \cdot F$). С учетом соотношений (2.4), (2.5), (2.7)–(2.9) нетрудно показать, что все слагаемые в (2.11) инвариантны относительно изменения систем отсчета, в которых описываются полная кинематика и кинематики высокоэластичного и застеклованного состояний. Таким образом, соотношение (2.11) удовлетворяет одному из основных принципов механики — принципу объективности.

Определим требования, которые налагает термодинамика на представленный выше кинематический процесс. Используя выражение (1.5), второе соотношение (2.7) и зависимость $\rho = \rho_0 J^{-1}$, уравнение Клаузиуса — Дюгема

$$T \cdot \cdot D - \rho(\dot{\Psi} + \dot{\Theta} s) - \mathbf{q} \cdot \tilde{\nabla} \ln \Theta \geq 0 \quad (2.12)$$

запишем в виде

$$P_{II} \cdot \dot{E} - \rho_0(\dot{\Psi} + \dot{\Theta}s) - J\mathbf{q} \cdot \tilde{\nabla} \ln \Theta \geq 0, \quad (2.13)$$

где ρ , ρ_0 — плотность массы в текущей и начальной конфигурациях; Ψ — свободная энергия Гельмгольца, отнесенная к единице массы; s — энтропия; \mathbf{q} — вектор теплового потока; $\tilde{\nabla}$ — оператор Гамильтона в текущей конфигурации. Подставляя выражение для свободной энергии

$$\Psi = \varphi_r \Psi_r(C_r) + \varphi_g \Psi_g(C_g) + \Psi_\Theta(\Theta)$$

и соотношение (2.11) в неравенство (2.13), находим

$$\begin{aligned} \varphi_r \left(P_{II} - 2\rho_0 \frac{\partial \Psi_r}{\partial C_r} \right) \cdot \dot{E}_r + \varphi_g \left(P_{II} - 2\rho_0 \frac{\partial \Psi_g}{\partial C_g} \right) \cdot \dot{E}_g + \\ + \left[P_{II} \cdot \{ \cdot \} - \rho_0(\varphi'_g(\Psi_g - \Psi_r) + \Psi'_\Theta + s) \right] \dot{\Theta} + \\ + P_{II} \cdot \left(\varphi_g F^T \cdot \frac{T}{\mu} \cdot F \right) - J\mathbf{q} \cdot \tilde{\nabla} \ln \Theta \geq 0. \end{aligned}$$

Здесь символом $\{ \cdot \}$ обозначены выражения, стоящие в последнем слагаемом в (2.11) и объединенные фигурной скобкой. Применяя к этому неравенству процедуру линейного локального продолжения процесса по переменным E_r , E_g , Θ [21], получаем следующие равенства:

$$P_{II} = 2\rho_0 \frac{\partial \Psi_r}{\partial C_r} = 2\rho_0 \frac{\partial \Psi_g}{\partial C_g}, \quad s = \rho_0^{-1} P_{II} \cdot \{ \cdot \} - \varphi'_g(\Psi_g - \Psi_r) - \Psi'_\Theta. \quad (2.14)$$

Оставшееся неравенство

$$\varphi_g J^{-1} P_{II} \cdot \left(F^T \cdot \frac{T}{\mu} \cdot F \right) - \mathbf{q} \cdot \tilde{\nabla} \ln \Theta \geq 0$$

выполняется, поскольку первый его член является неотрицательной величиной:

$$\varphi_g J^{-1} P_{II} \cdot \left(F^T \cdot \frac{T}{\mu} \cdot F \right) = \varphi_g (J^{-1} F \cdot P_{II} \cdot F^T) \cdot \frac{T}{\mu} = \frac{\varphi_g}{\mu} T \cdot T \geq 0.$$

Второй член данного неравенства $-\mathbf{q} \cdot \tilde{\nabla} \ln \Theta = -\Theta^{-1} \mathbf{q} \cdot \tilde{\nabla} \Theta$ также является неотрицательной величиной, так как Θ — абсолютная температура, а направление теплового потока \mathbf{q} противоположно направлению градиента температуры (в частности, в соответствии с законом Фурье $\mathbf{q} = -\lambda \tilde{\nabla} \Theta$, где теплопроводность λ — положительная величина).

В результате термодинамического анализа в рамках рассматриваемой модели поведения полимера с памятью формы получено соотношение для энтропии (второе выражение в (2.14)), а также равенство тензоров напряжений Пиолы — Кирхгофа второго рода для высокоэластичного и застеклованного состояний $P_{IIr} = P_{IIg} = P_{II}$ (первое выражение в (2.14)). Данное равенство налагает дополнительное (помимо (2.11)) ограничение на кинематику релаксационного перехода.

Из преобразования неравенства (2.12) в неравенство (2.13) следует, что тензор Пиолы — Кирхгофа второго рода P_{II} соответствует также полной кинематике. Поэтому выражение для тензора истинных напряжений T , соответствующего полной кинематике E (2.7), имеет вид

$$T = J^{-1} F \cdot P_{II} \cdot F^T. \quad (2.15)$$

3. Определяющее уравнение и краевая задача для полимера с памятью формы. Рассмотрим алгоритм построения определяющего уравнения, позволяющего осуществить постановку краевой задачи для процесса деформирования полимера с памятью формы.

В соответствии с первым равенством в (1.8) тензоры Пиолы — Кирхгофа для высокоэластичного и застеклованного состояний запишем в виде

$$P_{IIr} = \tilde{P}_{IIr*} + \tilde{L}_{r*}^{IV} \cdot \cdot \Delta E_r, \quad P_{IIg} = \tilde{P}_{IIg*} + \tilde{L}_{g*}^{IV} \cdot \cdot \Delta E_g, \quad (3.1)$$

где тензоры четвертого ранга определяются первым соотношением в (1.9):

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{r*}^{IV} &= 4 \left. \frac{\partial^2 W_r(C_r, \Theta_*)}{\partial C_r^2} \right|_{C_r=C_{r*}}, & W_r &= \rho_0 \Psi_r, \\ \tilde{L}_{g*}^{IV} &= 4 \left. \frac{\partial^2 W_g(C_g, \Theta_*)}{\partial C_g^2} \right|_{C_g=C_{g*}}, & W_g &= \rho_0 \Psi_g. \end{aligned} \quad (3.2)$$

С учетом равенства $P_{IIr} = P_{IIg}$, справедливого для любого момента времени, из (3.1) получаем $\tilde{L}_{r*}^{IV} \cdot \cdot \Delta E_r = \tilde{L}_{g*}^{IV} \cdot \cdot \Delta E_g$. Ставя в соответствие симметричным тензорам второго ранга шестимерные векторы, а тензорам четвертого ранга, имеющим главную и минорные симметрии, матрицы 6×6 , данное равенство запишем в виде $M_{r*} \Delta \mathbf{E}_r = M_{g*} \Delta \mathbf{E}_g$ (используемые здесь матрицы зависят от базисов, в которых представлены тензоры четвертого и второго рангов). Из последнего равенства следует

$$\Delta \mathbf{E}_g = M_{g*}^{-1} M_{r*} \Delta \mathbf{E}_r. \quad (3.3)$$

Представляя \dot{E}_r (2.4), \dot{E}_g (2.5), \dot{E} (2.7) также в матрично-векторном виде ($\dot{E}_r \Rightarrow \dot{\mathbf{E}}_r$, $\dot{E}_g \Rightarrow \dot{\mathbf{E}}_g$, $\dot{E} = F^T \cdot D \cdot F \Rightarrow A\mathbf{D}$, где матрица A с размерностью 6×6 соответствует преобразованию шестимерного вектора \mathbf{D} в шестимерный вектор $\dot{\mathbf{E}}$), подставляя их в равенство (2.11), интегрируя полученное выражение по малому промежутку времени Δt с учетом того, что $\dot{\mathbf{E}}_r \Delta t = \Delta \mathbf{E}_r$, $\dot{\mathbf{E}}_g \Delta t = \Delta \mathbf{E}_g$, $\mathbf{D} \Delta t = \mathbf{e}$, используя для $\Delta \mathbf{E}_g$ соотношение (3.3) и разрешая полученное выражение относительно $\Delta \mathbf{E}_r$, получаем

$$\Delta \mathbf{E}_r = K^{-1} A_* \left(\mathbf{e} - \varphi_{g*} \frac{\mathbf{T}_* \Delta t}{\mu} \right) + \theta K^{-1} \{ \cdot \}_*. \quad (3.4)$$

Здесь K^{-1} — оператор (матрица), обратный K :

$$K = \varphi_{r*} I + \varphi_{g*} M_{g*}^{-1} M_{r*}, \quad (3.5)$$

I — единичная матрица; символом $\{ \cdot \}_*$ обозначены выражения, стоящие в последнем слагаемом (2.11) и объединенные фигурной скобкой, значения которых, как и значения всех величин с индексом “*” в (3.4), (3.5), соответствуют промежуточной конфигурации \varkappa_* . При выводе выражения (3.4) учитывалось, что структуры соотношений $F^T \cdot D \cdot F$ и $F^T \cdot (T/\mu) \cdot F$ одинаковы. Поэтому в выражениях $F^T \cdot D \cdot F \Rightarrow A\mathbf{D}$ и $F^T \cdot (T/\mu) \cdot F \Rightarrow A(\mathbf{T}/\mu)$ оператор A один и тот же.

В результате проведенных преобразований вектор $\Delta \mathbf{E}_r$ определяется через вектор полных малых деформаций \mathbf{e} . (Заметим, что описанная выше процедура представления $\Delta \mathbf{E}_g \Rightarrow \Delta \mathbf{E}_r$ (соотношение (3.3)) и затем $\Delta \mathbf{E}_r \Rightarrow \mathbf{e}$ (соотношение (3.4)) может быть осуществлена в направлении $\Delta \mathbf{E}_r \Rightarrow \Delta \mathbf{E}_g \Rightarrow \mathbf{e}$.) Вектору $\Delta \mathbf{E}_r$ ставится в соответствие тензор ΔE_r , с помощью (3.1) строятся тензор P_{IIr} и согласно (2.2) тензор $C_r = C_{r*} + 2\Delta E_r$, необходимый для вычисления значения \tilde{L}_{r*}^{IV} (3.2) в следующей промежуточной конфигурации. Используя (3.1) и определив ΔE_g с помощью соотношения (3.3), можно вычислить

тензор P_{IIg} . Однако данная процедура не является обязательной. Величина ΔE_g необходима для построения в соответствии с (2.5) тензора $C_g = C_{g*} + 2\Delta E_g$, позволяющего вычислить значение \tilde{L}_{g*}^{IV} (3.2) в следующей промежуточной конфигурации.

Тензор истинных напряжений T определяется из соотношения (2.15), где $P_{II} = P_{IIr}$ или $P_{II} = P_{IIg}$. Заметим, что в отличие от тензоров P_{IIr} , P_{IIg} , выражаемых через свободные энергии Ψ_r , Ψ_g (2.14) или упругие потенциалы W_r , W_g (3.2), для тензора P_{II} , соответствующего полной кинематике, в рамках настоящего подхода не существует свободной энергии и упругого потенциала, производящих этот тензор. В то же время кинематике высокоэластичного и кинематике застеклованного состояний (2.1)–(2.3), (2.5) невозможно поставить в соответствие вектор перемещений или приращений перемещений, позволяющий найти тензоры малых деформаций e_r , e_g и малых поворотов d_r , d_g . Поэтому построить градиенты места F_r (2.1), F_g (2.5) невозможно, но это и не требуется при вычислении тензоров C_r , C_g , определяющих напряжения P_{IIr} , P_{IIg} . Вектор полных малых перемещений \mathbf{u} , переводящий соответствующую полным деформациям промежуточную конфигурацию в близкую текущую, существует, и полные малые деформации e и повороты d определяются соотношениями

$$e = (h + h^T)/2, \quad d = (h - h^T)/2, \quad h = \overset{*}{\nabla} \mathbf{u}, \quad (3.6)$$

где $\overset{*}{\nabla}$ — оператор Гамильтона в промежуточной конфигурации \varkappa_* . Градиент места F , вычисляемый в соответствии с соотношением (2.7), необходим для определения тензора истинных напряжений T (2.15).

При конечных деформациях в терминах полных малых перемещений ставится краевая задача механики деформируемого твердого тела при пошаговой процедуре ее численной реализации. Эта процедура используется наиболее часто, так как позволяет отслеживать историю процесса силового и (или) кинематического нагружения. Процедура реализуется с использованием вариационного уравнения Лагранжа

$$\int_{S_0} \mathbf{p}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dS_0 + \int_{V_0} \rho_0 \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV_0 - \int_{V_0} P_{II} \cdot \delta E dV_0 = 0, \quad (3.7)$$

где \mathbf{p}_0 — вектор заданных внешних сил, приведенных к поверхности S_0 , ограничивающей объем V_0 в начальной конфигурации; \mathbf{f} — массовые силы; δ — знак вариации; E — тензор полных деформаций Коши — Грина, в соответствии с (2.7) линейно зависящий от e . Как правило, численная реализация вариационного уравнения (3.7) осуществляется с помощью метода конечных элементов.

4. Верификация модели. Для верификации модели использованы экспериментальные данные, представленные в работах [8, 13, 20].

В качестве упругого потенциала как для высокоэластичного, так и для застеклованного состояния используем потенциал Пенга — Ландела

$$W_\gamma = \frac{1}{2} G_\gamma (I_1(C_\gamma) J^{-2/3}(C_\gamma) - 3) + \frac{1}{2} B_\gamma (J(C_\gamma) - 1)^2, \quad \gamma = r, g,$$

где G_γ , B_γ — модуль сдвига и объемный модуль для материала в соответствующем состоянии, связанные с модулем Юнга и коэффициентом Пуассона соотношениями линейной теории упругости. Отсюда в соответствии с (3.2) получаем

$$\begin{aligned} \tilde{L}_\gamma^{IV} = & -\frac{2}{3} J^{-2/3}(C_\gamma) G_\gamma \left(g C_\gamma^{-1} + C_\gamma^{-1} g - \frac{1}{3} I_1(C_\gamma) C_\gamma^{-1} C_\gamma^{-1} - I_1(C_\gamma) C_\gamma^{-1} \cdot C_{II} \overset{*}{C}_\gamma^{-1} \right) + \\ & + 2J(C_\gamma) B_\gamma \left[\left(J(C_\gamma) - \frac{1}{2} \right) C_\gamma^{-1} C_\gamma^{-1} - (J(C_\gamma) - 1) C_\gamma^{-1} \cdot C_{II} \overset{*}{C}_\gamma^{-1} \right]. \quad (4.1) \end{aligned}$$

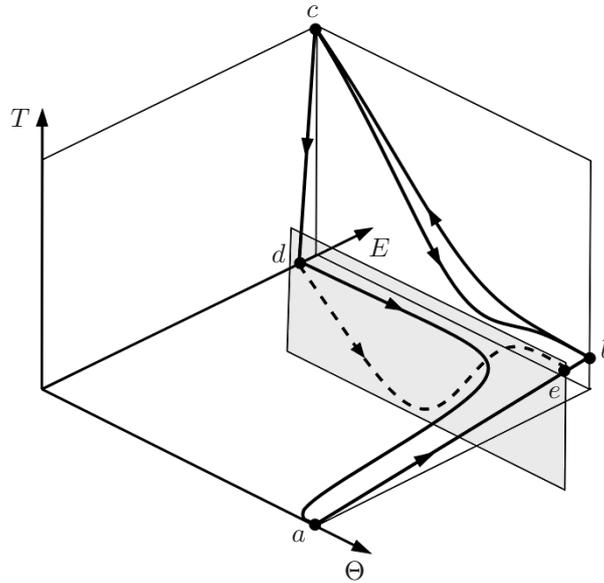


Рис. 2. Диаграмма напряжение — деформация — температура

Здесь C_{II} — второй изотропный тензор четвертого ранга [23]; операция $B^{IV} \overset{2}{*} A$ означает позиционное скалярное умножение справа тензора второго ранга A на второй базисный вектор тензора четвертого ранга B^{IV} , при получении соотношения (4.1) использованы правила дифференцирования скалярных и тензорных функций тензорного аргумента [24].

Для численного решения задачи используем вариационное уравнение (3.7), которое в отсутствие массовых сил на каждом шаге силового и (или) кинематического нагружения имеет вид

$$\int_{V_0} [F_* \cdot \tilde{P}_{IIr*} \cdot F_*^T + (F_* \cdot \tilde{L}_{r*}^{IV} \overset{2}{*} F_*^T) \cdot \Delta E_r] \cdot \delta e \, dV_0 = \int_{S_0} (\mathbf{p}_{0*} + \Delta \mathbf{p}_0) \cdot \delta \mathbf{u} \, dS_0. \quad (4.2)$$

Здесь \mathbf{p}_{0*} , $\Delta \mathbf{p}_0$ — вектор внешних сил в начале текущего шага нагружения и его заданное приращение на текущем шаге. При этом учитывались выражения (1.3), (3.1) и $A \cdot (B \cdot C \cdot D) = (D \cdot A \cdot B) \cdot C$ для любых тензоров второго ранга. С использованием соотношения (3.4), записанного в тензорном виде, и выражения (3.6) получаем вариационное уравнение для определения приращения вектора полных малых перемещений \mathbf{u} .

В экспериментах [13] в начальный момент времени (точка a на рис. 2) образец (стержень) из полимера с памятью формы находится в недеформированном и ненапряженном состоянии при температуре Θ_h (высокоэластичность). На первом этапе происходит одноосное силовое нагружение стержня вдоль его оси при постоянной температуре до определенной осевой деформации E_b (переход в точку b). После этого материал охлаждается до температуры Θ_l (застеклованное состояние) при фиксированной деформации E_b . При этом наблюдается увеличение напряжения (переход в точку c). При последующем нагревании материала при фиксированной деформации $E_c = E_b$ образец возвращается в состояние, соответствующее точке b . Если полимер с памятью формы, находящийся в состоянии, соответствующем точке c , разгрузить при постоянной температуре до нулевых напряжений (переход в точку d), то в материале остаются “замороженные” осевые деформации E_d . Нагревание материала до температуры Θ_h приводит к “размораживанию” деформаций, и полимер возвращается в начальное состояние (точка a). Если при нагревании полимера с памятью формы, находящегося в состоянии, соответствующем точке d , зафиксировать

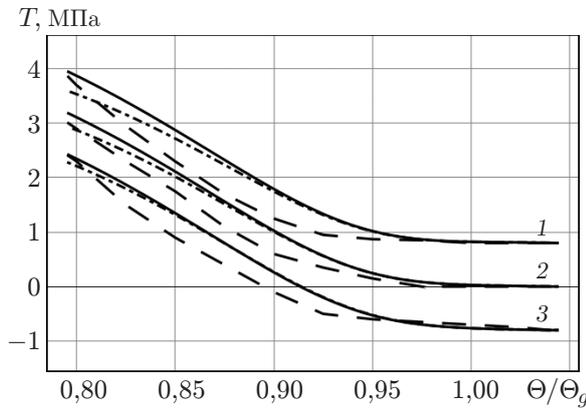


Рис. 3

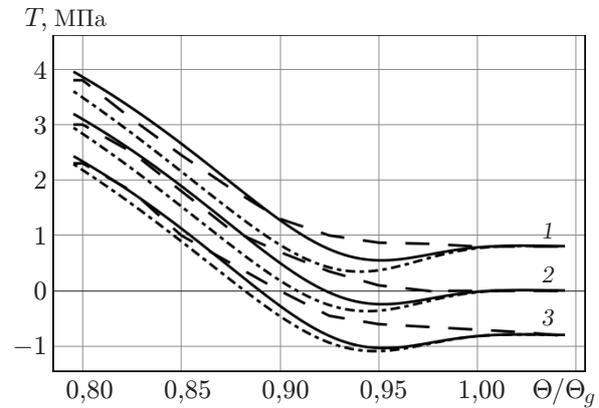


Рис. 4

Рис. 3. Зависимость истинных напряжений в образце при его охлаждении от относительной температуры при фиксированной осевой деформации (переход $b \rightarrow c$ на рис. 2):

сплошные линии — расчет по модели при упругом поведении материала, штрихпунктирные — расчет по модели при вязкоупругом поведении материала, штриховые — данные эксперимента [13]; 1 — $E_b = 9,1\%$, 2 — $E_b = 0$, 3 — $E_b = -9,1\%$

Рис. 4. Зависимость истинных напряжений в образце при его нагревании из состояния, соответствующего завершению процесса охлаждения (см. рис. 3), от относительной температуры при фиксированной осевой деформации (переход $c \rightarrow b$ на рис. 2) (обозначения те же, что на рис. 3)

полученную в этой точке осевую деформацию E_d , то конечное состояние материала будет определяться точкой e . Изменение напряжения показано штриховой линией на рис. 2.

В работе [13] эксперименты проводились для трех значений осевой деформации Коши — Грина, соответствующей точке b на рис. 2 ($E_b = 9,1; -9,1; 0\%$ (первый этап нагружения образца отсутствует)), для материала, имеющего следующие физико-механические свойства: модули Юнга $E_r = 8,8$ МПа, $E_g = 750$ МПа, коэффициенты Пуассона $\nu_r = 0,48$, $\nu_g = 0,35$, характерные температуры $\Theta_l = 273$ К, $\Theta_g = 343$ К, $\Theta_h = 358$ К, температурная деформация $\exp(7,1 \cdot 10^{-7} \Theta^2 - 3,16 \cdot 10^{-4} \Theta + 2,213 \cdot 10^{-2})$, степень стеклования $\varphi_g = 1 - 1/(1 + 2,76 \cdot 10^{-5} (\Theta_h - \Theta)^4)$. Поскольку скорость изменения температуры в экспериментах и при нагревании, и при охлаждении составляла 1 К/мин, в расчетах в любой момент времени температура в стержне полагалась однородной, что приводит к однородному напряженно-деформированному состоянию образца в процессе деформирования.

На рис. 3–5 представлены зависимости ненулевой составляющей тензора истинных напряжений T , определяемого выражением (2.15), от относительной температуры Θ/Θ_g , полученные при упругом (вязкость $\mu = \infty$ в силу последовательного соединения элементов структурной модели), вязкоупругом ($\mu = 10^5$ МПа·мин; шаг по времени $\Delta t = 1$ с, что соответствует скорости изменения температуры 1/60 К/с) поведению материала и в экспериментах [13]. На рис. 3 приведены зависимости, соответствующие переходу из точки b в точку c (см. рис. 2) при охлаждении материала и различных значениях осевой деформации Коши — Грина E_b , достигаемых в точке b при нагружении материала при переходе $a \rightarrow b$. Данные на рис. 4 соответствуют обратному переходу из точки c в точку b при нагревании и различных значениях осевой деформации Коши — Грина $E_c = E_b$. На рис. 5 представлены теоретические и экспериментальные результаты для траектории $c \rightarrow d \rightarrow e$ (см. рис. 2). При переходе $c \rightarrow d$ напряжения, соответствующие кривым 1–3 на рис. 3, при

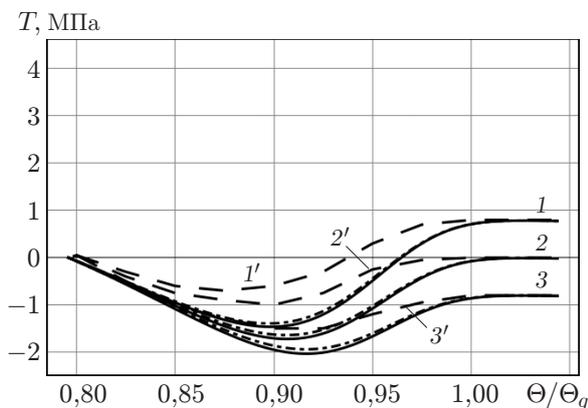


Рис. 5

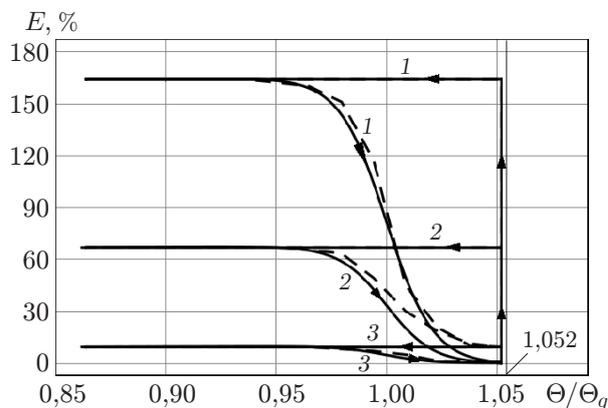


Рис. 6

Рис. 5. Зависимость истинных напряжений в образце при его нагревании из состояния, соответствующего завершению процесса охлаждения (см. рис. 3), при нулевых значениях напряжения и фиксированной осевой деформации, соответствующей завершению процесса разгрузки (переход $c \rightarrow d \rightarrow e$ на рис. 2):

1–3 — расчет по модели (сплошные линии — упругое поведение материала, штрихпунктирные — вязкоупругое поведение материала), 1'–3' — данные эксперимента [13]; 1 — $E_d = 8,8 \%$, 1' — $E_d = 8,6 \%$, 2, 2' — $E_d = 0$, 3 — $E_d = -9,3 \%$, 3' — $E_d = -9,4 \%$

Рис. 6. Зависимость осевой деформации Коши — Грина в образце от относительной температуры при переходе $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$ (см. рис. 2):

сплошные линии — расчет по модели при упругом поведении материала, штриховые — данные экспериментов [8, 20]; 1 — $E_d = 163 \%$, 2 — $E_d = 66,8 \%$, 3 — $E_d = 9,4 \%$

завершении процесса охлаждения ($\Theta/\Theta_g = 0,796$ на рис. 3, точка c на рис. 2), уменьшались до нуля (осуществлялась полная силовая разгрузка). Полученные при этом осевые остаточные деформации E_d (точка d на рис. 2) фиксировались и осуществлялся нагрев материала (переход $d \rightarrow e$). При этом напряжения восстанавливались почти до значений, приведенных на рис. 3 при таких же значениях температуры.

В работах [8, 20] проведены эксперименты по одноосному силовому нагружению образца из полимера с памятью формы марки VeriflexTM со следующими физико-механическими характеристиками: модули Юнга $E_r = 0,39$ МПа, $E_g = 1100$ МПа, коэффициенты Пуассона $\nu_r = 0,48$, $\nu_g = 0,35$, характерные температуры $\Theta_l = 298$ К, $\Theta_g = 345$ К, $\Theta_h = 363$ К, температурная деформация $\exp[(\varphi_r \alpha_r + \varphi_g \alpha_g)(\Theta - \Theta_h)]$, коэффициенты теплового расширения $\alpha_r = 5,9 \cdot 10^{-4}$ К⁻¹, $\alpha_g = 0,7 \cdot 10^{-4}$ К⁻¹, степень стеклования $\varphi_g = \{\text{th}[(\Theta_h - \Theta_g)/b] - \text{th}[(\Theta - \Theta_g)/b]\} / \{\text{th}[(\Theta_h - \Theta_g)/b] - \text{th}[(\Theta_l - \Theta_g)/b]\}$, $b = 7,33$. Значения деформаций, полученные в этих экспериментах, существенно превышали значения деформаций, полученные в экспериментах [13], а скорость изменения температуры варьировалась от 1 до 5 К/мин. Поэтому в расчетах в любой момент времени температура в образце полагалась однородной, что приводит к однородному напряженно-деформированному состоянию образца в процессе деформирования.

На рис. 6 представлена зависимость осевой деформации Коши — Грина от относительной температуры Θ/Θ_g при $\Theta = 2$ К/мин, полученная в рамках развиваемой модели при чисто упругом поведении материала и в экспериментах [8, 20] (траектории $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$ на рис. 2). При температуре $\Theta_h = 363$ К ($\Theta/\Theta_g = 1,052$, высокоэластичное состояние материала) образец растягивается осевой силой до различных значений осевой деформации E_b (переход $a \rightarrow b$ на рис. 2; вертикальная прямая на рис. 6,

соответствующая значению $\Theta/\Theta_g = 1,052$), после этого осуществляется охлаждение образца до температуры $\Theta_l = 298$ К ($\Theta/\Theta_g = 0,864$, застеклованное состояние материала; переход $b \rightarrow c$ на рис. 2; горизонтальные прямые на рис. 6, соответствующие различным фиксированным деформациям E_b). Затем образец разгружается до нулевого значения осевого напряжения при неизменной температуре Θ_l (переход $c \rightarrow d$ на рис. 2; при этом осевые деформации незначительно уменьшаются — до величины E_d). После этого образец в свободном состоянии нагревается до температуры Θ_h (переход $d \rightarrow a$ на рис. 2).

Сравнение полученных в рамках построенной модели результатов с имеющимися экспериментальными данными показывает, что модель чисто упругого поведения материала и модель вязкоупругого поведения материала только с одним временем релаксации описывают поведение полимера с памятью формы в области конечных деформаций с приемлемой точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лихачев В. А.** Эффект памяти формы // Сорос. образоват. журн. 1997. № 3. С. 107–114.
2. **Матвеев В. П.** Термомеханика полимерных материалов в условиях релаксационного перехода / В. П. Матвеев, О. Ю. Сметанников, Н. А. Труфанов, И. Н. Шардаков. М.: Физматлит, 2009.
3. **Белошенко В. А., Варюхин В. Н., Возняк Ю. В.** Эффект памяти формы в полимерах // Успехи химии. 2005. Т. 74, № 3. С. 285–306.
4. **Wei Z. G., Sandström R., Miyazaki S.** Review shape-memory materials and hybrid composites for smart systems. Pt 1. Shape-memory materials // J. Materials Sci. 1998. V. 33. P. 3743–3762.
5. **Behl M., Lendlein A.** Shape-memory polymers. Review // Materials Today. 2007. V. 10, N 4. P. 20–28.
6. **Liu Y., Du H., Liu L., Leng J.** Shape memory polymers and their composites in aerospace applications: a review // Smart Materials Structures. 2014. V. 23, N 2. P. 23001–23022. DOI: 10.1088/0964-1726/23/2/023001.
7. **Chen Yi-Chao, Lagoudas D. C.** A constitutive theory for shape memory polymers. Pt 1. Large deformations // J. Mech. Phys. Solids. 2008. V. 56. P. 1752–1765.
8. **Volk B. L., Lagoudas D. C., Chen Yi-Chao.** Analysis of the finite deformation response of shape memory polymers: II. 1D calibration and numerical implementation of a finite deformation, thermoelastic model // Smart Materials Structures. 2010. V. 19, N 7. P. 75006–75016. DOI: 10.1088/0964-1726/19/7/075006.
9. **Тихомирова К. А., Труфанов Н. А., Шардаков И. Н.** Численное и экспериментальное исследование термомеханического поведения стеклующихся полимеров в случае больших деформаций // Вычисл. механика сплошных сред. 2013. Т. 6, № 4. С. 475–482.
10. **Куликов Р. Г., Куликова Т. Г.** Численная методика решения задачи деформирования полимерной кристаллизующейся среды с учетом больших деформаций // Вычисл. механика сплошных сред. 2014. Т. 7, № 2. С. 172–180.
11. **Westbrook K. K., Kao P. H., Castro F., et al.** A 3D finite deformation constitutive model for amorphous shape memory polymers: A multi-branch modelling approach for nonequilibrium relaxation processes // Mech. Materials. 2011. V. 43. P. 853–869.
12. **Baghani M., Naghdabadi R., Arghavani J.** A large deformation framework for shape memory polymers: Constitutive modeling and finite element implementation // J. Intelligent Material Systems Structures. 2013. V. 24, N 1. P. 21–32.

13. **Liu Y., Gall K., Dunn M. L., et al.** Thermomechanics of shape memory polymers: uniaxial experiments and constitutive modeling // Intern. J. Plasticity. 2006. V. 22. P. 279–313.
14. **Новокшанов Р. С., Роговой А. А.** О построении эволюционных определяющих соотношений для конечных деформаций // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2002. № 4. С. 77–95.
15. **Новокшанов Р. С., Роговой А. А.** Эволюционные определяющие соотношения для конечных вязкоупругих деформаций // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2005. № 4. С. 122–140.
16. **Роговой А. А.** Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 5. С. 138–149.
17. **Роговой А. А.** Термодинамика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 4. С. 144–153.
18. **Роговой А. А.** Кинематика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 1. С. 165–172.
19. **Rogovoy A. A.** Formalized approach to construction of the state equations for complex media under finite deformations // Continuum Mech. Thermodynamics. 2012. V. 24. P. 81–114. DOI: 10.1007/s00161-011-0220-y.
20. **Volk B. L., Lagoudas D. C., Chen Yi-Chao, Whitley K. S.** Analysis of the finite deformation response of shape memory polymers. 1. Thermomechanical characterization // Smart Materials Structures. 2010. V. 19, N 7. P. 75005–75014. DOI: 10.1088/0964-1726/19/7/075005.
21. **Труделл К.** Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.
22. **Роговой А. А., Столбова О. С.** Моделирование упруго-неупругих процессов при конечных деформациях в сплавах с памятью формы // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 2. С. 148–162.
23. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
24. **Роговой А. А.** Дифференцирование скалярных и тензорных функций тензорного аргумента // Вестн. Перм. гос. техн. ун-та. Динамика и прочность машин. 2001. № 2. С. 83–90.

*Поступила в редакцию 21/VII 2014 г.,
в окончательном варианте — 17/X 2014 г.*
