ПМТФ, № 1, 1972

УДК 624.071.4 + 539.411

УСТОЙЧИВОСТЬ ВЯЗКО-УПРУГОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ОБОЛОЧКИ

В. Д. Потапов

(Москва)

Рассматривается оболочка, для которой константы вязко-упругости являются случайными функциями криволинейных координат срединной поверхности. Получены корреляционные функции первых приближений прогиба и функции напряжений, а также дисперсия критического времени.

Особенностью оболочек, испытывающих сжатие в условиях неограниченной ползучести, является «прощелкивание» их при любой нагрузке по истечении более или менее продолжительного времени, называемого критическим. Величина его зависит от многих факторов, и в первую очередь от характеристик упругих и вязких свойств материала, которые, как известно [1], имеют значительный разброс, являясь случайными функциями координат. В результате оболочка оказывается неоднородной, что приводит к перераспределению усилий в срединной поверхности во времени и как следствие к изменению критического времени.

Устойчивость однородных оболочек при ползучести в геометрически нелинейной постановке рассматривалась в работах [2, 3].

Рассмотрим вязко-упругую тонкую оболочку, свойства материала которой описываются случайными функциями криволинейных координат срединной поверхности.

Предполагая для простоты материал несжимаемым, запишем соотношения между деформациями и напряжениями

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}(1 + K)\, s_{ij} \qquad (i, j = 1, 2)$$

где

$$\frac{1}{G} K s_{ij} = 3A \int_0^t s_{ij}(\tau)\, d\tau, \qquad s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma, \qquad 3\sigma = \sigma_{ii}$$

G — модуль сдвига; A — константа, характеризующая вязкость; t, τ — время; δ_{ij} — единичный тензор.

Здесь и далее по повторяющимся индексам производится суммирование. Номера индексов соответствуют координатам x_1, x_2, отсчитываемым вдоль линий кривизны срединной поверхности.

Если неоднородность мала

$$1/G = \lambda = \langle\lambda\rangle + \beta\lambda', \quad A = \langle A\rangle + \beta A', \ \langle\lambda\rangle, \ \langle A\rangle = \mathrm{const}$$

(β — малый параметр), прогиб w и функция напряжений Φ могут быть найдены по методу малого параметра в виде ряда

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k w^{(k)}, \qquad \Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \Phi^{(k)} \tag{1}$$

Угловыми скобками обозначено осреднение по множеству реализаций.

Будем считать, что срединная поверхность оболочки имеет малые начальные отклонения от идеальной формы $w_0 = \beta w_0$. Ограничиваясь первым приближением в разложениях (1), запишем уравнения, определяющие $w^{(1)}$ и $\Phi^{(1)}$ в случае тонкой пологой оболочки

$$D\nabla^4 (w^{(1)} - w_0) = (1 + \langle K\rangle)\left[(\nabla^2\Phi^{(1)}\delta_{ij} - \Phi^{(1)}_{,ij})\frac{1}{R_{ij}} + (\nabla^2\Phi^{(0)}\delta_{ij} - \Phi^{(0)}_{,ij})\, w^{(1)}_{,ij}\right]$$

$$2\langle\lambda\rangle(1 + \langle K\rangle)\nabla^4\Phi^{(1)} + \frac{6h}{R_{22}}(w^{(1)} - w_0)_{,11} + \tag{2}$$

$$+ \frac{6h}{R_{11}}(w^{(1)} - w_0)_{,22} = -[\lambda(1 + K)(2\Phi^{(0)}_{,22} - \Phi^{(0)}_{,11})]_{,22} -$$

$$-[\lambda(1 + K)(-\Phi^{(0)}_{,22} + 2\Phi^{(0)}_{,11})]_{,11} - 6[\lambda(1 + K)\Phi^{(0)}_{,12}]_{,12}$$

где

$$\langle K\rangle\nabla^4\Phi^{(1)} = 3\frac{\langle A\rangle}{\langle\lambda\rangle}\int_0^t \nabla^4\Phi^{(1)}(\tau)\,d\tau, \qquad I = h^3/12, \qquad D = 4I/\langle\lambda\rangle$$

R_{11}, R_{22} — радиусы главных кривизн ($1 / R_{12} = 1 / R_{21} = 0$).

Для однородного безмоментного состояния (при $k = 0$ $\Phi^{(0)}_{,ij} = \text{const}$) второе из этих соотношений упрощается

$$2\langle\lambda\rangle(1 + \langle K\rangle)\nabla^4\Phi^{(1)} + \frac{6h}{R_{22}}(w^{(1)} - w_0)_{,11} +$$

$$+ \frac{6h}{R_{11}}(w^{(1)} - w_0)_{,22} = -(\lambda + \lambda K)_{,22}(2\Phi^{(0)}_{,22} - \Phi^{(0)}_{,11}) -$$

$$-(\lambda + \lambda K)_{,11}(-\Phi^{(0)}_{,22} + 2\Phi^{(0)}_{,11}) - 6(\lambda + \lambda K)_{,12}\Phi^{(0)}_{,12} \tag{3}$$

Предположим, что масштабы изменяемости и корреляции функций λ' и A' малы по сравнению с характерными размерами срединной поверхности, а сами функции статистически однородны. Тогда они могут быть представлены стохастическими интегралами Фурье — Стильтьеса [4]

$$\lambda'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} dZ_\lambda(\omega), \quad A'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} dZ_A(\omega), \quad \omega x = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2$$

Функции $Z_\lambda(\omega)$ и $Z_A(\omega)$ удовлетворяют условиям

$$\langle dZ_\lambda(\omega)\, dZ_\lambda^*(\omega')\rangle = S_\lambda(\omega)\,\delta(\omega - \omega')\, d\omega d\omega'$$

$$\langle dZ_A(\omega)\, dZ_A^*(\omega')\rangle = S_A(\omega)\,\delta(\omega - \omega')\, d\omega d\omega'$$

Здесь $\delta(\omega - \omega')$ — двумерная дельта-функция, $S_\lambda(\omega)$, $S_A(\omega)$ — спектральные плотности случайных функций $\lambda'(x)$, $A'(x)$. Звездочкой обозначен переход к комплексно сопряженным величинам.

Если поля $\lambda'(x)$, $A'(x)$ не только однородные, но и однородно-связанные, то

$$\langle dZ_\lambda(\omega)\, dZ_A^*(\omega')\rangle = S_{\lambda A}(\omega)\,\delta(\omega - \omega')\, d\omega d\omega'$$

Решением уравнений (2) и (3) являются выражения

$$w^{(1)} = v(x, t) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\psi_A(\omega)\, dZ_A(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\psi_\lambda(\omega)\, dZ_\lambda(\omega)$$

$$\Phi^{(1)} = f(x, t) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\varphi_A(\omega)\, dZ_A(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\varphi_\lambda(\omega)\, dZ_\lambda(\omega) \tag{4}$$

где

$$\psi_A(\omega)=\frac{B(\omega)}{2\langle A\rangle\gamma(\omega)a(\omega)}\left(\frac{\omega_1^2}{R_{22}}+\frac{\omega_2^2}{R_{11}}\right)\left\{\exp\left[-\frac{3\langle A\rangle\gamma(\omega)}{\langle\lambda\rangle}t\right]-1\right\}$$

$$\psi_\lambda(\omega)=\frac{B(\omega)}{2\langle\lambda\rangle a(\omega)}\left(\frac{\omega_1^2}{R_{22}}+\frac{\omega_2^2}{R_{11}}\right)\exp\left[-\frac{3\langle A\rangle\gamma(\omega)}{\langle\lambda\rangle}t\right]$$

$$\varphi_A(\omega)=\frac{B(\omega)}{2\langle A\rangle(\omega_1^2+\omega_2^2)^2}\left\{1-\mu(\omega)\exp\left[-\frac{3\langle A\rangle\gamma(\omega)}{\langle\lambda\rangle}t\right]-\right.$$
$$\left.-[1-\mu(\omega)]\exp\left(-\frac{3\langle A\rangle}{\langle\lambda\rangle}t\right)\right\}$$

$$\varphi_\lambda(\omega)=\frac{B(\omega)}{2\langle\lambda\rangle(\omega_1^2+\omega_2^2)^2}\left\{[1-\mu(\omega)]\exp\left(-\frac{3\langle A\rangle}{\langle\lambda\rangle}t\right)+\right.$$
$$\left.+\gamma(\omega)\mu(\omega)\exp\left[-\frac{3\langle A\rangle\gamma(\omega)}{\langle\lambda\rangle}t\right]\right\}$$

$$B(\omega)=\omega_2^2(2\Phi^{(0)}_{,22}-\Phi^{(0)}_{,11})+\omega_1^2(-\Phi^{(0)}_{,22}+2\Phi^{(0)}_{,11})+6\omega_1\omega_2\Phi^{(0)}_{,12}$$

$$a(\omega)=D(\omega_1^2+\omega_2^2)^4+\frac{3h}{\langle\lambda\rangle}\left(\frac{\omega_1^2}{R_{22}}+\frac{\omega_2^2}{R_{11}}\right)^2+(\omega_1^2+\omega_2^2)^2\omega_i\omega_j(\nabla^2\Phi^{(0)}\delta_{ij}-\Phi^{(0)}_{,ij})$$

$$\gamma(\omega)=(\omega_1^2+\omega_2^2)^2\omega_i\omega_j(\nabla^2\Phi^{(0)}\delta_{ij}-\Phi^{(0)}_{,ij})\,a^{-1}(\omega)$$

$$\mu(\omega)=\frac{3h}{\langle\lambda\rangle[1-\gamma(\omega)]a(\omega)}\left(\frac{\omega_1^2}{R_{22}}+\frac{\omega_2^2}{R_{11}}\right)^2$$

где $v(x, t)$, $f(x, t)$ — прогиб и функция напряжений, соответствующие начальному прогибу w_0.

Приведенные соотношения имеют смысл для значений q и t, меньших критических значений при вязко-упругих постоянных $\langle\lambda\rangle$ и $\langle A\rangle$.

Корреляционные функции прогиба $K_w(x, x')$ и функции напряжений $K_\Phi(x, x')$ имеют вид

$$K_w(x,x')=\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(x-x')}S_w(\omega)\,d\omega,\qquad K_\Phi(x,x')=\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(x-x')}S_\Phi(\omega)\,d\omega$$

где $S_w(\omega)$, $S_\Phi(\omega)$ — спектральные плотности функций $w(x)$, $\Phi(x)$

$$S_w(\omega)=\psi_A^2(\omega)S_A(\omega)+\psi_A(\omega)\psi_\lambda(\omega)[S_{A\lambda}(\omega)+S_{\lambda A}(\omega)]+\psi_\lambda^2(\omega)S_\lambda(\omega)$$
$$S_\Phi(\omega)=\varphi_A^2(\omega)S_A(\omega)+\varphi_A(\omega)\varphi_\lambda(\omega)[S_{A\lambda}(\omega)+S_{\lambda A}(\omega)]+\varphi_\lambda^2(\omega)S_\lambda(\omega)$$

Для определения критического времени рассмотрим возмущенное движение оболочки. Возмущения прогиба δw и функции напряжений $\delta\Phi$ находятся из уравнений

$$4I\,[G\nabla^4\delta\dot w+2G_{,i}\nabla^2\delta\dot w_{,i}+G_{,ij}(\delta\dot w_{,ij}+\delta_{ij}\nabla^2\delta\dot w)]-$$
$$-(\nabla^2\Phi\delta_{ij}-\Phi_{,ij})\,\delta\dot w_{,ij}-\left(w_{,ij}+\frac{1}{R_{jj}}\right)(\nabla^2\delta\dot\Phi\delta_{ij}-\delta\dot\Phi_{,ij})=\ldots \qquad (5)$$

$$2\lambda\nabla^4\delta\dot\Phi+4\lambda_{,i}\nabla^2\delta\dot\Phi_{,i}+\lambda_{,ij}(3\delta\dot\Phi_{,ij}-\nabla^2\delta\dot\Phi\delta_{ij})+6h\left(\frac{1}{R_{11}}\delta\dot w_{,22}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{R_{22}}\delta\dot w_{,11}+w_{,11}\delta\dot w_{,22}+w_{,22}\delta\dot w_{,11}-2w_{,12}\delta\dot w_{,12}\right)=\ldots$$

В правых частях равенств стоят члены, не зависящие от $\delta\dot w$ и $\delta\dot\Phi$.

Критическое время получаем из условия неограниченного возрастания скоростей $\delta w^{\cdot}$, $\delta\Phi^{\cdot}$ [5], что в данном случае дает такой же результат, как и критерий бифуркации равновесного положения [2].

В качестве примера вычислим вероятностные характеристики критического времени для цилиндрической оболочки радиусом R, сжатой вдоль образующей нагрузкой q. Пусть упругая постоянная λ (или G) детерминирована, а параметр вязкости A является однородной случайной функцией только координаты x_1 (x_1 отсчитывается вдоль образующей). Оболочка имеет начальный прогиб $w_0 = v_0 \sin^2 \pi m x_1 / l$ (l — длина оболочки)

Выражения (4) принимают в этом случае вид

$$w^{(1)}(x_1) = v \sin^2 \frac{m\pi}{l} x_1 + \frac{1}{2\langle A\rangle R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_1 x_1} \frac{1}{\omega_1^2} \left[1 - \exp\left(\frac{E\langle A\rangle \alpha_\omega}{1-\alpha_\omega} t\right)\right] dZ_A(w_1)$$

$$\Phi^{(1)}(x_1) = f \sin^2 \frac{m\pi}{l} x_1 + \frac{1}{2\langle A\rangle} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_1 x_1} \left\{\frac{q}{\omega_1^2}\left(1 - e^{-E\langle A\rangle t}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{Eh\alpha_\omega}{R^2\omega_1^4}\left[\exp\left(\frac{E\langle A\rangle}{1-\alpha_m}\alpha_m t\right) - e^{-E\langle A\rangle t}\right]\right\} dZ_A(\omega_1)$$

где

$$v = \frac{v_0}{1-\alpha_m} \exp\left(\frac{E\langle A\rangle}{1-\alpha_m}\alpha_m t\right), \qquad f = \frac{l^2 h E\alpha_m}{4m^2\pi^2 R} v$$

$$\alpha_m = q\left[\frac{4m^2\pi^2}{l^2} D + \frac{l^2 h E}{4m^2\pi^2 R^2}\right]^{-1}, \quad \alpha_\omega = q\left[D\omega_1^2 + \frac{Eh}{R^2\omega_1^2}\right]^{-1}, \quad E = 3G$$

Для получения уравнения относительно критического времени t_* задаемся функциями δw и $\delta\Phi$ (граничные условия удовлетворяются в среднем)

$$\delta w = c \sin \frac{m\pi}{l} x_1 \sin \frac{n}{R} x_2, \qquad \delta\Phi = d \sin \frac{m\pi}{l} x_1 \sin \frac{n}{R} x_2$$

Уравнения (5) решаем по методу Галеркина — Канторовича, полагая $w \approx w^{(1)}$, $\Phi \approx \Phi^{(0)} + \Phi^{(1)}$. Критическое время находится из условия обращения в нуль определителя, составленного из коэффициентов при $c^{\cdot}$ и d

$$\delta - \rho v = \Delta$$

где

$$\delta = D\left(\frac{m^2\pi^2}{l^2} + \frac{n^2}{R^2}\right)^2 + \frac{m^4\pi^4 Eh}{R^2 l^4}\left(\frac{m^2\pi^2}{l^2} + \frac{n^2}{R^2}\right)^{-2} - \frac{m^2\pi^2}{l^2} q$$

$$\rho = \frac{n^2 Eh}{4R^3}\left[\alpha_m + 8\left(1 + \frac{n^2 l^2}{m^2\pi^2 R^2}\right)^{-2}\right]$$

$$\Delta = \frac{n^2 Eh}{2R^2 l} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega_1 l + i(1-\cos\omega_1 l)}{\omega_1}\left(1 - \frac{l^2\omega_1^2}{4m^2\pi^2}\right)^{-1} \times$$

$$\times \left\{\frac{q}{Eh}\left(1 - e^{-E\langle A\rangle t}\right) + \frac{\alpha_\omega}{R^2\omega_1^2}\left[e^{-E\langle A\rangle t} - \exp\left(\frac{E\langle A\rangle}{1-\alpha_\omega}\alpha_\omega t\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{2l^2}{m^2\pi^2 R^2}\left(1 + \frac{n^2 l^2}{m^2\pi^2 R^2}\right)^{-2}\left[1 - \exp\left(\frac{E\langle A\rangle}{1-\alpha_\omega}\alpha_\omega t\right)\right]\right\} \frac{1}{\langle A\rangle} dZ_A(\omega_1)$$

Здесь опущены слагаемые, содержащие произведения малых величин.

В первом приближении критическое время может быть представлено как сумма $t_* = t_0 + t_1$. Каждое из слагаемых определяется из равенств

$$\delta = \rho v(t_0), \qquad t_1 = -\frac{1-\alpha_m}{\alpha_m E\langle A\rangle \delta} \Delta(t_0)$$

Очевидно, что $\langle t_* \rangle \approx t_0$, а дисперсия $D\ (t_1)$ равна

$$D(t_1) = \frac{1}{2}\left[\frac{(1-\alpha_m)\,n^2h}{\alpha_m \langle A\rangle R^2\delta}\right]^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos\omega_1 l}{l^2\omega_1^2(1-l^2\omega_1^2/4m^2\pi^2)^2} \times$$

$$\times \left\{\frac{q}{Eh}\left(1-e^{-E\langle A\rangle t}\right) + \frac{\alpha_\omega}{R^2\omega_1^2}\left[e^{-E\langle A\rangle t} - \exp\left(\frac{E\langle A\rangle}{1-\alpha_\omega}\alpha_\omega t\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{2l^2}{m^2\pi^2R^2}\left(1+\frac{n^2l^2}{m^2\pi^2R^2}\right)^{-2}\left[1-\exp\left(\frac{E\langle A\rangle}{1-\alpha_\omega}\alpha_\omega t\right)\right]^2 \frac{S_A(\omega_1)}{\langle A\rangle^2}\right\} d\omega_1 \qquad (6)$$

Примем корреляционную функцию случайной функции $A'\ (x_1)$ в виде

$$K_A(x_1 - x_1') = Q^2 e^{-s^2(x_1-x_1')^2}$$

Спектральная плотность для нее представляется следующим образом:

$$S(\omega_1) = \frac{Q^2}{2\sqrt{\pi}s}\, e^{-\omega_1^2/4s^2}$$

Перепишем выражение (6) для малых $E\langle A\rangle t$, $E\langle A\rangle (1-\alpha_\omega)^{-1}\alpha_\omega t$

$$D(t_1) = \frac{\sqrt{\pi}}{ls}\left(\frac{Q}{\langle A\rangle}\frac{t_0}{2\pi}\right)^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta^2(1-\cos 2\pi\theta)}{(1-\theta^2/m^2)^2} \times$$

$$\times \frac{[\theta^2 - 3p(k+2g)]^2}{(\theta^4 - 3pk\theta^2 + p^2)^2} \exp\left(-\frac{\pi^2\theta^2}{l^2s^2}\right) d\theta \qquad (7)$$

Здесь

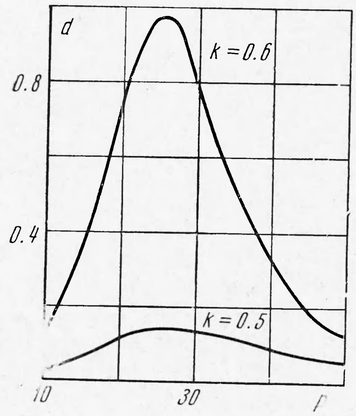
$$\theta = \frac{l\omega_1}{2\pi}, \qquad p = \frac{3l^2}{4\pi^2Rh}, \qquad \frac{q}{Eh} = k\frac{h}{R}$$

$$g = \frac{l^2}{m^2\pi^2Rh}\left(1+\frac{n^2l^2}{m^2\pi^2R^2}\right)^{-2}$$

При получении равенства (7) предполагалось выполненным условие

$$nl\ /\ m\pi R = 1$$

Положим $g = 1/3$. Это значение соответствует минимальному значению критической нагрузки для оболочки при линейной постановке.



Результаты вычислений дисперсии $D\ (t_1)$ при $m = 5$, $ls = 20$ представлены на фигуре как функции величины p при различных k. Как видно из фигуры, на которой

$$d = \langle A\rangle^2 D\ (t_1)\ /\ Q^2\ t_0^2$$

относительное отклонение критического времени $D\ (t_1)\ /\ t_0$ может быть того же порядка, что и $Q\ /\ \langle A\rangle$, и в значительной степени зависит от величины действующей сжимающей нагрузки.

Поступила 30 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
2. Григолюк Э. И., Липовцев Ю. В. Устойчивость оболочек в условиях ползучести. ПМТФ, 1965, № 4.
3. Куршин Л. М. К постановке задачи о выпучивании оболочки при ползучести. Докл. АН СССР, 1965, т. 163, № 1.
4. Болотин В. В., Макаров Б. П. Корреляционная теория докритических деформаций тонких упругих оболочек. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
5. Потапов В. Д. Устойчивость стержней при ползучести. Прикл. механ., 1970, т. 6, вып. 12.