Теплофизика и аэромеханика, 2006, том 13, № 1

УДК 532.536

О КАТЯЩИХСЯ УЕДИНЕННЫХ ВОЛНАХ НА НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ И ИХ УСТОЙЧИВОСТИ*

Е.М. ШАПАРЬ, Е.Н. КАЛАЙДИН, Е.А. ДЕМЕХИН

Кубанский государственный университет, Краснодар

Представлена система гидравлических уравнений Дресслера для описания трехмерных возмущений. Рассматривалась идея Дресслера об отсутствии сингулярности решений для исследования устойчивости двумерных катящихся волн к двумерным и трехмерным возмущениям, построены спектры. Получен результат об устойчивости стационарных катящихся волн типа солитонов.

Боры или катящиеся волны в каналах и реках существенно меняют динамику русла, и поэтому их исследования важны с практической точки зрения. В 1934 году в работе [1] проводилось наблюдение и описывались катящиеся волны в каналах. Согласно наблюдениям [1], когда вода стекает вниз по наклонному открытому каналу, течение характеризуется квазидвумерными катящимися волнами или борами. Волны двигаются по всей ширине канала и распространяются вниз по течению. Такой тип волн не зависит от поверхностного натяжения и может существовать и в турбулентном, и в ламинарном режимах течения. Для возникновения волн важны два фактора: угол наклона поверхности должен быть достаточно велик для проявления неустойчивости течения; влияние поверхностного натяжения, которое стабилизирует поток, должно быть пренебрежимо малым.

Спустя 15 лет в [2] вывели упрощенную версию гидравлических уравнений, которые описывают катящиеся волны. Исследование катящихся волн можно найти также и в [3]. Несмотря на длинную историю наблюдений за катящимися волнами, остается множество теоретических открытых вопросов. В частности, отсутствуют систематическое исследование двумерных катящихся волн типа уединенных, обобщение системы уравнений и условий на скачке на случай трехмерной задачи, исследования устойчивости катящихся волн к двумерным и трехмерным возмущениям.

1. Используя методологию работ Демехина и Шкадова, легко обобщить систему Сен–Венана для описания трехмерных волн в течении, направленном под углом θ к горизонту. Принимая в качестве базовых величин среднерасходную скорость плоского течения u_0, его толщину h_0 и плотность жидкости ρ, такую систему можно записать в виде:

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-08-33585-а).

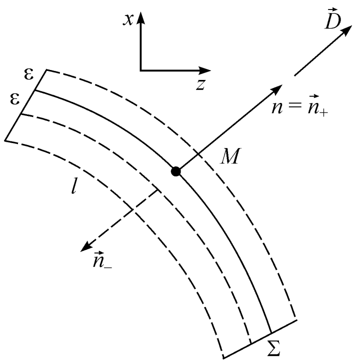

Рис. 1. Представление условия на скачке.

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial q}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{q^2}{h}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{qp}{h}\right) + Gh\dfrac{\partial h}{\partial x} = h - \dfrac{q\sqrt{q^2+p^2}}{h^2}, \\
\dfrac{\partial p}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{qp}{h}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{p^2}{h}\right) + Gh\dfrac{\partial h}{\partial z} = -\dfrac{p\sqrt{q^2+p^2}}{h^2}, \\
\dfrac{\partial h}{\partial t} + \dfrac{\partial q}{\partial x} + \dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 \ ,
\end{cases}
\qquad (1)
$$

где q и p — расходы жидкости в направлении действия силы тяжести x и нормальному направлению z, h — толщина слоя.

После растяжения временной и пространственной переменных, $t = \kappa\tau$, $x = \kappa\xi$, $\theta \neq 0$, $\kappa = 1/c_f = \mathrm{Fr}^2/\sin\theta$, система имеет только один безразмерный параметр $G = gh_0\cos\theta/U_0^2 = \cos\theta/\mathrm{Fr}^2$ (G — безразмерная сила тяжести), где число Фруда $\mathrm{Fr}^2 = U_0^2/gh_0$.

Выведем условия на скачке. Для этого предположим, что имеется некоторая кривая $f(x, z, t) = 0$ или $x - r(z, t) = 0$, вдоль которой существует разрыв гидродинамических величин. Возьмем малую окрестность Ω некоторой точки M, лежащей на кривой (рис. 1). Обозначим l часть кривой в окрестности M, $\vec{n}$ — нормаль, направленная в сторону движения. Отложим на нормали по обе стороны l сегменты длиной ε. Пусть Σ — кривая вдоль области Ω. Условие сохранения некоторой величины A внутри области Ω описывается уравнением

$$\partial\rho/\partial t + div\vec{A} = 0.$$

Будем двигаться со скоростью $\vec{D}$, с которой распространяется разрыв $f = 0$ в точке M. Тогда данное уравнение примет вид

$$-D(\partial\rho/\partial n) + div\vec{A} = 0.$$

Допустим, что величины $\vec{A}$ и ρ испытывают скачок $[A]$ и $[\rho]$ при переходе через $f = 0$. Будем обозначать величины перед скачком знаком “–”' и за скачком — знаком “+”. Проинтегрировав последнее соотношение по области Ω и используя теорему Гаусса, получим:

$$\int\limits_{\Omega} div\vec{A}d\omega = \int\limits_{\Sigma} \vec{A}\vec{n}dl = l(\vec{A}_-\vec{n}_- + \vec{A}_+\vec{n}_+) = (\vec{A}_+ - \vec{A}_-)\vec{n}l$$

$$\int\limits_{\Omega} (\partial\rho/\partial n)d\omega = \int\limits_{\Sigma} dl \int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} (\partial\rho/\partial n)dn = l(\rho_+ - \rho_-).$$

Как результат, устремляя l и ε к нулю, получим в точке M условие на скачке в трехмерном случае.

$$-D[\rho] + [\vec{A}\vec{n}] = 0$$

$$\vec{n} = \left(1/(1+r_z^2)^{1/2}, -r_z/(1+r_z^2)^{1/2}\right) = (n_x, n_z), \quad D = r_t/(1+r_z^2)^{1/2}.$$

Таким образом, условия на скачке будут иметь вид:

$$\begin{cases} -D[h]+[q]n_x+[p]n_z=0, \\ -D[q]+\left[q^2/h+1/2\,Gh^2\right]n_x+[qp/h]\,n_z=0, \\ -D[p]+[qp/h]n_x+\left[p^2/h+1/2\,Gh^2\right]n_z=0. \end{cases} \tag{2}$$

Система (1) всегда имееет тривиальное решение $h = 1$, $q = 1$, $p = 0$.

2. Катящиеся стационарные двумерные волны можно рассматривать как цепочку слабо взаимодействующих солитонов, для которых $\partial/\partial z=0$, $p = 0$, $\partial/\partial t=-c\partial/\partial x$. Для уединенной волны — $h\to 1$ при $x\to\pm\infty$. Уравнение неразрывности может быть проинтегрировано, $q = 1 + c(h - 1)$. Подстановка этого соотношения в первое уравнение системы (1) дает обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dh}{dx}=\frac{h^3-(ch-c+1)^2}{G\left[h^3-\left((c-1)^2/G\right)\right]}, \tag{3}$$

которое имеет особенность при знаменателе, равном нулю, — $Gh^3-(c-1)^2=0$. Для ее устранения применим известный подход из работы [2]. Разложив числитель и знаменатель на множители:

$$h^3-(ch-c+1)^2=(h-1)(h-h_1)(h-h_2),$$

$$h^3-(c-1)^2/G=(h-b)(h^2+bh+b^2),$$

$$h_1=1/2[c+1+\sqrt{(c+3)(c-1)}](c-1), \tag{4}$$

$$h_2=1/2[c+1-\sqrt{(c+3)(c-1)}](c-1), \tag{5}$$

$$b=(c-1)^{2/3}/G^{1/3},$$

при $h_1 = b$ получаем известное решение Дресслера для солитона

$$1/2[c+1+\sqrt{(c+3)(c-1)}](c-1)=(c-1)^{2/3}/G^{1/3}. \tag{6}$$

Решение этого нелинейного алгебраического уравнения дает зависимость $c = c(G)$, которую можно разрешить относительно c только численно. В пределе $G\to 0$ можно получить аналитическое разложение

$$c=G^{-1/4}\left(1-1/2\,G^{1/4}+9/8\,G^{1/2}+\ldots\right)$$

так, что для вертикального стекания $G\to 0$, $c\to\infty$. После устранения особенности получим уравнение для солитонов

$$dh/dx=1/G\left[(h-1)(h-h_2)/(h^2+bh+b^2)\right], \tag{7}$$

решение которого может быть найдено аналитически, $x = x(h)$.

Для определения амплитуды волны используем условие на скачке или так называемое слабое решение:

$$-cq_{\max}+q_{\max}^2/h_{\max}+1/2\,Gh_{\max}^2+c-1-1/2\,G=0, \tag{8}$$
$$q_{\max}=ch_{\max}-c+1.$$

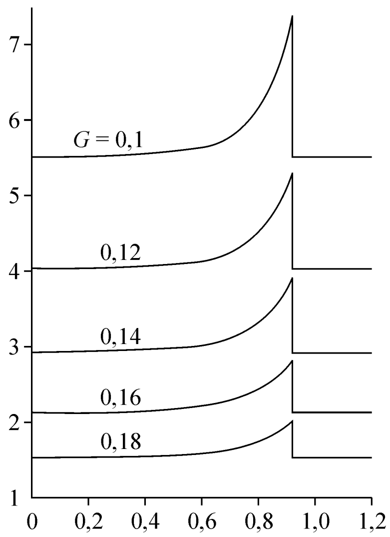

Рис. 2. Профили катящихся волн типа солитонов.

Из этого соотношения получаем квадратное уравнение относительно амплитуды $h_{\max}$, решение которого дает

$$h_{\max} = -1/2 + \sqrt{1/4 + 2(c-1)^2/G}. \qquad (9)$$

Профили уединенных волн при разных значениях G приведены на рис. 2.

3. Решение нестационарной линеаризованнной около двумерного солитона задачи может быть представлено как суперпозиция собственных функций задачи на собственные значения. В силу бесконечной области линейного оператора в дополнение к дискретной части спектра добавляется непрерывная часть спектра (см. [5]). Собственные функции дискретного спректра локализованы около горба волны, в то время, как функции непрерывного спектра ограничены при $x = \pm\infty$, где они ведут себя синусоидально [6].

Из всех этих элементов спектра рассмотрим только дискретные собственные функции и соответствующие им собственные значения, ответственные за устойчивость или неустойчивость катящихся волн.

Предположим, что разрыв расположен при $x - ct = 0$. Воздействуем на него трехмерным малым возмущением так, что расположение разрыва сместится [7] в $x - ct - \hat{r}(z,t) = 0$; здесь и ниже символом “^” обозначены возмущенные величины. На положительной стороне скачка:

$$q^+ = q_{\max} + q'_{\max}\hat{r} + \hat{q}^+, \quad h^+ = h_{\max} + h'_{\max}\hat{r} + \hat{h}^+, \quad \hat{p}^+ = \hat{p}^+,$$

где первый член соответствует невозмущенному решению, второй — возмущению за счет сдвига разрыва, третий — обычной части возмущения.

На отрицательной стороне скачка, где невозмущенные движения плоско-параллельны,

$$p^- = \hat{p}^-, \quad q^- = 1 + \hat{q}^-, \quad h^- = 1 + \hat{h}^-.$$

Теперь можно подсчитать скачки величин:

$$[q]\big|_{x=0} = q_{\max} - 1 + ch'_{\max}\hat{r} + \hat{q}^+ - \hat{q}^-,$$

$$[p]\big|_{x=0} = \hat{p}^+ - \hat{p}^-, \quad [h]\big|_{x=0} = \hat{h}^+ - \hat{h}^-.$$

D является возмущенной скоростью c, $D = c + \hat{r}_t$. В силу линейности возмущенной системы и того факта, что коэффициенты этой системы не зависят от t и z, мы можем искать элементарное решение в форме:

$$\hat{r} \to \hat{r}e^{i\beta z + \lambda t}; \quad \hat{h} \to \hat{h}e^{i\beta z + \lambda t}, \quad i\hat{p} = \hat{\pi}.$$

Здесь β — волновое число в направлении z, λ — коэффициент роста (затухания), являющийся собственным значением задачи. При $\lambda > 0$ — двумерная волна неустойчива, в случае $\lambda < 0$ — она устойчива. Условие на скачке для невозмущенного двумерного решения описывается уравнением (11) (см. ниже).

Условия на скачке для трехмерных возмущений этого решения получаются линеаризацией соотношений (2) около двумерного скачка (см. [8, 9]) (11) и имеют вид:

$$-c(\hat{h}^+ - \hat{h}^-) - \lambda\hat{r}(h_{\max} - 1) + (\hat{q}^+ - \hat{q}^-) = 0, \tag{10}$$

$$-c(\hat{q}^+ - \hat{q}^-) - \lambda c(h_{\max} - 1)\hat{r} - \left(q_{\max}^2 / h_{\max}^2\right)\hat{h}^+ + \hat{h}^- + \left(2q_{\max} / h_{\max}\right)\hat{q}^+ -$$

$$-2\hat{q}^- - \left((c-1)^2 / h_{\max}^2\right)h'_{\max}\hat{r} + Gh_{\max}h'_{\max}\hat{r} + Gh_{\max}\hat{h}^+ - G\hat{h}^- = 0,$$

$$-c(\pi^+ - \pi^-) + \left(q_{\max} / h_{\max}\right)\pi^+ - \pi^- - 1/2\,\beta G h_{\max}^2 \hat{r} = 0.$$

Теперь рассмотрим решение в области течения перед разрывом $-\infty < x < 0$. Окончательно решение в этой области описывается системой уравнений (опускаем знак "–") для $\hat{q}^+$, $\hat{\pi}^+$ и $\hat{h}^+$:

$$\begin{cases} \lambda\hat{q} + \dfrac{q}{dx}\left(2\dfrac{q}{h}\hat{q} - \dfrac{q^2}{h^2}\hat{h} - c\hat{q}\right) + \beta\dfrac{q}{h}\pi + G(h\hat{h})_x = \hat{h} + \dfrac{2q^2\hat{h} - 2qh\hat{q}}{h^3}, \\ \lambda\hat{\pi} + \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{q}{h}\hat{\pi} - c\hat{\pi}\right) - \beta Gh\hat{h} = -\dfrac{\hat{\pi}q}{h^2}, \\ \lambda\hat{h} + \dfrac{d}{dx}(\hat{q} - c\hat{h}) + \beta\hat{\pi} = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Система для $\hat{q}^-$, $\hat{\pi}^-$ и $\hat{h}^-$, при $0 < x < +\infty$ (знак "–" опускаем), является линейной системой с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} h\hat{q} + 2\hat{q} - \hat{h}' - c\hat{q}' + \beta\hat{\pi} + G\hat{h}' = 3\hat{h} - 2\hat{q}, \\ \lambda\hat{\pi} + \hat{\pi}' - c\hat{\pi}' - \beta G\hat{h} = -\hat{\pi}, \\ \lambda\hat{h} + \hat{q}' - c\hat{h}' + \beta\hat{\pi} = 0, \end{cases} \tag{12}$$

так что ищем решение в форме $\hat{h} = e^{\sigma x}$, $\hat{q} = \hat{Q}e^{\sigma x}$, $\hat{\pi} = \hat{\Pi}e^{\sigma x}$. Исключая $\hat{Q}$ и $\hat{\Pi}$, получаем дисперсионное соотношение

$$(-3c^2 + G - 1 - cG + 3c + c^3)\sigma^3 + (5c + \lambda G - 3\lambda + 6\lambda c - 3 - 3\lambda c^2 - 2c^2)\sigma^2 +$$

$$+(3\lambda^2 c + 4\lambda c - 3\lambda^2 + \beta^2 Gc - 5\lambda - \beta^2 G)\sigma - 2\lambda^2 - \beta^2 G\lambda - \lambda^3 - 2\beta^2 G = 0. \tag{13}$$

Приемлемыми являются только решения, затухающие при $x \to \pm\infty$, и соответствующие им значения σ. Дисперсионное соотношение (13) имеет три корня при фиксированном λ. Мы исследуем детально случай $\lambda < 0$, при $\lambda > 0$ анализ проводится аналогично.

Один из корней σ_k, обозначенный σ_1, всегда действителен. Другие два корня либо действительны, либо компексно сопряжены, но их действительные части всегда отрицательны при $\lambda < 0$.

$$\sigma_1 > 0, \quad \mathrm{Real}(\sigma_{2,3}) < 0.$$

При малых β величины σ_2 и σ_3 действительны, но при достаточно большом $\beta > \beta_*$ они комплексно сопряжены.

Рассмотрим решение в области $-\infty < x < 0.$ Введем обозначения:

$$d/dx(q/h) = \left((c-1)/h^2\right)h\,' \equiv D_1, \quad q/h \equiv D_0,$$

$$d/dx(q^2/h^2) = 2\left(q(c-1)/h^3\right)h\,' \equiv D_2,$$

запишем уравнения (11) в виде:

$$\begin{cases} \lambda\hat{q} + 2D_1\hat{q} + 2D_0\hat{q}\,' - D_2\hat{h} - D_0^2\hat{h}\,' - c\hat{q}\,' + \\ +\beta D_0\hat{\pi} + Gh\,'\hat{h} + Gh\hat{h}\,' = \hat{h} + 2\dfrac{q^2}{h^3}\hat{h} - 2\dfrac{q}{h^2}\hat{q}, \\ \lambda\hat{\pi} + D_1\hat{\pi} + D_0\hat{\pi}\,' - \beta Gh\hat{h} = -\dfrac{q}{h^2}\hat{p}, \\ \lambda\hat{h} + \hat{q}\,' - c\hat{h}\,' + \beta\hat{\pi} = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Выразим $\hat{\pi}$ из последнего уравнения

$$\hat{\pi} = -(\lambda/\beta)\hat{h} - (1/\beta)\hat{q}\,' + (c/\beta)\hat{h}\,'$$

и запишем систему в виде

$$\begin{pmatrix} 2D_0 - c & -D_0^2 + Gh & 0 \\ 1 & -c & 0 \\ 0 & 0 & D_0 - c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{q}\,' \\ \hat{h}\,' \\ \pi\,' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Прежде всего разрешим систему относительно $\hat{h},$ $\hat{q}$ и $\hat{\pi}.$ Обозначим:

$$b_1 = \left(-\lambda - 2D_1 - 2\left(q/h^2\right)\right)\hat{q} + \left(D_2 - Gh\,' + 1 + 2\left(q^2/h^3\right)\right)\hat{h} - \beta D_0\hat{\pi}, \tag{15}$$

$$b_2 = -\lambda\hat{h} - \beta\hat{\pi},$$

$$b_3 = \beta Gh\hat{h} - \lambda\hat{\pi} - D_1\hat{\pi},$$

$$A = \begin{bmatrix} 2(ch+1-c)/h - c & -(ch+1-c)^2/h^2 + Gh & 0 \\ 1 & -c & 0 \\ 0 & 0 & (ch+1-c)/h - c \end{bmatrix},$$

$$\Delta = (c-1)\left(Gh^3 - (c-1)^2\right)/h^3,$$

$$\Delta\hat{q}' = \begin{bmatrix} b_1 & -D_0^2 + Gh & 0 \\ b_2 & -c & 0 \\ b_3 & 0 & D_0 - c \end{bmatrix} = -b_1cD_0 + b_1c^2 + b_2D_0^2c - b_2GhD_0 + b_2Ghc,$$

$$\Delta h' = \begin{bmatrix} 2D_0 - c & b_1 & 0 \\ 1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & D_0 - c \end{bmatrix} = 2b_2D_0^2 - 3b_2D_0c + b_2c^2 - b_1D_0 + b_1c,$$

$$\Delta\hat{\pi}' = \begin{bmatrix} 2D_0 - c & -D_0^2 + Gh & b_1 \\ 1 & -c & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} = -2cb_3D_0 + c^2b_3 + b_3D_0^2 - b_3Gh.$$

Видно, что система снова имеет особенность при Δ = 0, а именно, при $Gh^3 - (c-1)^2 = 0$. При $x \to -\infty$, $\hat{h} \to 1$, $\hat{h}' \to 0$ и решение линейной системы дифференциальных уравнений описывается дисперсионным соотношением (13). Имеется только одно $\sigma = \sigma_1 > 0$, соответствующее затухающему на минус бесконечности решению:

$$\hat{h}^+ = \exp\left(\sigma_1(x - x_0)\right),$$

$$\hat{q}^+ = \left[\beta^2 G \big/ \sigma_1(c\sigma_1 - \sigma_1 - \lambda)\right] \exp(\sigma_1(x - x_0)), \tag{16}$$

$$\hat{\pi}^+ = \beta G/\lambda + \sigma_1 - c\sigma_1 \exp(\sigma_1(x - x_0)).$$

Поскольку собственная функция определена с точностью до мультипликативной постоянной, выберем $x = -x_0$. В таком случае появляются начальные условия для численного интегрирования системы от $x = -\infty$ (практически, достаточно далеко от горба волны) до $x = 0$, где расположен скачок. Однако, как было найдено выше, в точке $x = x_1$, в которой $Gh^3 - (c-1)^2 = 0$, система имеет особенность дресслеровского типа. Представим систему в виде, более удобном для дальнейшего исследования, введя новые функции $\hat{\psi}$ и $\hat{g}$ из соотношений:

$$\hat{h} = \hat{\psi}\,', \quad \hat{g} = c\left(\partial\hat{\psi}/\partial x\right) - \lambda\hat{\psi} - \beta\int\hat{\pi}\,dx = c\hat{\psi}\,' - \lambda\hat{\psi} - \beta\int\hat{\pi}\,dx,$$

$$h[Gh^3 - (c-1)^2]\hat{\psi}'' + \{[Gh^3 + 2(c-1)^2]h\,' + 2\lambda(c-1)h^2 + 2c(c-1)h -$$

$$-h^3 - 2(c-1)^2\}\hat{\psi}\,' + [-\lambda^2h^3 - 2\lambda(c-1)hh\,' - 2\lambda ch^2 + 2\lambda(c-1)h]\hat{\psi} +$$

$$+\beta\{(c-1)h^2\hat{g}\,' + [-2(c-1)hh\,' - \lambda h^3 + 2(c-1)h - 2ch^2]\hat{g}\} = 0,$$

$$\hat{g}'' + \left\{\left(-\lambda/(c-1)\right)h - h\,'/h\right\}\hat{g}\,' + \beta\left(Gh^2\big/(c-1)\right)\hat{\psi}\,' = 0.$$

Вблизи $x = x_1$ выполняются соотношения:

$$\begin{cases} 3Gb^3Dh_1(x - x_1)\hat{\psi}'' + a_1\hat{\psi}\,' + a_0\hat{\psi} + k_1\hat{g}\,' + s_1\hat{g} = 0, \\ \hat{g}'' + m\hat{g}\,' + r\hat{\psi}\,' = 0, \end{cases}$$

или, при перемещении особенности в начало координат, $x - x_1 \to x$:

$$\begin{cases} x\hat{\psi}'' + a\hat{\psi}\,' + b\hat{\psi} + k\hat{g}\,' + s\hat{g} = 0, \\ \hat{g}'' + m\hat{g}\,' + r\hat{\psi}\,' = 0. \end{cases}$$

Первое регулярное решение записывается в виде:

$$\hat{\psi} = 1 + A_1x + A_2x^2 + \ldots,$$

$$A_1 = -b/a, \quad A_{i+1} = -\left[(i+1)kB_{i+1} + bA_i + sB_i\right]\big/(i+1)(a+i),$$

$$\hat{g} = B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots,$$

$$B_2 = -rA_1/2; \quad B_{i+1} = -[mB_i + rA_i]/(i+1);$$

второе регулярное решение:

$$\hat{\psi} = A_1 x + A_2 x^2 + \ldots,$$

$$A_1 = -s/a, \quad A_{i+1} = -(i+1)kB_{i+1} + bA_i + sB_i/(i+1)(a+i),$$

$$\hat{g} = 1 + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots,$$

$$B_2 = -rA_1/2; \quad B_{i+1} = -[mB_i + rA_i]/(i+1);$$

третье регулярное решение:

$$\hat{\psi} = A_1 x + A_2 x^2 + \ldots,$$

$$A_1 = -k/a, \quad A_{i+1} = -(i+1)kB_{i+1} + bA_i + sB_i/(i+1)(a+i),$$

$$\hat{g} = x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots,$$

$$B_2 = -[m + rA_1]/2; \quad B_{i+1} = -[mB_i + rA_i]/(i+1);$$

четвертое сингулярное решение:

$$\hat{\psi} = (-x)^{1-a}[A_1 x + A_2 x^2 + \ldots],$$

$$A_1 = \left[-b + kB_1(a-2)\right]/(2-a); \quad A_{i+1} = \left[-bA_i + kB_{i+1}(a-i-2) + sB_i\right]/(i+1)(i+2-a),$$

$$\hat{g} = (-x)^{2-a}[B_1 + B_2 x + B_3 x^2 + \ldots],$$

$$B_2 = -r/(a-2); \quad B_{i+1} = rA_i + mB_i/(a-i-2).$$

Общее решение есть суперпозиция четырех решений

$$\hat{\psi} = c_1(\lambda)\psi_1 + c_2(\lambda)\psi_2 + c_3(\lambda)\psi_3 + c_4(\lambda)\psi_4,$$

причем константы c_k есть функции λ, и для конкретного λ они находятся в ходе численного интегрирования. Подберем λ таким образом, чтобы подавить сингулярное решение $c_4(\lambda) = 0$. Это λ и является искомым собственным значением задачи. Нахождение собственного значения λ заканчивается на этом этапе, для нахождения собственной функции необходимо проинтегрировать систему, которая теперь не имеет особенности, до $x = 0$, затем воспользоваться соотношением на скачке (11), чтобы пересчитать $\hat{h}^+$, $\hat{q}^+$, $\hat{\pi}^+$ на $\hat{h}^-$, $\hat{q}^-$, $\hat{\pi}^-$, которые будут функцией $\hat{r}$, чтобы в решении на $0 < x < +\infty$

$$\hat{h}^- = M_1(\hat{r})\exp(\sigma_1 x) + M_2(\hat{r})\exp(\sigma_2 x) + M_3(\hat{r})\exp(\sigma_3 x)$$

подавить единственное растущее на $+\infty$ решение, $M_1(\hat{r}) = 0$.

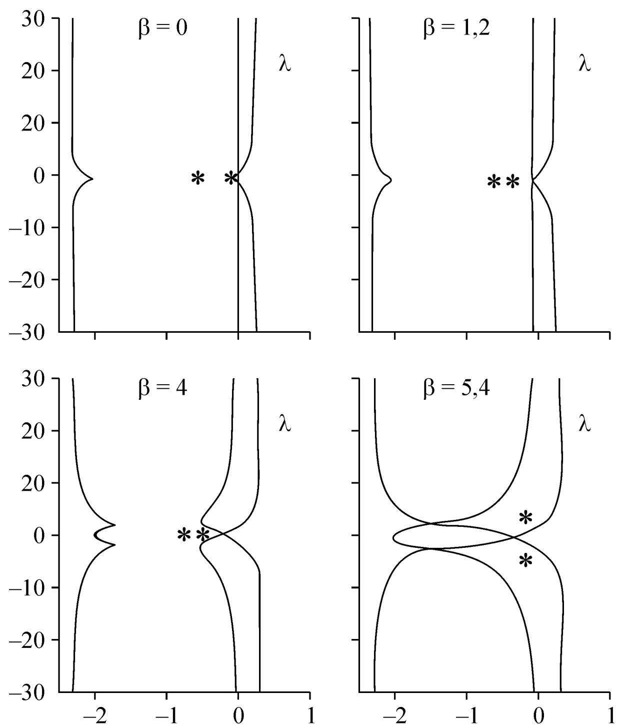

Рис. 3. Непрерывный и дискретный спектр при G = 0,1, течение турбулентно.

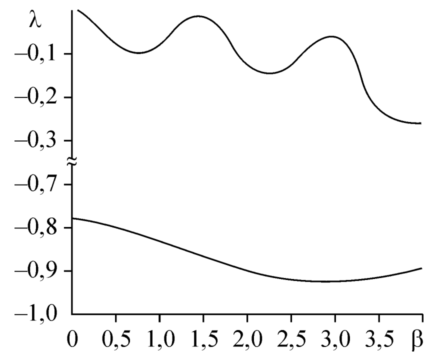

Рис. 4. Устойчивость к трехмерным возмущениям, G = 0,1.

На рис. 3 изображен непрерывный и дискретный спектр для фиксированного значения G. В силу бесконечной области по x весь спектр по λ можно разбить на дискретную и непрерывную части. Дискретный спектр определяет устойчивость горба солитона, а непрерывный спектр Г отвечает за устойчивость плоского участка солитона.

Построив дискретный спектр (рис. 4), можно судить об устойчивости солитона: если $\lambda < 0$ для всех β, то катящаяся волна устойчива, если имеется хотя бы одно β, для которого $\lambda > 0$, — волна неустойчива. При ненулевом $\beta \neq 0$, увеличивая его от нуля, оба корня начинают сближаться, и при $\beta \approx 5{,}2$ для $G = 0{,}1$ они сливаются и становятся комплексно-сопряженной парой. Но в любом случае $\lambda < 0$. Следовательно, двумерные катящиеся волны типа солитонов устойчивы к трехмерным возмущениям.

4. В работе система гидравлических уравнений Дресслера была обобщена для описания трехмерных возмущений. Идея Дресслера об отсутствии сингулярности решений была обобщена для исследования устойчивости двумерных катящихся волн к двумерным и трехмерным возмущениям, и построены спектры. Получен результат об устойчивости стационарных катящихся волн типа солитонов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Cornish V.** Ocean waves. — Cambridge Univ. Press, 1934. — P. 206.
2. **Dressler R.F.** Mathematical solution of the problem of roll waves in inclined open channels // Comm. Pure Appl. Math. — 1949. — Vol. 2. — P. 149–194.
3. **Ляпидевский В.Ю., Тешуков В.М.** Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости // Изд. СО РАН, 2000. — 420 с.
4. **Демехин Е.А., Шкадов В.Я.** О трехмерных нестационарных волнах в стекающей пленке жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1984. — № 5. — С. 21–27.
5. **Chang H.-C., Demekhin E.A.** Complex wave dynamics on thin films. — Elsevier, 2002. — P. 402.
6. **Oh M., Zumburn K.** Stability of periodic solutions of conservation laws with viscosity: analysis of the Evans function // Arch. Ration. Mech. Anal. — 2003. — Vol. 166, No. 2. — P. 99–166.
7. **Jin S., Kim Y.J.** On the computation of roll-waves // Math. Model. Numer. Anal. — 2001. — Vol. 35, No. 3. — P. 463–480.
8. **Noble P., Travadel S.** Non-persistence of roll-waves under viscous perturbations // Disc. Cont. Dynum. Sys.-Ser. — 2001. — Vol. 1, No. 1. — P. 61–70.
9. **Kranenburg C.** On the evolution of roll-waves // J. Fluid Mech. — 1992. — Vol. 245. — P. 249–261.

Статья поступила в редакцию 27 мая 2005 г.