$\vartheta_1 = 0$, $N_1 = 0$, $S = 0$ на обоих торцах. Характеристики материала: $\nu = 0{,}3$, $E = 2\cdot 10^{10}\cdot 9{,}81$ Н/м². На фиг. 1 изображен нормальный прогиб, возникающий в оболочке под действием нормального внутреннего давления с показателем осцилляции $n = 15$. Прогиб симметричен относительно середины отрезка [0,1], поэтому в левой части фиг. 1 изображены составляющие решения (*1* — краевой эффект, *2* — результат численного решения), а справа — полное решение. На фиг. 2—4 изображены собственные формы колебаний этой же оболочки с теми же краевыми условиями при $n = 4$ для значений частотного параметра $\lambda = \rho l^2\omega_m^2/E\varepsilon^2$, равных 221,22; 510,05; 1007,04 соответственно. В левой части фиг. 2—4 формы разложены на составляющие, а в правой — приведены суммарные решения. Цифрами *1* и *2* обозначены краевой эффект и численный результат.

Достоинством данного способа приближенного решения задачи является то, что численно решается задача, порядок дифференциального оператора которой вдвое ниже по сравнению с исходной, а среди решений этой задачи уже нет краевых эффектов, порожденных тонкостенностью конструкции. Метод тем более эффективен, чем выше тонкостенность рассматриваемой оболочки.

Поступила 19 I 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Корнев В. М., Шкутин Л. И.** О сочетании асимптотических и численных методов при решении задач прочности, устойчивости и колебаний упругих оболочек вращения.— В кн.: Теория оболочек и пластин. М.: Наука, 1973.
2. **Корнев В. М., Шкутин Л. И.** Асимптотика задачи о собственных несимметричных колебаниях круговых конических оболочек.— ПМТФ, 1973, № 2.
3. **Вахрамеев Ю. М., Корнев В. М.** О краевых задачах с малым параметром для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.— Дифференциальные уравнения, 1977, т. 13, № 7.
4. **Власов В. З.** Избранные труды. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
5. **Вишик М. И., Люстерник Л. А.** Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений.— УМН, 1960, т. 15, вып. 3.
6. **Вазов В.** Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968.
7. **Березин Н. С., Жидков Н. П.** Методы вычислений. Т. 1, 2. М.: Физматгиз, 1962.
8. **Степаненко С. В.** Определение напряженно-деформированного состояния тонких защемленных оболочек вращения.— В кн.: Материалы XVIII Всесоюз. науч. студ. конф. Математика. Новосибирск: изд. НГУ, 1980.
9. **Годунов С. К.** О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.— УМН, 1961, т. 16, вып. 3.

УДК 539.31

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ

В. М. Ермоленко, В. М. Корнев

(*Новосибирск*)

Плотность собственных чисел в задачах устойчивости оболочек положительной гауссовой кривизны рассмотрена в работах [1—3]. Была предложена интерпретация полученных результатов, позволяющая связать плотность начального участка спектра с чувствительностью оболочек к малым возмущениям в процессе эксперимента, а также к неправильностям геометрической формы оболочки. Естественным представляется исследование спектра в менее изученных задачах — задачах устойчивости оболочек отрицательной гауссовой кривизны. Наибольший интерес представляют оболочки отрицательной гауссовой кривизны, близкие к цилиндрическим.

Система уравнений устойчивости пологих оболочек, радиусы которых близки к постоянным, имеет вид [4]

$$(Eh)^{-1}\,\nabla^2\nabla^2\varphi - \Delta_k^2 w = 0,\quad D\nabla^2\nabla^2 w + \Delta_k^2\varphi = \sigma\nabla^2\nabla^2(\alpha_1 w_{,xx} + \alpha_2 w_{,yy}),$$

$$\sigma\alpha_1 = -T_1,\quad \sigma\alpha_2 = -T_2,\quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},\quad \Delta_k^2 = \frac{1}{R_2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1}\frac{\partial^2}{\partial^2 y^2},$$

где x, y — декартовы координаты; $w(x, y)$ — нормальный прогиб; $\varphi(x, y)$ — функция напряжений; T_1, T_2 — усилия в срединной поверхности оболочки; $R_1 \approx \text{const}$; $R_2 \approx \text{const}$. Собственные функции задач устойчивости шарнирно-опертых панелей имеют вид

$$\varphi(x, y) = \varphi_0 \sin k_m x \sin k_n y,$$
$$w(x, y) = w_0 \sin k_m x \sin k_n y, \quad k_n = n\pi/a, \; k_m = m\pi/b,$$
$$n, \; m = 1, \; 2, \ldots$$

Для оболочек вращения собственными функциями являются также следующие:

$$\varphi(x, y) = \varphi_0 \sin k_m x \cos k_n y, \qquad (1)$$
$$w(x, y) = w_0 \sin k_m x \cos k_n y,$$

$k_n = n/R$, $k_m = m\pi/l$, $n = 0, 1 \ldots$, $m = 1, 2, \ldots$ При $n = 0$ из соотношения (1) получаем собственные функции осесимметричной потери устойчивости. Собственные числа рассматриваемой задачи находятся по формуле

$$\lambda_{mn} = \frac{\left(k_m^2 + k_n^2\right)^4 + \varkappa^4 \left(k_m^2 + \chi k_n^2\right)^2}{\left(k_m^2 + \vartheta k_n^2\right)\left(k_m^2 + k_n^2\right)^2}, \qquad (2)$$

где $\lambda = -\sigma\alpha_1/D, \varkappa^4 = \mathrm{Eh}/DR_2^2$, $\chi = R_2/R_1$, $\vartheta = \alpha_2/\alpha_1$.

На плоскости волновых чисел k_m, k_n введем полярную систему координат

$$k_m = r\cos\theta, \; k_n = r\sin\theta \; (r \geqslant 0, \; 0 \leqslant 0 \leqslant \pi/2). \qquad (3)$$

После подстановки этих выражений для k_m, k_n в формулу (2) получим биквадратное уравнение относительно полярного радиуса r. После еще одной замены $\xi = \sin^2\theta$ $(0 \leqslant \xi \leqslant 1)$. Формула для r примет вид $(\eta = \lambda/2\varkappa^2)$

$$r_{1,2}^2 = \varkappa^2 \left\{\eta\left[1 - \xi(1-\vartheta)\right] \pm \sqrt{\eta^2\left[1 - \xi(1-\vartheta)\right]^2 - \left[1 - \xi(1-\chi)\right]^2}\right\}. \qquad (4)$$

Соотношение (4) определяет границу области Ω, внутри которой $\eta < \eta_0$. Оно имеет смысл при условии

$$\eta^2\left[1 - \xi(1-\vartheta)\right]^2 - \left[1 - \xi(1-\chi)\right]^2 \geqslant 0. \qquad (5)$$

В работе [5] число собственных значений A, меньших заданного η_0, определяется как отношение площади области Ω, внутри которой $\eta < \eta_0$, к площади одной ячейки $\Delta k_m \Delta k_n$:

$$A(\eta) = \frac{1}{\Delta k_m \Delta k_n} \iint\limits_{\Omega} dk_m dk_n. \qquad (6)$$

В системе координат (3) соотношение (6) имеет вид

$$A(\eta) = \frac{ab\varkappa^2}{\pi^2} \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \int\limits_{r_1}^{r_2} r\,dr\,d\theta.$$

После интегрирования по r и подстановки выражения (4) получим

$$A(\eta) = \frac{ab\varkappa^2}{2\pi^2} \int\limits_{S_1(\eta)}^{S_2(\eta)} \sqrt{\frac{\eta^2\left[1 - \xi(1-\vartheta)\right]^2 - \left[1 - \xi(1-\chi)\right]^2}{\xi(1-\xi)}}\, d\xi. \qquad (7)$$

Пределы интегрирования $S_1(\eta)$ и $S_2(\eta)$ определяются из условия (5). Выражение для плотности собственных чисел получаем дифференцированием (7) по параметру η:

$$N(\eta) = \frac{ab\varkappa^2}{2\pi^2} \int\limits_{S_1(\eta)}^{S_2(\eta)} \frac{\eta\left[1 - \xi(1-\vartheta)\right]^2 d\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi)\left\{\eta^2\left[1 - \xi(1-\vartheta)\right]^2 - \left[1 - \xi(1-\chi)\right]^2\right\}}}. \qquad (8)$$

Введем обозначения:

$$\xi_1 = (1-\eta)/(1-\chi-\eta(1-\vartheta)),\ \xi_2 = (1+\eta)/(1-\chi+ + \eta(1-\vartheta)).$$

Формулу (8) можем записать в виде

$$N(\eta) = \frac{ab\varkappa^2}{2\pi^2 B} I,\ I = \int\limits_{s_1(\eta)}^{s_2(\eta)} \frac{\eta\,[1-\xi(1-\vartheta)]^2\,d\xi}{\sqrt{a_0\xi(1-\xi)(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)}}, \tag{9}$$

$$B = \sqrt{|\eta^2(1-\vartheta)^2-(1-\chi)^2|}.$$

Постоянная a_0 в зависимости от знака выражения $\eta^2(1-\vartheta)^2-(1-\chi)^2$ принимает значения ± 1; интеграл I в формуле (9) — интеграл эллиптического типа, зависящий от параметра критической нагрузки η, параметра ϑ, характеризующего вид нагружения, и параметра кривизны χ. Ниже рассматриваются оболочки с кривизной $\chi < 0$, в срединной поверхности которых действуют сжимающие усилия $\vartheta > 0$. Этот интеграл приводится к нормальной форме Лежандра [6]. В общем случае его можно записать в виде

$$I = \mu[A_0K(k) + A_1E(k) + A_2\Pi(h,\ k)]. \tag{10}$$

Здесь $K(k)$, $E(k)$, $\Pi(h,\ k)$ — соответственно полные эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода; $\mu = 2/[\xi_2(1-\xi_1)]^{1/2}$; коэффициенты A_0, A_1, A_2 зависят от η, ξ_1, ξ_2, ϑ, χ. При приведении интеграла к виду (10) рассмотрим соотношения $|\chi| \leqslant \vartheta$, $|\chi| \geqslant \vartheta$. В первом случае выражения для коэффициентов A_0, A_1, A_2 следующие:

$$A_0 = 1 - \frac{(1-\vartheta)^2\xi_1^2}{2(1-h)},\ A_1 = -(1-\vartheta)^2\xi_1^2\frac{h}{2(1-h)(k^2-h)}, \tag{11}$$

$$A_2 = -2(1-\vartheta)\xi_1\left[1 - \frac{(1-\vartheta)\xi_1}{2(1-h)}\frac{h^2-2h(1+k)+3k^2}{k^2-h}\right],\ 0<\eta\leqslant\frac{|\chi|}{\vartheta},$$

а постоянные k^2 и h имеют вид

$$k^2 = (\xi_2-\xi_1)/(\xi_2(1-\xi_1)),\ h = (\xi_2-\xi_1)/\xi_2.$$

В таком же виде записываются A_0, A_1, A_2 при изменении параметра η в границах $|\chi|/\vartheta \leqslant \eta \leqslant 1$, только в этом случае $k^2 = \xi_2(1-\xi_1)/(\xi_2-\xi_1)$, $h = 1-\xi_1$. При дальнейшем возрастании параметра η получим

$$A_0 = \left[1-(1-\vartheta)\xi_1\right]^2 + \frac{(1-\vartheta)^2\xi_1}{2(1-h)},\ A_1 = (1-\vartheta)^2\xi_1^2\frac{h}{2(1-h)(k^2-h)}, \tag{12}$$

$$A_2 = 2(1-\vartheta)\xi_1\left[1-(1-\vartheta)\xi_1\frac{h^2-2h(1+k^2)+3k^2}{4(1-h)(k^2-h)}\right],\ \eta\geqslant 1,$$

причем

$$k^2 = (\xi_2-\xi_1)/(\xi_2(1-\xi_1)),\ h = 1/(1-\xi_1).$$

Аналогично получаются выражения для A_0, A_1, A_2 при условии $|\chi| \geqslant \vartheta$. Если $0 < \eta \leqslant 1$, то справедливы формулы (11). Далее эти коэффициенты принимают вид

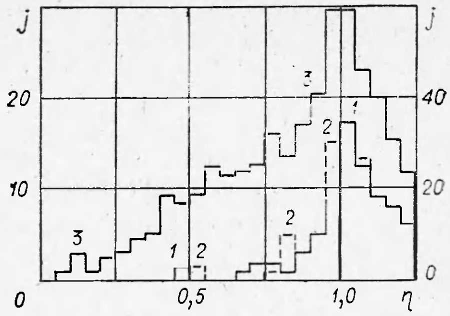
$$A_0 = [1-(1-\vartheta)\xi_1]^2 - \frac{(1-\vartheta)}{2(1-h)}[1-2\xi_1-\xi_1^2],\ A_1 =$$

$$= -\frac{(1-\vartheta)^2 h}{2(1-h)(k^2-h)}[1-2\xi_1-\xi_1^2],$$

$$A_2 = -\left\{2(1-\vartheta)[1-2\xi_1+\xi_1\vartheta] - \frac{(1-\vartheta)^2[h^2-2h(1+k^2)+3k^2]}{2(1-h)(k^2-h)}\right.,$$

$$h = \xi_2/(\xi_2-\xi_1),\ k^2 = (1-\xi_1)\xi_2/(\xi_2-\xi_1).$$

И наконец, при $\eta \geqslant |\chi|/\vartheta$ формулы для A_0, A_1, A_2 те же самые, что и в соотношениях (12).



Без вычисления эллиптических интегралов можно выделить некоторые основные свойства плотности спектра в рассматриваемых задачах. Спектр указанных задач имеет две точки сгущения, соответствующих характерным собственным числам $\eta_1 = |\chi|/\vartheta$, $\eta_2 = 1$. При $|\chi| = \vartheta$ эти точки совпадают, что приводит к резкому возрастанию плотности. Точка $\eta = 0$ является асимптотической для начала спектра. Аналогичные результаты получены в задачах колебаний оболочек отрицательной гауссовой кривизны [7].

Результаты численного эксперимента по расчету начального участка спектра по формуле (2) представлены на фигуре. Вычисленные по указанной формуле критические нагрузки упорядочивались по величине, затем группировались по интервалам длиной $\Delta\eta = 0{,}05$. Число собственных чисел, попадающих в заданный интервал, обозначено буквой j. Слева — шкала для кривых *1*, *2*, справа — для кривой *3*. Вычисления проводились при следующих значениях параметров: кривая *1* — $\chi = -0{,}005$, $\vartheta = 0{,}1$, $R/h = 400$; кривая *2* — $\chi = -0{,}01$, $\vartheta = 0{,}1$, $R/h = 400$; кривая *3* — $\chi = -0{,}333$, $\vartheta = 0{,}5$, $R/h = 1600$. На всех трех графиках хорошо выражена точка сгущения при $\eta = 1$. На кривой *3* наблюдается увеличение плотности спектра в окрестности этой точки. При дальнейшем увеличении параметра тонкостенности сгущение собственных чисел в окрестности $\eta = \eta_1$ более ярко выражено. Это связано с тем, что оценки плотности собственных чисел, полученные согласно [5], тем точнее, чем с большим числом собственных чисел мы имеем дело.

Поступила 3 III 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бендич Н. Н., Корнев В. М.** О плотности собственных значений в задачах устойчивости тонких упругих оболочек.— ПММ, 1971, т. 35, № 2.
2. **Ермоленко В. М.** О плотности собственных чисел в некоторых задачах устойчивости ортотропных оболочек.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 32. Новосибирск: изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1977.
3. **Kornev V. M., Ermolenko V. M.** Sensibility of shells to buckling disturbances in connection with parameters of critical loading spectrum.— Int. J. Engng. Sci., 1980, vol. 18.
4. **Власов В. З.** Избранные труды. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
5. **Курант Р., Гильберт Д.** Методы математической физики. Т. 1. М.— Л.: Гостехиздат, 1951.
6. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. М.: Наука, 1968.
7. **Болотин В. В.** О плотности частот собственных колебаний тонких упругих оболочек.— ПММ, 1963, т. 27, № 2.

УДК 539.3

К ЗАДАЧЕ О ВОЗБУЖДЕНИИ УПРУГИХ ВОЛН В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, СОДЕРЖАЩЕМ ГОРИЗОНТАЛЬНОЕ УПРУГОЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ

М. Г. Селезнев, Т. Н. Селезнева

(*Ростов-на-Дону*)

Предлагается метод, позволяющий произвести строгий анализ волновых полей, возбуждаемых поверхностной распределенной гармонической нагрузкой в упругом полупространстве, содержащем горизонтально расположенное упругое цилиндрическое включение. Для простоты применение метода иллюстрируется на примере ис-