

О ВЛИЯНИИ ИМПУЛЬСОВ НА РАЗВИТИЕ НАЧАЛЬНЫХ ТРЕЩИН

Г. П. Черепанов

(Москва)

В работах [1-3] экспериментально и теоретически была исследована нестационарная задача о расширении с постоянной скоростью прямолинейной трещины в однородном поле напряжений, перпендикулярных линии трещины. Решение этой задачи, очевидно, отвечает также на вопрос о влиянии импульса растягивающих напряжений, перпендикулярных линии трещины, на развитие начальной трещины в том случае, когда длина импульса постоянных напряжений велика по сравнению с линейным размером начальной трещины $2l_0$, а длина трещины после прохождения импульса велика по сравнению с длиной начальной трещины. В частности, можно определить длину трещины после прохождения импульса, умножив скорость распространения трещины, найденную в работе [3], на продолжительность импульса. Представляет интерес рассмотрение аналогичной задачи для короткого импульса напряжений, когда длина импульса сравнима с линейным размером начальной трещины. Ниже рассматривается в условиях плоской деформации нестационарная задача о расширении прямолинейной трещины под действием короткого импульса напряжений, перпендикулярных линии трещины, в том случае, когда длина трещины после прохождения импульса велика по сравнению с длиной начальной трещины.

§ 1. Постановка задачи и основные соотношения. 1°. Пусть в бесконечном однородном и изотропном идеально хрупком теле, имеющем начальную прямолинейную трещину длины $2l_0$, распространяется импульс растягивающих напряжений, перпендикулярных линии трещины, в направлении нормали к поверхности трещины. Длина импульса сравнима с линейным размером начальной трещины. Предполагается, что имеет место плоская деформация. Трещина начинает расширяться, как только импульс достигнет ее поверхности.

Решение рассматриваемой задачи можно представить в виде суммы решений двух задач: задачи о распространении импульса в безграничном пространстве без трещины и задачи о напряжениях и смещениях в бесконечном пространстве с расширяющейся прямолинейной трещиной, к поверхности которой приложены нормальные нагрузки, равные по величине и обратные по знаку соответствующим напряжениям первой задачи. Распространение трещины, очевидно, полностью определяется решением второй задачи.

Будем рассматривать движение при временах $t \gg l_0 / c_2$, когда длина трещины гораздо больше начальной длины (c_2 — скорость распространения поперечных волн). При этом можно считать, что начальная длина трещины равна нулю, а нормальная нагрузка на одном берегу трещины представляет собой δ -функцию по времени и координате вдоль трещины, причем множитель при δ -функции равен $p = 2\sigma l_0 \Delta t$, где σ — среднее напряжение в импульсе, Δt — продолжительность импульса.

Предположим, что расширение трещины происходит с постоянной скоростью V , так что полудлина трещины l определяется соотношением

$$l = Vt \quad (1.1)$$

Скорость V требуется определить в процессе решения задачи.

2°. Пусть в начальный момент времени в бесконечном покоящемся упругом пространстве действует мгновенный сосредоточенный источник типа центра растяжения в начале координат (0, 0). В обе стороны оси x начинает с постоянной скоростью V распространяться разрез $(-l, +l)$, обе поверхности которого свободны от нагрузок.

В плоской динамической задаче теории упругости составляющие смещения u и v по декартовым осям координат x и y могут быть выражены при помощи формул [4, 5]

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.2)$$

где $\varphi(x, y, t)$ и $\psi(x, y, t)$ потенциалы соответственно продольных и поперечных волн. Эти потенциалы удовлетворяют волновым уравнениям [4, 5]

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} & \quad \left(c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right) \\ \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} & \quad \left(c_2^2 = \frac{\mu}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь c_1 и c_2 — скорости продольной и поперечной волн (ρ — плотность среды, λ и μ — упругие постоянные Ляме).

Компоненты тензора напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} выражаются формулами [4, 5]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \mu \left[\left(\frac{c_1^2}{c_2^2} - 2 \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right] \\ \sigma_y &= \mu \left[\left(\frac{c_1^2}{c_2^2} - 2 \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right] \\ \tau_{xy} &= \mu \left[2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right] \end{aligned} \quad (1.4)$$

Пусть источники возмущений, действующих в бесконечном упругом пространстве, описываются потенциалами $\varphi_0(x, y, t)$ и $\psi_0(x, y, t)$.

Граничные условия задачи для верхней полуплоскости $y > 0$ и для любого момента времени $t > 0$ в силу условий симметрии запишутся в виде

$$\begin{aligned} \sigma_y &= 0, & \tau_{xy} &= 0 & \text{при } y = 0, |x| < Vt \\ v &= 0, & \tau_{xy} &= 0 & \text{при } y = 0, |x| > Vt \end{aligned} \quad (1.5)$$

Принимая во внимание формулы (1.2) и (1.4), граничные условия (1.5) принимают вид

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 (\varphi + \varphi_0)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (\psi + \psi_0)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 (\psi + \psi_0)}{\partial x^2} &= 0 & \text{при } y = 0 \\ \frac{\partial (\varphi + \varphi_0)}{\partial y} - \frac{\partial (\psi + \psi_0)}{\partial x} &= 0 & \text{при } y = 0, |x| > Vt \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\left(\frac{c_1^2}{c_2^2} - 2 \right) \left[\frac{\partial^2 (\varphi + \varphi_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\varphi + \varphi_0)}{\partial y^2} \right] + 2 \frac{\partial^2 (\varphi + \varphi_0)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 (\psi + \psi_0)}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\text{при } y = 0, |x| < Vt$$

§ 2. Решение краевой задачи. 1°. Пусть потенциалы источников, действующих в пространстве $\varphi_0(x, y, t)$ и $\psi_0(x, y, t)$, являются однородными функциями x, y, t нулевого порядка. В этом случае решение краевой задачи (1.6) для волновых уравнений (1.3) принадлежит классу функционально-инвариантных решений Смирнова — Соболева [4-6]

$$\varphi(x, y, t) = \operatorname{Re} \Phi(z_1), \quad \psi(x, y, t) = \operatorname{Re} \Psi(z_2) \quad (2.1)$$

$$\varphi_0(x, y, t) = \operatorname{Re} \Phi_0(z_3), \quad \psi_0(x, y, t) = \operatorname{Re} \Psi_0(z_4) \quad (2.2)$$

$$z_{1,3} = \frac{xt \mp iy \sqrt{t^2 - c_1^{-2}(x^2 + y^2)}}{x^2 + y^2}, \quad z_{2,4} = \frac{xt \mp iy \sqrt{t^2 - c_2^{-2}(x^2 + y^2)}}{x^2 + y^2} \quad (2.3)$$

(радикалы понимаются арифметически, индексам 1 и 2 соответствует знак минус перед радикалом, индексам 3 и 4 — знак плюс). Функции $\Phi(z_1)$, $\Psi(z_2)$, $\Phi_0(z_3)$, $\Psi_0(z_4)$ будут аналитическими функциями своих аргументов в области их комплексности.

Принимая во внимание формулы (2.1) — (2.3), можно показать, что граничные условия (1.6) формулируются в виде краевой задачи для аналитических в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$ функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$

$$\operatorname{Re} \{2z \sqrt{c_1^{-2} - z^2} [\Phi'(z) - \Phi_0'(z)] + (c_2^{-2} - 2z^2) [\Psi'(z) + \Psi_0'(z)]\} = 0 \\ \text{при } \operatorname{Im} z = 0$$

$$\operatorname{Re} \{\sqrt{c_1^{-2} - z^2} [\Phi'(z) - \Phi_0'(z)] - z [\Psi'(z) - \Psi_0'(z)]\} = 0 \\ \text{при } \operatorname{Im} z = 0, \quad |z| < V^{-1} \quad (2.4)$$

$$\operatorname{Re} \{(c_2^{-2} - 2z^2) [\Phi'(z) + \Phi_0'(z)] - 2z \sqrt{c_2^{-2} - z^2} [\Psi'(z) - \Psi_0'(z)]\} = 0 \\ \text{при } \operatorname{Im} z = 0, \quad |z| > V^{-1}$$

Здесь при $z \rightarrow \infty$ радикалы имеют порядок $-iz + O(z^{-1})$. Из первого краевого условия (2.4) получаем

$$\Psi'(z) + \Psi_0'(z) = -\frac{2z \sqrt{c_1^{-2} - z^2}}{c_2^{-2} - 2z^2} [\Phi'(z) - \Phi_0'(z)] \quad (2.5)$$

Введем функцию $F(z)$

$$\Phi'(z) - \Phi_0'(z) = F(z) (c_2^{-2} - 2z^2) \quad (2.6)$$

Функция $F(z)$ аналитична в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$ на основании формулы (2.5). Используя соотношение (2.5), для функции $F(z)$ из (2.4) можно получить краевую задачу

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F(z) &= 0 & \text{при } \operatorname{Im} z = 0, \quad |z| < c_1^{-1} \\ \operatorname{Im} F(z) &= \gamma(z) & \text{при } \operatorname{Im} z = 0, \quad c_1^{-1} < |z| < V^{-1} \\ \operatorname{Re} F(z) &= f(z) & \text{при } \operatorname{Im} z = 0, \quad |z| > V^{-1} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \sqrt{z^2 - c_1^{-2}} \gamma(z) &= -2c_2^2 \operatorname{Re} [z \Psi_0'(z)] \\ S(z) f(z) &= -2 \operatorname{Re} [(c_2^{-2} - 2z^2) \Phi_0'(z) + 2z \sqrt{c_2^{-2} - z^2} \Psi_0'(z)] \\ S(z) &= (c_2^{-2} - 2z^2)^2 + 4z^2 \sqrt{(c_2^{-2} - z^2)(c_1^{-2} - z^2)} \\ \sqrt{z^2 - c_1^{-2}} &= z + O(z^{-1}) \quad \text{при } z \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.8)$$

Решение краевой задачи (2.7) имеет следующий вид [7-9]

$$F(z) = -\frac{1}{\pi i} \sqrt{\frac{z^2 - V^{-2}}{z^2 - c_1^{-2}}} \left[i \int_{c_2^{-1} < |\tau| < V^{-1}} \sqrt{\frac{\tau^2 - c_1^{-2}}{\tau^2 - V^{-2}}} \frac{\gamma(\tau) d\tau}{\tau - z} + \right. \\ \left. + \int_{|\tau| > V^{-1}} \sqrt{\frac{\tau^2 - c_1^{-2}}{\tau^2 - V^{-2}}} \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - z} \right] \quad (2.9)$$

Здесь

$$\sqrt{z^2 - V^{-2}} / \sqrt{z^2 - c_1^{-2}} = 1 + O(z^{-2}) \quad \text{при } z \rightarrow \infty$$

Корень под интегралом $\sqrt{\tau^2 - V^{-2}} / \sqrt{\tau^2 - c_1^{-2}}$ равен значениям выбранной ветви функции $\sqrt{z^2 - V^{-2}} / \sqrt{z^2 - c_1^{-2}}$ в соответствующих точках.

2°. Формулы (2.5), (2.6), (2.9) дают решение задачи для произвольных потенциалов источников $\varphi_0(x, y, t)$ и $\psi_0(x, y, t)$, являющихся однородными функциями x, y, t . Пусть источником возмущений является мгновенный сосредоточенный в начале координат импульс интенсивности p , направленный в сторону положительной оси y (рассматривается верхняя полуплоскость $y > 0$). Потенциалы такого источника будут однородными функциями координат [4]

$$\varphi_0(x, y, t) = \frac{p}{2\pi\rho} \operatorname{Re} [iz_3], \quad \psi_0(x, y, t) = -\frac{F}{2\pi\rho} \operatorname{Re} [\sqrt{z_4^2 - c_2^{-2}}] \quad (2.10)$$

Выражения для функций $\Phi'_0(z)$ и $\Psi'_0(z)$ имеют вид

$$\Phi'_0(z) = \frac{pi}{2\pi\rho}, \quad \Psi'_0(z) = -\frac{pz}{2\pi\rho \sqrt{z^2 - c_2^{-2}}} \quad (2.11)$$

$$(\sqrt{z^2 - c_1^{-2}} = z + O(z^{-1}) \quad \text{при } z \rightarrow \infty)$$

Ограничимся случаем, когда скорость расширения разреза V меньше скорости распространения релеевских волн. Заметим, что в реальных телах осуществляется именно этот случай, так как скорость распространения трещины всегда меньше релеевской скорости [10].

В этом случае на основании соотношений (2.8) и (2.11) функции $\gamma(z)$ и $f(z)$ примут вид

$$f(z) = 0, \quad \gamma(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } c_1^{-1} < z < c_2^{-1} \\ \frac{pc_2^2 z^2}{\pi\rho \sqrt{(z^2 - c_1^{-2})(z^2 - c_2^{-2})}} & \text{при } c_2^{-1} < z < V^{-1} \end{cases} \quad (2.12)$$

Подставляя в формулы (2.9) функции $f(z)$ и $\gamma(z)$, согласно соотношениям (2.12) находим

$$F(z) = \frac{pc_2^2}{\pi\rho i} \sqrt{\frac{z^2 - V^{-2}}{z^2 - c_1^{-2}}} \left[1 - \frac{z^2}{\sqrt{(z^2 - V^{-2})(z^2 - c_2^{-2})}} \right] \quad (2.13)$$

По формулам (2.5) и (2.6) определяем исходные функции

$$\Phi'(z) = \frac{pi}{2\pi\rho} + \frac{pc_2^2}{\pi\rho i} (c_2^{-2} - 2z^2) \sqrt{\frac{z^2 - V^{-2}}{z^2 - c_1^{-2}}} \left[1 - \frac{z^2}{\sqrt{(z^2 - V^{-2})(z^2 - c_2^{-2})}} \right] \\ \Psi'(z) = \frac{2pc_2^2}{\pi\rho} z \sqrt{z^2 - V^{-2}} + \frac{pz(1 - 4c_2^2 z^2)}{2\pi\rho \sqrt{z^2 - c_2^{-2}}} \quad (2.14)$$

§ 3. Определение длины трещины после прохождения импульса. По формулам (2.14), (2.11), (2.1), (1.2) и (1.4) вычисляются напряжения и смещения в любой точке упругого тела. Для напряжений σ_y на действительной оси x найдем

при $c_1^{-1} < |z| < c_2^{-1}$ ($z = t/x$)

$$\sigma_y = \frac{pc_2^2\mu}{\pi i x^2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (c_2^{-2} - 2z^2)^2 \sqrt{\frac{z^2 - V^{-2}}{z^2 - c_1^{-2}}} \left[1 - \frac{z^2}{\sqrt{(z^2 - V^{-2})(z^2 - c_2^{-2})}} \right] \right\}$$

при $c_2^{-1} < |z| < V^{-1}$ ($z = t/x$)

(3.1)

$$\sigma_y = \frac{pc_2^2\mu}{\pi i x^2} \left\{ \frac{zS(z)}{\sqrt{(z^2 - c_1^{-2})(z^2 - V^{-2})}} + \sqrt{z^2 - V^{-2}} \frac{\partial}{\partial z} \frac{S(z)}{\sqrt{z^2 - c_1^{-2}}} \right\}$$

Здесь $S(z)$ определяется формулой (2.8).

Введем в рассмотрение силы сцепления, действующие в концевой области трещины. Относительно концевой области и распределения сил сцепления в ней сделаем общие предположения, принятые в работе [3]. При этом напряжение $\sigma_y^{(1)}$ от действия сил сцепления в окрестности конца движущейся трещины на ее продолжении оказывается равным [3]

$$\sigma_y^{(1)} = -\frac{R}{\pi} \sqrt{\frac{t}{s}} \quad (3.2)$$

Здесь R — постоянная характеристика материала, s — малое расстояние от конца трещины.

Согласно формуле (3.1), распределение растягивающих напряжений σ_y , вычисленных без учета сил сцепления, на продолжении трещины вблизи ее конца имеет вид

$$\sigma_y = -\frac{pc_2^2\mu}{\sqrt{2}\pi V^{3/2}t^2} \frac{S(V^{-1})}{\sqrt{V^{-2} - c_1^{-2}}} \sqrt{\frac{t}{s}} \quad (3.3)$$

Потребуем конечности напряжений на конце распространяющейся трещины. Отсюда на основании формул (3.2) и (3.3) получаем основное соотношение

$$\tau^2 = \frac{A(m, \nu)}{m^{3/2} \sqrt{1 - m^2} (1 - 2\nu) / 2(1 - \nu)} \quad (3.4)$$

Здесь

$$\tau = \sqrt{\frac{R \sqrt{c_2}}{2 \sqrt{2} p}} t, \quad m = \frac{V}{c_2}$$

$$A(m, \nu) = \sqrt{(1 - m^2) \left[1 - \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} m^2 \right]} - \left(1 - \frac{m^2}{2} \right)^2$$

(ν — коэффициент Пуассона)

Соотношение (3.4) определяет скорость трещины в зависимости от времени. Таким образом, получается противоречие с исходным предположением о постоянстве во времени скорости расширения трещины. Это указывает на приближенность излагаемого решения задачи, связанную с начальным предположением о постоянстве скорости трещины. Однако такой квазидинамический метод решения задачи может оказаться весьма полезным (и, по-видимому, пока единственно возможным) для оценки длины трещины, получающейся после прохождения короткого импульса.

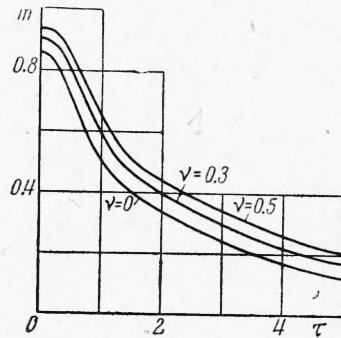
На фигуре приведен вычисленный по формуле (3.4) график зависимости безразмерной скорости m от безразмерного времени τ для не-

скольких значений коэффициента Пуассона. Кривые пересекают ось m в точках $m = c_R / c_2$, где c_R — скорость распространения волн Рэлея. Начиная с $\tau \sim 4$, кривые выходят на асимптоты

$$m = [4(1 - \nu)]^{-2/5} \tau^{-1/5} \quad (3.5)$$

Развитие концевой области трещины продолжается, пока ее сопротивление не достигает некоторого максимума, соответствующего статической трещине [3]. Как известно [11], напряжение σ_y в окрестности конца статической трещины на ее продолжении имеет вид

$$\sigma_y = \frac{K}{\pi \sqrt{s}} \quad (3.6)$$



Здесь K — модуль сцепления [11], s — малое расстояние от конца трещины. Таким образом, на основании (3.2) и (3.6) развитие трещины продолжается до момента времени порядка

$$t^* = K^2 R^{-2} \quad (\tau^* = 2^{-3/5} c_2^{1/5} K^2 R^{-3/2} p^{-1/2}) \quad (3.7)$$

Длина трещины l^* после прохождения импульса определяется по формуле

$$l^* = \int_0^{t^*} V(t) dt = 2^{3/4} \sqrt{\frac{pc_2^{3/2}}{R}} \int_0^{\tau^*} m(\tau, \nu) d\tau \quad (3.8)$$

Интегрирование в формуле (3.8) удобно производить графически. При $\tau^* \gtrsim 4$ можно получить следующую приближенную формулу, определяющую длину трещины l^*

$$l^* = 2^{3/4} p^{1/2} c_2^{3/4} R^{-1/2} \left\{ \int_0^4 m(\tau, \nu) d\tau + 5 [4(1 - \nu)]^{-2/5} [(\tau^*)^{1/5} - 1.32] \right\} \quad (3.9)$$

Приведем пример. Пусть в толстой пластинке из материала типа CR-39, использованного в работе Уэллса и Поста [1], имеется начальная трещина длины $2l_0 = 1$ см. В направлении, перпендикулярном линии трещины, распространяется импульс растягивающих нормальных к трещине напряжений $\sigma = 10^3$ кг·см⁻² продолжительностью $\Delta t = 10^{-5}$ сек, так что интенсивность импульса, вызывающего расширение трещины, равна $p = 2\sigma l_0 \Delta t = 10^{-2}$ кг·сек·см⁻¹. Постоянные K и R , характеризующие сопротивление хрупкого тела разрыву, для материала CR-39 можно принять [1, 11] равными $K = 10^2$ кг·см^{-3/2}, $R = 1.6 \cdot 10^3$ кг·см^{-3/2}·сек^{-1/2}. По формулам (3.7) и (3.9) находим величину $\tau^* = 15.6$ и длину трещины после прохождения импульса $l^* = 95$ см.

Второй член под фигурной скобкой в формуле (3.9) представляет собой функцию, слабо зависящую от p и c_2 ($\sim p^{-1/10} c_2^{1/20}$). Поэтому приближенно можно считать, что длина трещины l^* после прохождения импульса прямо пропорциональна корню квадратному из произведения интенсивности импульса p на скорость распространения поперечных волн c_2 в степени $3/2$

$$l^* \sim \sqrt{pc_2^{3/2}} \quad (3.10)$$

Формулу (3.10) можно получить также из соображений анализа размерностей, если принять, что длина трещины l^* после прохождения импульса

зависит от интенсивности импульса p , скорости распространения поперечных волн c_2 и констант материала R и ν .

В связи с результатом (3.10) естественно предположить, что аналогичная зависимость будет иметь место для радиуса r разрушения идеально хрупкого бесконечного тела, вызванного осесимметричным взрывом интенсивности $p = 2\pi r_0 q \Delta t$ (r_0 — радиус начального отверстия, в которое заложен цилиндрический заряд; q и Δt — среднее давление в полости во время взрыва и продолжительность взрыва), причем предполагается, что радиус разрушения r гораздо больше радиуса начального отверстия r_0

$$r \sim \sqrt[3]{pc_2^{3/2}}$$

Заметим, что рассматриваемое явление значительно усложняется вследствие ветвления трещины, которое происходит при скоростях, больших некоторой критической [10] скорости (меньшей скорости распространения волн Релея).

Автор благодарен Г. И. Баренблатту за высказанные им замечания.

Поступила 15 IX 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Wells A. A., Post D. The dynamic stress distribution surrounding a running crack,— a photoelastic analysis. Proc. Soc. Exper. Stress Analysis, 1958, vol. 16, No. 1.
2. Groberg K. B. The propagation of a brittle crack. Arkiv för Fysik, 1960, vol. 18, p. 159.
3. Баренблатт Г. И., Салганик Р. Л., Черепанов Г. П. О неустановившемся распространении трещин. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 2, стр. 328—334.
4. Соболев С. Л. Некоторые вопросы теории распространения колебаний. В кн.: Франк Ф. и Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.—Л., ОНТИ, 1937.
5. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 3, ч. 2. М., Физматгиз, 1958.
6. Smirnoff V., Sobleff S. Sur une méthode nouvelle dans le problème plan des vibrations élastiques. Тр. Сейсмол. ин-та, 1931, № 20.
7. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.—Л., Физматгиз, 1958.
8. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения, М., Физматгиз, 1962.
9. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1958.
10. Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П. О расклинивании хрупких тел. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 4.
11. Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1961, № 4, стр. 3—56.