О СОРБЦИИ В ПЛОСКО-РАДИАЛЬНОМ ФИЛЬТРАЦИОННОМ ПОТОКЕ

М. И. Швидлер

(Уфа)

Как известно, процесс фильтрации частиц примеси всегда сопровождается явлением сорбции, оказывающим в ряде случаев серьезное влияние на пространственно-временное распределение частиц в потоке. Внедрение в практику добычи нефти некоторых технологических процессов (например, «облагораживание» закачиваемой в пласт воды поверхностно-активными веществами) требует количественной оценки эффекта сорбции. Ниже приводятся две формы точного решения задачи о сорбции в плоско-радиальном потоке.

Отметим, что известен ряд результатов [1–7], полученных при рассмотрении сорбции в одномерном фильтрационном потоке. Рассматриваемая задача, кроме иной геометрии потока, отличается от указанных исследований учетом зависимости кинетики сорбции от скорости фильтрации.

1. Пренебрегая продольной и «конвективной» диффузией частиц, можно записать уравнение неразрывности радиального потока сорбтива в виде

$$m\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{Q}{2\pi r}\frac{\partial c}{\partial r}+\frac{\partial a}{\partial t}=0 \qquad (1.1)$$

Здесь $c\,(r,\,t)$ — концентрация сорбтива в жидкости, $a\,(r,\,t)$ — адсорбция, Q — объемный расход жидкости через произвольный цилиндр радиуса r, m — пористость сорбента.

Как обычно, уравнение кинетики примем в виде [1–3]

$$\partial a/\partial t=\beta\,(c-c^*) \qquad (1.2)$$

Здесь β — кинетический коэффициент, c^* — концентрация, равновесная адсорбции a.

Если концентрация сорбтива невелика, естественно считать связь между a и c^* линейной, т. е. соответствующей изотерме Генри

$$a=\Gamma c^* \quad (\Gamma \text{ — постоянная Генри}) \qquad (1.3)$$

Согласно экспериментам Л. И. Рубинштейна [5] с кальциевым и натриевым растворами ДС (детергент советский) и опытам, проведенным в Уфимском нефтяном н.-и. институте Л. Н. Малышевой с водными растворами поверхностно-активного вещества ОП-10, кинетический коэффициент β линейно зависит от скорости фильтрации v

$$\beta=\lambda v \qquad (1.4)$$

или, так как в нашем случае $v=Q\,/\,2\pi r$,

$$\beta=\lambda Q/2\pi r \qquad (1.5)$$

Пусть через скважину радиуса r_0 в момент времени $t=0$ начинается закачка сорбтива концентрации c_0. Будем, кроме того, считать, что в начальный момент сорбтив отсутствует как в жидкой фазе, так и в адсорбированном состоянии. Тогда к уравнениям (1.1) — (1.5) следует добавить условия

$$c(r,\,0)=0,\qquad a(r,\,0)=0,\qquad c(r_0,\,t)=c_0 \qquad (1.6)$$

2. Произведем в уравнениях (1.1) — (1.5) замену переменных

$$\tau=t-\frac{m\pi\,(r^2-r_0{}^2)}{Q},\qquad \xi=r \qquad (2.1)$$

что соответствует отсчету времени в каждой точке пространства с момента подхода к ней переднего фронта сорбционной волны. Очевидно, что $c\,(\xi,\,\tau)$ и $a\,(\xi,\,\tau)$ отличны от нуля лишь при $\tau\geqslant 0$. Теперь система (1.1) — (1.5) примет вид

$$\frac{Q}{2\pi\xi}\frac{\partial c}{\partial\xi}+\frac{\partial a}{\partial\tau}=0,\qquad \frac{\partial a}{\partial\tau}=\frac{\lambda Q}{2\pi\xi}\,(c-\Gamma^{-1}a) \qquad (2.2)$$

Исключив из нее функцию $a\,(\xi,\,\tau)$, получим для безразмерной концентрации $u\,(\xi,\,\tau)=c\,(\xi,\,\tau)\,/\,c_0$ уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\tau}+\lambda\left[\frac{\partial u}{\partial\tau}+\frac{1}{\nu\xi}\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]=0 \qquad \nu=\frac{2\pi\Gamma}{\lambda Q} \qquad \begin{pmatrix}0<\tau<\infty\\ \xi_0<\xi<\infty\end{pmatrix} \qquad (2.3)$$

К нему следует присоединить условия, вытекающие из (1.6) и (2.2)

$$u\,(\xi_0,\,\tau)=1,\qquad u\,(\xi,\,0)=e^{-\lambda\,(\xi-\xi_0)} \qquad (2.4)$$

Нетрудно убедиться, что, поскольку условия (2.4) заданы на характеристиках уравнения (2.3) — прямых $\xi = \mathrm{const}$, $\tau = \mathrm{const}$, сформулированная задача является задачей Гурса для уравнения (2.3). Как известно, согласованность начального и краевого условий в точке ($\xi = \xi_0$, $\tau = 0$) обеспечивает существование и единственность решения задачи (2.3), (2.4).

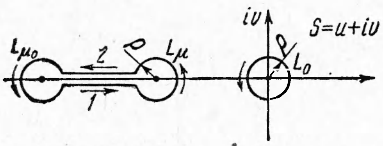
3. Для решения задачи используем преобразование Лапласа

$$U(\xi, s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} u(\xi, \tau)\, d\tau \tag{3.1}$$

Применив (3.1) к уравнению (2.3) и условиям (2.4), получим после интеграции обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка для $U(\xi, s) \doteq u(\xi, \tau)$

$$U(\xi, s) = F(\xi, s)\, e^{-\lambda(\xi-\xi_0)}$$

$$F(\xi, s) = \frac{1}{s}\left[\frac{1+\nu\xi s}{1+\nu\xi_0 s}\right]^{\lambda/\nu s} \tag{3.2}$$



Фиг. 1

Согласно формуле обращения Римана — Меллина, запишем

$$u(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{s\tau} U(\xi, s)\, ds \tag{3.3}$$

Поскольку функция $u(\xi, \tau) \leqslant 1$, показатель ее роста $\alpha' = 0$, и, следовательно, в качестве абсциссы интегрирования α может быть выбрано произвольное положительное число. Введем представление

$$F(\xi, s) = \frac{1}{s} \exp\left\{\frac{\lambda}{\nu s}\left[\ln\frac{\xi}{\xi_0} + \ln(s+\mu) - \ln(s+\mu_0)\right]\right\} \tag{3.4}$$

$$\left(\mu = \frac{1}{\nu\xi}, \quad \mu_0 = \frac{1}{\nu\xi_0}, \quad \mu \leqslant \mu_0\right)$$

Нетрудно увидеть, что особыми точками $U(\xi, s)$ будут

(1) $s = 0$ — простой полюс

(2) $s = -\mu$
(3) $s = -\mu_0$ $\Big\}$ — логарифмические точки разветвления (3.5)

Таким образом, функция $F(\xi, s)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} s < \alpha$, если из нее исключить полюс $s = 0$ и отрезок действительной оси $(-\mu_0, -\mu)$, включая концы его. Очевидно, однозначность $F(\xi, s)$ левее точки $s = -\mu_0$ обеспечивается наличием двух точек разветвления. Поскольку лемма Жордана при $\tau > 0$ выполняется, прямую интегрирования в (3.3) заменим контуром $L = L_0 + L_{\mu_0} + L_\mu + 1 + 2$, указанным на фиг. 1.

Очевидно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} e^{s\tau} F(\xi, s)\, ds = e^{\lambda(\xi-\xi_0)}, \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{\mu_0}} e^{s\tau} F(\xi, s)\, ds \to 0 \tag{3.6}$$

при L_{μ_0}, стягивающемся в точку.

Далее, на верхнем берегу разреза *1* переменная $s = xe^{i\pi}$ $(\mu_0 \geqslant x \geqslant \mu + \rho)$ и

$$J^{(1)} = \frac{1}{2\pi i}\int_1 e^{s\tau} F(\xi, s)\, ds = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mu+\rho}^{\mu_0} \frac{e^{-x\tau}}{x}\left[\frac{\xi(x-\mu)}{\xi_0(\mu_0-x)}\right]^{-\lambda/\nu x} \exp\frac{i\pi\lambda}{\nu x}\, dx \tag{3.7}$$

На нижнем берегу *2* переменная $s = xe^{-i\pi}$ и

$$J^{(2)} = \frac{1}{2\pi i}\int_2 e^{s\tau} F(\xi, s)\, ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mu+\rho}^{\mu_0} \frac{e^{-x\tau}}{x}\left[\frac{\xi(x-\mu)}{\xi_0(\mu_0-x)}\right]^{-\lambda/\nu x} \exp\frac{-i\pi\lambda}{\nu x}\, dx \tag{3.8}$$

Сумма интегралов запишется

$$J^{(1)+(2)} = -\frac{1}{\pi}\int_{\mu+\rho}^{\mu_0} \frac{e^{-x\tau}}{x}\left[\frac{\xi(x-\mu)}{\xi_0(\mu_0-x)}\right]^{-\lambda/\nu x} \sin\frac{\pi\lambda}{\nu x}\, dx \tag{3.9}$$

На контуре L_μ переменная $s = -\mu + \rho e^{i\varphi}$ $(-\pi < \varphi < \pi)$ и

$$J_\mu = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_\mu} e^{s\tau} F(\xi, s)\, ds = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho e^{\tau s}}{-\mu + \rho e^{i\varphi}}\left[\frac{\xi\rho e^{i\varphi}}{\xi_0(\mu_0 - \mu + \rho e^{i\varphi})}\right]^{\lambda/\nu s} e^{i\varphi}\, d\varphi \tag{3.10}$$

При $\lambda\xi < 1$ законен переход к пределу под знаком интеграла (3.10) при $\rho \to 0$, что дает

$$\lim J_\mu = 0 \tag{3.11}$$

Интеграл (3.9) при $\lambda\xi < 1$ также сходится, и решение в этом случае имеет вид

$$u(\xi, \tau) = 1 - \frac{e^{-\lambda(\xi - \xi_0)}}{\pi}\int\limits_{\mu}^{\mu_0} \frac{e^{-x\tau}}{x}\left[\frac{\xi(x - \mu)}{\xi_0(\mu_0 - x)}\right]^{-\lambda/\nu x} \sin\frac{\pi\lambda}{\nu x}\, dx \tag{3.12}$$

Пусть теперь $\lambda\xi > 1$. Перейдем в (3.10) формально к пределу, сохранив лишь главный член

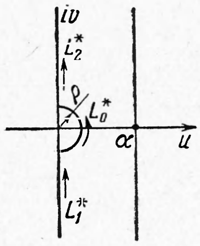
$$\lim_{\rho\to 0} J_\mu = \frac{e^{-\mu\tau}\rho^{1-\lambda\xi}}{\pi\mu(\lambda\xi - 1)}\left[\frac{\xi}{\xi_0(\mu_0 - \mu)}\right]^{-\lambda\xi} \sin\pi\lambda\xi \tag{3.13}$$

Выделяя также главную часть расходящегося при $\lambda\xi > 1$ интеграла $J^{(1)+(2)}$, можно написать

$$\lim J^{(1)+(2)} = -\frac{e^{-\mu\tau}\rho^{1-\lambda\xi}}{\pi\mu(\lambda\xi - 1)}\left[\frac{\xi}{\xi_0(\mu_0 - \mu)}\right]^{-\lambda\xi} \sin\pi\lambda\xi \tag{3.14}$$

Таким образом,

$$\lim_{\rho\to 0} J_\mu + \lim_{\rho\to 0} J^{(1)+(2)} = 0 \tag{3.15}$$



Фиг. 2

Удерживая аналогично расходимости менее высоких порядков, получим, что и члены порядка $\rho^{2-\lambda\xi}$, $\rho^{3-\lambda\xi}$ и т. д. взаимно уничтожаются. Если $\lambda\xi \neq n$ — целому числу, то пропадут все члены J_μ, что приведет к сходимости выражения $J_\mu + J^{(1)+(2)}$. Иными словами, $(J_\mu + J^{(1)+(2)})$ есть регуляризация интеграла (3.12), расходящегося при $\lambda\xi > 1$. Таким образом, при произвольном $\lambda\xi$ решение можно записать в виде

$$u(\xi, \tau) = 1 - \frac{e^{-\lambda(\xi - \xi_0)}}{\pi} R_\mu \int\limits_{\mu}^{\mu_0} \frac{e^{-x\tau}}{x}\left[\frac{\xi(x - \mu)}{\xi_0(\mu_0 - x)}\right]^{-\lambda/\nu x} \sin\frac{\pi\lambda}{\nu x}\, dx \tag{3.16}$$

Здесь R_μ — символ регуляризации интеграла на нижнем пределе μ. Очевидно, что при $\lambda\xi < 1$ регуляризация тривиальна. Особенность подынтегральной функции имеет вид $(x - \mu)^{-\lambda/\nu x}$ при $x \to \mu$, поэтому можно написать

$$z^{-\frac{\lambda\xi}{1 + z\mu^{-1}}} = z^{-\lambda\xi(1 - z\mu^{-1} + \cdots)} = z^{-\lambda\xi}\left(1 + \frac{\lambda\xi}{\mu} z\ln z + \cdots\right)(1 + \cdots) \tag{3.17}$$

т. е. регуляризуемая функция представима в виде суммы степенных регуляризаций с понижающейся степенью от $\lambda\xi$ до некоторого $\theta < 1$. Метод регуляризации функций со степенными особенностями описан в [8].

К сожалению, для достаточно больших $\lambda\xi$ процесс регуляризации приводит к весьма громоздким формулам, численный анализ которых затруднителен.

4. Для получения $u(\xi, \tau)$ в более удобной для счета форме рассмотрим контур интегрирования L^*, представленный на фиг. 2. Нетрудно убедиться, что в области, лежащей между L^* и прямой интегрирования $\operatorname{Re} s = \alpha$, функция $F(\xi, s)$ аналитична, условия леммы Жордана также выполнены и, следовательно,

$$u(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L^*} e^{s\tau} U(\xi, s)\, ds \tag{4.1}$$

Положив на L_1^* для $s = -ix$, где $\rho \leqslant x < \infty$, получим

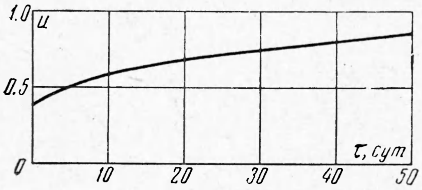
$$J_{L_1^*} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\infty}^{\rho} e^{-ix\tau}\left[\frac{1 - i\xi\nu x}{1 - i\xi_0\nu x}\right]^{-\lambda/i\nu x} \frac{dx}{x} \tag{4.2}$$

Аналогично на $L_2{}^*$ имеем $s = ix$ и

$$J_{L_2^*} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\rho}^{\infty} e^{ix\tau}\left[\frac{1+i\xi\nu x}{1+i\xi_0\nu x}\right]^{\lambda/i\nu x}\frac{dx}{x} \tag{4.3}$$

Интеграл по полуокружности радиуса ρ равен половине вычета функции F (ξ, s в точке $s = 0$ и, следовательно, имеет вид

$$J_{L_3^*} = {}^1/_2 e^{\lambda(\xi-\xi_0)} \tag{4.4}$$



Фиг. 3

Обозначив

$$1 + i\xi\nu x = R_1 e^{i\varphi_1} \qquad (R_1 = (1 + \xi^2\nu^2x^2)^{1/2}$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arc\,tg} \xi\nu x) \tag{4.5}$$

$$1 + i\xi_0\nu x = R_2 e^{i\varphi_2} \qquad (R_2 = (1 + \xi_0{}^2\nu^2x^2)^{1/2}$$

$$\varphi_2 = \operatorname{arc\,tg} \xi_0\nu x)$$

и сложив (4.2), (4.3) и (4.4), получим после упрощений

$$u(\xi, \tau) = \frac{1}{2} + \frac{e^{-\lambda(\xi-\xi_0)}}{\pi}\int\limits_0^\infty \exp\frac{\lambda(\varphi_1-\varphi_2)}{\nu x}\sin\left(x\tau - \frac{\lambda R}{\nu x}\right)\frac{dx}{x} \qquad \left(R = \ln\frac{R_1}{R_2}\right) \tag{4.6}$$

В случае точечного источника ($\xi_0 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $R_2 = 1$, $\varphi = \varphi_1$, $R = \ln R_1$) имеем

$$u(\xi, \tau) = \frac{1}{2} + \frac{e^{-\lambda\xi}}{\pi}\int\limits_0^\infty \exp\frac{\lambda\varphi}{x}\sin\left(\frac{x\tau}{\nu} - \frac{\lambda R}{x}\right)\frac{dx}{x} \tag{4.7}$$

Нетрудно проверить, что сходимость интегралов (4.6) и (4.7) обеспечена, так как при $x = 0$ и $x = \infty$ подынтегральная функция ведет себя как $x^{-1}\sin kx$.

Для числовых расчетов промежуток интегрирования удобно разбить на два — $(0, A)$ и (A, ∞) такие, чтобы интеграл по второму можно было отбросить либо оценить по таблицам интегрального синуса. Численное интегрирование в первом промежутке при больших τ / ν удобно проводить по формулам Филона [9].

Для примера на фиг. 3 приведены результаты расчета $u(\tau)$ по формуле (4.7) для случая $\xi = 10$ *м*, $\lambda = 0.1$ *м*$^{-1}$, $\nu = 4$ *сутки / м*.

Поступила 4 XI 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуховицкий А. А., Забежинский Я. Л., Тихонов А. Н. Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала. I. Ж. физ. химии, 1945, т. 19, № 6.
2. Тихонов А. Н., Жуховицкий А. А., Забежинский Я. Л. Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала. II. Ж. физ. химии, 1946, т. 20, № 10.
3. Забежинский Я. Л., Жуховицкий А. А., Тихонов А. Н. Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала. III. Ж. физ. химии, 1949, т. 23, № 2.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Гостехиздат, 1951.
5. Рубинштейн Л. И. К вопросу о применении поверхностно-активных веществ с целью снижения остаточной нефтенасыщенности пластов при их заводнении. Нефт. х-во, 1953, № 11—12.
6. Самарский А. А., Фомин С. В. О математическом изучении процессов сорбции и десорбции газов (квазистационарный случай). Научн. докл. высшей школы, Физика, математика, 1958, № 6.
7. Бондарев Э. А., Николаевский В. Н. Конвективная диффузия в пористых средах с учетом явления адсорбции. ПМТФ, 1962, № 5.
8. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. Физматгиз, 1958.
9. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике. Гостехиздат, 1956.