

УДК 532.529

## Спектральная модель диффузии тяжелой инерционной примеси в случайном поле скорости сплошной среды\*

И.В. Деревич

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

E-mail: DerevichIgor@bmstu.ru

На основе спектрального разложения корреляции Эйлера несущей среды получена система замкнутых функциональных уравнений для спектров Лагранжа тяжелой инерционной частицы и флуктуаций скорости несущей среды на траектории частицы. При расщеплении четвертых моментов используются приближение квазинормальности и аппроксимация флуктуаций скорости частиц случайным процессом Гаусса. Предложен приближенный самосогласованный метод решения полученной системы функциональных уравнений. Спектр корреляций Эйлера флуктуаций скорости среды моделируется распределениями Сэфмена и Кармана. Исследовано влияние пространственной микроструктуры турбулентности, инерции частиц и скоростного скольжения на интенсивность хаотического движения и коэффициент турбулентной диффузии дисперсной примеси.

**Ключевые слова:** турбулентность, дисперсный поток, турбулентный спектр, инерция частиц, корреляции Лагранжа и Эйлера, спектр Кармана, спектр Сэфмена.

### Введение

Дисперсные турбулентные потоки встречаются во многих природных явлениях и широко используются в технических приложениях [1, 2]. Новое направление применения дисперсных систем в случайных гидродинамических полях — пылевая плазма (см., например, [3]). Дисперсные турбулентные потоки интенсивно изучаются современными экспериментальными методами [4] и методами численного моделирования [5–15].

Теоретические методы исследования дисперсных турбулентных потоков можно разделить на два принципиально различных подхода: с использованием переменных Лагранжа или Эйлера. Расчеты траекторий отдельных частиц путем прямого численного моделирования турбулентности по методу Лагранжа позволяют качественно исследовать эффекты кластеризации частиц, столкновения частиц, влияния частиц на турбулентные характеристики несущего потока, изменения реологии двухфазной среды в результате коллективного гидродинамического взаимодействия частиц примеси. Однако информацию, получаемую в результате подобных трудоемких расчетов, затруднительно применять в инженерных приложениях. Поэтому в настоящее время основной подход, позволяющий моделировать сложные гидродинамические течения дисперсных турбулентных потоков, использует переменные Эйлера (см., например, [1, 2, 16, 17]).

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 14-08-00970).

Прогнозирующее свойство моделей в переменных Эйлера зависит от корректности замыкающих соотношений, связанных с дисперсной фазой. Определяющее значение имеют интенсивность хаотического движения и коэффициент турбулентной диффузии дисперсной примеси. Источником случайного движения частиц является их взаимодействие с турбулентными вихрями. В неоднородных потоках вклад в турбулентную энергию дисперсной фазы дают также процессы порождения из осредненного движения, диффузия и конвективный перенос.

Для турбулентных потоков вдали от омываемой поверхности характерные масштабы изменения осредненных параметров потока существенно превосходят внутренние масштабы турбулентности. Поэтому исследование процесса вовлечения частиц в турбулентное движение несущей среды и явлений макроэффектов, связанных с неоднородностью потока, можно проводить независимо.

От точности моделирования источника хаотического движения частиц зависят в конечном итоге уровень турбулентной энергии и величина коэффициента турбулентной диффузии дисперсной примеси. Настоящая работа посвящена учету инерции частиц, скорости осредненного скольжения и изучению влияния пространственно-временной структуры турбулентных вихрей на процесс передачи турбулентной энергии несущей среде частицам. Аналитическое исследование проводится в приближении однородного потока.

Степень вовлечения частиц в турбулентное движение определяется корреляцией скорости несущей среды вдоль траектории частицы. Традиционный подход основан на одноточечной аппроксимации корреляции скорости несущей среды вдоль траектории частицы [1, 2, 16–18, 19]. В этом случае полностью игнорируется пространственная микроструктура случайных флуктуаций скорости несущей среды [20, 21] и существенное отличие между масштабами Лагранжа и Эйлера турбулентности [22]. Кроме того, при одноточечной аппроксимации учет осредненного скольжения частиц осуществляется на основе полуэмпирических соотношений, заимствованных из литературных источников [23, 24]. Полученные таким образом формулы не самосогласованы и не универсальны.

Учет пространственно-временной микроструктуры случайного поля среды и различия во временных масштабах Лагранжа и Эйлера имеют принципиальное научное и практическое значение. В настоящей работе привлекается метод исследования, основанный на спектральном представлении пространственно-временной микроструктуры турбулентного поля. Следует отметить, что техника работы со спектральными разложениями существенно упрощает процедуру получения новых результатов.

В рамках спектрального подхода на основе корреляции Эйлера несущей среды получена замкнутая система самосогласованных функциональных уравнений для корреляции Лагранжа инерционной тяжелой частицы и корреляции скорости среды на ее траектории. Спектр Эйлера несущей среды надежно регистрируется измерительной аппаратурой и может быть получен в рамках теоретических исследований (см., например, [25]).

Настоящая работа является обобщением работы [26]. В предлагаемой работе последовательно реализован спектральный подход для вычисления параметров хаотического движения частиц, получены новые результаты, иллюстрирующие связь коэффициента турбулентной диффузии примеси с внутренней микроструктурой турбулентности. Проведен анализ и установлены границы применимости теоремы Чена о коэффициенте турбулентной диффузии примеси инерционных частиц [19, 27, 28]. На основе аппроксимаций Сэфмена и Кармана проиллюстрировано влияние различных форм спектра, инерции частиц, осредненного скольжения фаз и микроструктуры случайного поля скорости среды на интенсивность хаотического движения частиц и коэффициент турбулентной диффузии дисперсной примеси. Показано, что в отсутствии массовых сил коэффициент стационарной турбулентной диффузии инерционных частиц выше, чем

коэффициент диффузии пассивной примеси. Этот эффект объясняется пространственной микроструктурой случайного поля скорости среды, приводящей к различию во временных интегральных масштабах Лагранжа и Эйлера.

### 1. Корреляция Лагранжа частицы

Рассматриваются сферические частицы, движущиеся под действием силы вязкого трения и массовой силы. Размер частиц существенно меньше, чем минимальный пространственный масштаб флуктуаций скорости среды. Однако масса частиц достаточно велика, чтобы можно было пренебречь молекулярной диффузией по сравнению с хаотическим перемещением частиц вследствие флуктуаций скорости. Массовая концентрация дисперсной примеси незначительна и не оказывает влияния на энергетические параметры случайного поля скорости несущей среды. Столкновения частиц маловероятны и не учитываются. Осредненная скорость потока несущей фазы считается однородной в пространстве и стационарной.

Уравнения движения частицы в системе координат, движущейся с осредненной скоростью потока, имеют вид:

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_p} [\mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) - \mathbf{v}(t)], \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{v}(t) + \mathbf{W}, \quad (2)$$

где  $\tau_p$  — время динамической релаксации частицы,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  — флуктуации скорости несущего потока,  $\mathbf{v}(t)$  — флуктуации скорости частицы,  $\mathbf{X}(t)$  — случайное смещение частицы,  $\mathbf{W} = \tau_p \mathbf{g}$  — осредненная скорость скольжения частицы в результате действия массовой силы,  $\mathbf{g}$  — ускорение массовой силы.

Осреднение флуктуаций скоростей частиц и среды по ансамблю реализаций случайного потока приводит к равенствам  $\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle \mathbf{v}(t) \rangle = 0$ , где угловыми скобками обозначен результат осреднения.

Флуктуации скорости среды моделируются статистически стационарным и статистически однородным в пространстве случайным полем. Корреляция флуктуаций скорости в переменных Эйлера имеет вид:

$$\langle u_i(\mathbf{x}', s') u_j(\mathbf{x}'', s'') \rangle = \langle u^2 \rangle \Psi_{ij}^E(\mathbf{x}, s), \quad \Psi_{ij}^E(\mathbf{0}, 0) = \delta_{ij},$$

здесь  $\langle u^2 \rangle = \sum_{i=1}^3 \langle u_i^2 \rangle / 3$  — средний квадрат дисперсии скорости среды,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}''$  — относительное расстояние,  $s = s' - s''$  — относительное время,  $\Psi_{ij}^E(\mathbf{x}, s)$  — автокорреляционная функция.

Для изотропной турбулентности двухточечная, двухвременная автокорреляционная функция флуктуаций скорости записывается по аналогии с одновременной корреляцией скорости [25]:

$$\Psi_{ij}^E(\mathbf{x}, s) = \left[ \Psi_{LL}^E(\mathbf{x}, s) - \Psi_{NN}^E(\mathbf{x}, s) \right] \frac{x_i x_j}{x^2} + \Psi_{NN}^E(\mathbf{x}, s) \delta_{ij},$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера,  $x = |\mathbf{x}|$  — модуль вектора,  $\Psi_{LL}^E$ ,  $\Psi_{NN}^E$  — продольная и поперечная по отношению к вектору  $\mathbf{x}$  автокорреляционные функции.

В дальнейшем будут представлять интерес энергетические параметры стохастического движения частиц. Определим осредненную по различным направлениям автокорреляционную функцию Эйлера  $\Psi_E(\mathbf{x}, s)$  как

$$\langle u_i(\mathbf{x}', s') u_j(\mathbf{x}'', s'') \rangle = \langle u^2 \rangle \Psi_E(\mathbf{x}, s) \delta_{ij}, \quad \Psi_E(\mathbf{0}, 0) = 1. \quad (3)$$

Между введенной функцией  $\Psi_E(\mathbf{x}, s)$ , продольной и поперечной автокорреляционными функциями существует связь:

$$\Psi_E(\mathbf{x}, s) = (\Psi_{LL}^E(\mathbf{x}, s) + 2\Psi_{NN}^E(\mathbf{x}, s)) / 3.$$

Выражение для актуальной скорости частицы следует из уравнения (1):

$$\mathbf{v}(t) = \frac{1}{\tau_p} \int_0^t e^{-(t-s)/\tau_p} \mathbf{u}(\mathbf{X}(s), s) ds. \quad (4)$$

Время наблюдения за частицей существенно превышает время динамической релаксации ( $t \gg \tau_p$ ), поэтому в формуле (4) не учитывается начальное условие.

Корреляция Лагранжа частицы определяется следующим образом:

$$\langle v_i(t') v_j(t'') \rangle = \frac{1}{\tau_p^2} \int_0^{t'} ds' e^{-(t'-s')/\tau_p} \int_0^{t''} ds'' e^{-(t''-s'')/\tau_p} \langle u_i(\mathbf{X}(s'), s') u_j(\mathbf{X}(s''), s'') \rangle. \quad (5)$$

Далее представляет интерес средняя дисперсия флуктуаций скорости частиц  $\langle v^2 \rangle = \sum_{i=1}^3 \langle v_i^2 \rangle / 3$ . Случайная скорость частицы зависит от флуктуаций скорости несущей среды вдоль ее случайной траектории. Для однородного изотропного потока корреляцию среды вдоль траектории частицы  $\Psi_L^{(p)}(s' - s'')$  представим в виде

$$\Psi_L^{(p)}(s' - s'') \langle u^2 \rangle \delta_{ij} = \langle u_i(\mathbf{X}(s'), s') u_j(\mathbf{X}(s''), s'') \rangle. \quad (6)$$

Корреляция флуктуаций скорости среды вдоль траектории частицы подчиняется условию нормировки

$$\Psi_L^{(p)}(0) = 1. \quad (7)$$

Осредненную по различным направлениям корреляцию Лагранжа частицы  $\Phi_L^{(p)}(t' - t'')$  определяем как

$$\langle v_i(t') v_j(t'') \rangle = \delta_{ij} \langle v^2 \rangle \Phi_L^{(p)}(t' - t''). \quad (8)$$

Условие нормировки для корреляции Лагранжа частицы имеет вид

$$\Phi_L^{(p)}(0) = 1. \quad (9)$$

Из формул (5), (6) и (8) вытекает выражение для корреляции Лагранжа частицы:

$$\langle v^2 \rangle \Phi_L^{(p)}(t' - t'') = \langle u^2 \rangle \frac{1}{\tau_p^2} \int_0^{t'} ds' e^{-(t'-s')/\tau_p} \int_0^{t''} ds'' e^{-(t''-s'')/\tau_p} \Psi_L^{(p)}(s' - s''). \quad (10)$$

Из формулы (10) следует, что корреляция флуктуаций скорости среды вдоль траектории частицы определяет основные параметры хаотического движения примеси. Далее

устанавливается связь между спектрами корреляций флуктуаций скорости среды на траектории частицы, корреляции Лагранжа частицы и Эйлера несущей среды.

## 2. Спектральное представление

Корреляции Лагранжа частицы и флуктуации скорости среды вдоль траектории частицы раскладываются в интеграл Фурье:

$$\Phi_L^{(p)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \varphi_L^{(p)}(\omega) d\omega, \quad \Psi_L^{(p)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \psi_L^{(p)}(\omega) d\omega, \quad (11)$$

где  $i$  — мнимая единица,  $i^2 = -1$ , спектры  $\varphi_L^{(p)}(\omega)$ ,  $\psi_L^{(p)}(\omega)$  находятся как

$$\varphi_L^{(p)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \Phi_L^{(p)}(t) dt, \quad \psi_L^{(p)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \Psi_L^{(p)}(t) dt. \quad (12)$$

Для спектров выполняются условия нормировки, вытекающие из формул (7) и (9):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_L^{(p)}(\omega) d\omega = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi_L^{(p)}(\omega) d\omega = 1.$$

Подстановка спектрального разложения (11) в формулу (10) приводит к выражению спектра Лагранжа частицы через спектр корреляции флуктуации скорости среды вдоль траектории частицы:

$$\langle v^2 \rangle \varphi_L^{(p)}(\omega) = \langle u^2 \rangle \frac{\psi_L^{(p)}(\omega)}{1 + (\omega\tau_p)^2}. \quad (13)$$

Выражение для дисперсии флуктуаций скорости частицы вытекает из формул (10) и (13) при совпадении времен  $t' = t''$ :

$$\langle v^2 \rangle = \langle u^2 \rangle \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_L^{(p)}(\omega)}{1 + (\omega\tau_p)^2} d\omega. \quad (14)$$

Диффузия дисперсной примеси определяется осредненным квадратом случайного смещения частиц  $\Delta_p^2(t)$ :

$$\int_0^t d\xi' \int_0^t d\xi'' \langle v_i(\xi') v_j(\xi'') \rangle = \delta_{ij} \langle v^2 \rangle \int_0^t d\xi' \int_0^t d\xi'' \Phi_L^{(p)}(\xi' - \xi'') = \delta_{ij} \Delta_p^2(t).$$

Коэффициент турбулентной диффузии примеси рассчитывается как [29]

$$D^{(p)} = \frac{1}{2} \frac{d\Delta_p^2(t)}{dt} = \langle v^2 \rangle \int_0^t \Phi_L^{(p)}(\xi) d\xi.$$

Вводим интегральный временной масштаб корреляции Лагранжа частицы  $\Gamma_L^{(p)}$ , который рассчитывается с использованием формул (11) и (12):

$$\Gamma_L^{(p)} = \int_0^{\infty} \Phi_L^{(p)}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \varphi_L^{(p)}(\omega) \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_L^{(p)}(\omega) \delta(\omega) d\omega = \frac{1}{2} \varphi_L^{(p)}(0). \quad (15)$$

Здесь использовано спектральное разложение дельта функции Дирака

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt.$$

Для достаточно долгого времени наблюдения  $t \gg \Gamma_L^{(p)}$  коэффициент турбулентной диффузии достигает стационарного значения

$$D^{(p)} = \langle v^2 \rangle \Gamma_L^{(p)}. \quad (16)$$

Интегральный временной масштаб флуктуаций скорости среды вдоль траектории частицы  $T_L^{(p)}$  также выражается через спектр:

$$T_L^{(p)} = \int_0^{\infty} \Psi_L^{(p)}(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_L^{(p)}(t) dt = \frac{1}{2} \psi_L^{(p)}(0). \quad (17)$$

Из формул (13), (15) и (17) следует выражение для коэффициента турбулентной диффузии частиц через интегральный временной масштаб флуктуаций скорости среды на траектории частицы:

$$D^{(p)} = \langle u^2 \rangle T_L^{(p)}. \quad (18)$$

Равенство, вытекающее из формул (16) и (18),  $\langle v^2 \rangle \Gamma_L^{(p)} = \langle u^2 \rangle T_L^{(p)}$ , может служить критерием корректности результатов прямого численного моделирования турбулентных дисперсных течений.

Как следует из данных прямого численного моделирования, для крупномасштабных энергоемких флуктуаций автокорреляционная функция флуктуаций скорости среды вдоль траектории частицы близка к экспоненциальной зависимости [5–11, 13]:

$$\Psi_L^{(p)}(t) = \exp\left(-t/T_L^{(p)}\right). \quad (19)$$

Экспоненциальная аппроксимация справедлива на временах, превышающих микромасштаб Колмогорова.

Спектр флуктуаций скорости среды вдоль траектории частицы (19) вытекает из формул (12):

$$\psi_L^{(p)}(\omega) = 2T_L^{(p)} / \left[1 + (\omega T_L^{(p)})^2\right].$$

Выражение для спектра корреляции Лагранжа при экспоненциальной аппроксимации (19) следует из формулы (13):

$$\langle v^2 \rangle \varphi_L^{(p)}(\omega) = \frac{2T_L^{(p)} \langle u^2 \rangle}{\left[1 + (\omega \tau_p)^2\right] \left[1 + (\omega T_L^{(p)})^2\right]}.$$

Интеграл при вычислении зависимости корреляции Лагранжа (11) от времени берется по теореме вычетов:

$$\langle v^2 \rangle \Phi_L^{(p)}(t) = \langle u^2 \rangle \frac{e^{-t/T_L^{(p)}} - (\tau_p/T_L^{(p)}) e^{-t/\tau_p}}{1 - (\tau_p/T_L^{(p)})^2}. \quad (20)$$

Квадрат дисперсии флуктуаций скорости частиц следует из формулы (20) при  $t = 0$ :

$$\langle v^2 \rangle / \langle u^2 \rangle = f_p = 1 / \left[ 1 + \left( \tau_p / T_L^{(p)} \right) \right], \quad (21)$$

здесь  $f_p$  — функция отклика частиц.

Корреляционная функция Лагранжа частиц получается из формул (20) и (21):

$$\Phi_L^{(p)}(t) = \frac{e^{-t/T_L^{(p)}} - \left( \tau_p / T_L^{(p)} \right) e^{-t/\tau_p}}{1 - \left( \tau_p / T_L^{(p)} \right)}. \quad (22)$$

Следует отметить, что вид функции отклика (21) определяется формой корреляции флуктуаций скорости несущей среды (22) на траектории частицы. Интегральный временной масштаб корреляции Лагранжа (22) равен

$$\Gamma_L^{(p)} = \tau_p + T_L^{(p)}. \quad (23)$$

Для частиц с малой инерцией ( $\tau_p \ll T_L^{(p)}$ ) дисперсии флуктуаций скорости частиц и несущей среды близки:  $\langle v^2 \rangle \approx \langle u^2 \rangle$ . Интегральный временной масштаб корреляции Лагранжа стремится к интегральному временному масштабу вдоль траектории частицы:  $\Gamma_L^{(p)} \approx T_L^{(p)}$ . Корреляция Лагранжа (22) соответствует частицам пассивной примеси (19).

Для инерционных частиц ( $\tau_p \gg T_L^{(p)}$ ) интенсивность флуктуаций скорости примеси снижается:  $\langle v^2 \rangle \approx \langle u^2 \rangle T_L^{(p)} / \tau_p$ , временной интегральный масштаб корреляции Лагранжа стремится к времени динамической релаксации  $\Gamma_L^{(p)} \approx \tau_p$ , а корреляция Лагранжа (22) затухает как  $\Phi_L^{(p)}(t) \approx \exp(-t/\tau_p)$ .

В традиционном подходе интегральный временной масштаб флуктуаций скорости несущей среды на траектории частицы аппроксимируется интегральным временным масштабом Лагранжа пассивной примеси,  $T_L^{(p)} = T_L^0$ . В этом случае без учета осредненного скольжения из формулы (18) следует, что коэффициент турбулентной диффузии частиц не зависит от их инерции и равен коэффициенту турбулентной диффузии пассивной примеси  $D^0$ :

$$D^{(p)} = D^0 = \langle u^2 \rangle T_L^0,$$

Этот неожиданный результат в литературе называют теоремой Чена [19, 27, 28]. В традиционном подходе учет эффекта пересечения траекторий при наличии массовых сил осуществляется путем введения полуэмпирического множителя, зависящего от безразмерного параметра  $\gamma = W/u$  ( $W = |\mathbf{W}|$ ,  $u = \sqrt{\langle u^2 \rangle}$ ). Значения временного масштаба Лагранжа пассивной примеси  $T_L^0$  оценивается на основе эмпирических соображений или заимствуется из данных прямого численного моделирования турбулентности. В то же время, данные прямого численного моделирования случайного движения частиц свидетельствуют, что без учета осредненного скольжения коэффициент турбулентной

диффузии инерционных частиц становится выше, чем пассивной примеси (см, например, [5–11, 14]).

В традиционном теоретическом описании не учитывается внутренняя пространственная структура энергоемких турбулентных вихрей, которая существенным образом зависит от типа турбулентного потока. Цель дальнейших построений — самосогласованный учет пространственной структуры случайного поля скорости несущей среды и хаотического движения частицы внутри энергоемкого вихря.

### 3. Корреляция скорости среды вдоль траектории частицы

С помощью трехмерной функции Дирака  $\delta(\mathbf{x})$  корреляция флуктуаций скорости среды вдоль траектории частицы (6) записывается как

$$\begin{aligned} \delta_{ij} \langle u^2 \rangle \Psi_L^{(p)}(s' - s'') &= \int d\mathbf{x}' \int d\mathbf{x}'' \langle \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{X}(s')) \delta(\mathbf{x}'' - \mathbf{X}(s'')) u_i(\mathbf{x}', s') u_j(\mathbf{x}'', s'') \rangle = \\ &= \delta_{ij} \langle u^2 \rangle \int d\mathbf{y} \int d\mathbf{x}' \int d\mathbf{x}'' \langle \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{X}(s')) \delta(\mathbf{x}'' - \mathbf{X}(s'')) \rangle \times \\ &\times \delta(\mathbf{y} - (\mathbf{x}' - \mathbf{x}'')) \Psi_E(\mathbf{y}, s' - s'') = \delta_{ij} \langle u^2 \rangle \int d\mathbf{y} G_p(\mathbf{y}, s' - s'') \Psi_E(\mathbf{y}, s' - s''), \end{aligned} \quad (24)$$

где  $G_p(\mathbf{y}, s' - s'') = \langle \delta(\mathbf{y} - [\mathbf{X}(s') - \mathbf{X}(s'')]) \rangle$  — функция плотности вероятности смещения частицы на расстояние  $\mathbf{y}$  за время  $s' - s''$ .

При записи выражения (24) предполагается, что случайная траектория инерционной частицы (переменные Лагранжа) и флуктуации скорости среды (переменные Эйлера) слабо коррелированы. Это предположение широко используется при теоретическом исследовании диффузии частиц в случайных полях [30] и основано на квазинормальной гипотезе, применяемой в статистической физике [31] и теории случайных процессов [32]. В литературе, посвященной турбулентности, процедура расщепления корреляции (24) носит название гипотезы Коррсина. В работе [33] представлен анализ возможного нарушения приближения Коррсина для частиц пассивной примеси. В случае инерционных частиц гипотеза о слабой корреляции траектории тяжелой инерционной частицы и корреляции Эйлера среды является вполне разумным приближением. В этом случае частица реагирует на интегральные параметры флуктуаций скорости среды. По мере уменьшения инерции частиц интенсивность случайного движения и коэффициент турбулентной диффузии примеси стремятся к соответствующим параметрам среды.

В формуле (24) привлекается спектральное разложение  $\psi_E(\mathbf{k}, s)$  корреляции Эйлера:

$$\Psi_E(\mathbf{y}, s) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} \psi_E(\mathbf{k}, s) d\mathbf{k}, \quad \psi_E(\mathbf{k}, s) = \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} \Psi_E(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y}. \quad (25)$$

Спектральная функция  $\psi_E(\mathbf{k}, s)$  удовлетворяет условию нормировки

$$\left(1/(2\pi)^3\right) \int \psi_E(\mathbf{k}, 0) d\mathbf{k} = 1. \quad (26)$$

В результате подстановки разложения (25) в формулу (24) получаем выражение для корреляции скорости среды на траектории частицы, которое с учетом уравнения движения (2) принимает вид:

$$\begin{aligned} \Psi_L^{(p)}(s' - s'') &= \left(1/(2\pi)^3\right) \int \psi_E(\mathbf{k}, s' - s'') \times \\ &\times \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{W}(s' - s'')] \left\langle \exp\left[-i\mathbf{k} \cdot \int_{s''}^{s'} \mathbf{v}(\xi) d\xi\right] \right\rangle d\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (27)$$



Сомножитель в угловых скобках в выражении (27) — характеристический функционал случайных флуктуаций скорости частицы. Этот сомножитель учитывает смещение частицы внутри энергоемкого вихря.

Флуктуации скорости несущей среды удовлетворительно описываются случайным полем Гаусса [16–18, 20, 33]. Из формулы (4) следует, что случайная скорость частиц является также процессом Гаусса. Характеристический функционал случайного процесса Гаусса имеет вид [34]:

$$\begin{aligned} \left\langle \exp \left\{ -i\mathbf{k} \cdot \int_{s''}^{s'} \mathbf{v}(\xi) d\xi \right\} \right\rangle &= \exp \left\{ -\frac{k_i k_j}{2} \int_{s''}^{s'} d\xi' \int_{s''}^{s'} d\xi'' \langle v_i(\xi') v_j(\xi'') \rangle \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{k^2}{2} \langle v^2 \rangle \int_{s''}^{s'} d\xi' \int_{s''}^{s'} d\xi'' \Phi_L^{(p)}(\xi' - \xi'') \right\} = \exp \left\{ -\frac{k^2}{2} \Delta_p^2(s' - s'') \right\}, \end{aligned}$$

где  $k = |\mathbf{k}|$  — модуль волнового вектора. Осредненный квадрат случайного смещения частицы за промежуток времени  $s' - s''$  выражается через спектр корреляции Лагранжа частицы (12):

$$\Delta_p^2(s' - s'') = \langle v^2 \rangle \int_{s''}^{s'} d\xi' \int_{s''}^{s'} d\xi'' \Phi_L^{(p)}(\xi' - \xi'') = \frac{\langle v^2 \rangle}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_L^{(p)}(\omega) \frac{1 - \cos(\omega s)}{\omega^2} d\omega, \quad s = s' - s''.$$

Выражение для корреляции флуктуаций скорости среды вдоль траектории частицы (27) принимает вид:

$$\Psi_L^{(p)}(s) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi_E(\mathbf{k}, s) \exp \left\{ -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{W}s - \frac{k^2 \langle v^2 \rangle}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_L^{(p)}(\omega) \frac{1 - \cos(\omega s)}{\omega^2} d\omega \right\} d\mathbf{k}. \quad (28)$$

Видно, что флуктуации скорости среды вдоль траектории частицы зависят от корреляции Эйлера, осредненного скольжения и случайного смещения частицы внутри энергоемкого вихря. Осредненная скорость и блуждания частицы приводят к ослаблению корреляции скорости среды вдоль ее траектории.

Из формулы (28) следует, что для корректного описания осредненного скольжения и случайного смещения частиц необходим учет внутренней пространственной микроструктуры флуктуаций скорости среды. Для однородного поля флуктуаций скорости среды  $\psi_E(\mathbf{k}, s) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}) \Xi_E(s)$  корреляция вдоль траектории частицы не зависит ни от осредненного скольжения, ни от инерции частиц. В этом приближении также справедлива теорема Чена.

Уравнения (11)–(14) и (28) образуют замкнутую систему функциональных уравнений для расчета спектров Лагранжа частицы и флуктуаций скорости среды вдоль ее траектории.

Метод приближенного решения системы функциональных уравнений заключается в следующем. Для заданного спектра Эйлера рассчитывается спектр корреляции скорости среды вдоль траектории частицы (28). По формуле (17) находится интегральный временной масштаб флуктуаций скорости среды на траектории частицы  $T_L^{(p)}$ . Корреляция флуктуаций скорости среды вдоль траектории частицы аппроксимируется в виде экспоненциальной зависимости (19). Далее по спектральным разложениям раздела 3 определяются все параметры хаотического движения частиц.

#### 4. Модель спектра Эйлера

Рассматриваются две аппроксимации спектра Эйлера. Для малых чисел Рейнольдса турбулентности справедлива аппроксимация Сэфмена [35]. Трехмерный спектр развитой турбулентности в области энергоемких вихрей и инерционного переноса энергии моделируется формулой Кармана (см., например, [25, 28]).

##### 4.1. Спектр Сэфмена

Трехмерный спектр флуктуаций скорости несущей среды задается в виде

$$\psi_E(\mathbf{k}, \omega) = \frac{(2\pi)^2}{k_E^3 \omega_k} \exp\left(-\frac{k^2}{2k_E^2} - \frac{\omega^2}{2\omega_k^2}\right), \quad \omega_k = \frac{ku}{\chi_E}. \quad (29)$$

Здесь  $k_E$  — масштаб в пространстве волновых векторов,  $\chi_E$  — структурный параметр турбулентности, зависящий от типа течения [20, 21].

Частотная зависимость спектра Эйлера (29) соответствует представлениям о быстром вырождении мелкомасштабных флуктуаций и удовлетворяет условию нормировки, которое вытекает из (26):

$$\left(\frac{1}{(2\pi)^4}\right) \int d\mathbf{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \psi_E(k, \omega) = 1.$$

Интегральный временной масштаб корреляции Эйлера  $T_E$  находится из равенства

$$T_E = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi_E(\mathbf{k}, 0) d\mathbf{k} = \frac{\chi_E}{k_E u}.$$

Временная зависимость спектра Эйлера  $\psi_E(k, s)$  рассчитывается аналогично (11):

$$\psi_E(\mathbf{k}, s) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_E(\mathbf{k}, \omega) e^{-i\omega s} d\omega = \frac{(2\pi)^{3/2}}{k_E^3} \exp\left[-\frac{k^2}{2k_E^2} \left(1 + \frac{s^2}{T_E^2}\right)\right]. \quad (30)$$

Упростим выражение в экспоненте формулы (28). Для инерционных частиц интегральный временной масштаб корреляции Лагранжа больше временного масштаба корреляции среды вдоль траектории частицы  $\Gamma_L^{(p)} > T_L^{(p)}$ . Частоты, соответствующие энергоемкой части спектра Лагранжа, лежат в интервале  $\omega < \left(\Gamma_L^{(p)}\right)^{-1}$ . Диапазон времен, определяющих основной вклад в интеграл (10), равен  $|s' - s''| \approx T_E < \Gamma_L^{(p)}$ . Разложение косинуса в экспоненте (28) приводит к приближенному выражению для квадрата смещения частицы внутри вихря:  $\Delta_p^2(s) = \frac{\langle v^2 \rangle}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_L^{(p)}(\omega) \cdot \frac{1 - \cos(\omega s)}{\omega^2} d\omega \approx \langle v^2 \rangle s^2$ .

С учетом этой аппроксимации записывается выражение для корреляции скорости среды вдоль траектории частицы:

$$\Psi_L^{(p)}(s) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi_E(\mathbf{k}, s) \exp\left\{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{W}s - \frac{1}{2} k^2 \langle v^2 \rangle s^2\right\} d\mathbf{k}. \quad (31)$$

Громоздкие выкладки по вычислениям спектров собраны в Приложении. Спектр флуктуаций скорости среды вдоль траектории частицы рассчитывается по формуле (12):

$$\psi_L^{(p)}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \int_{-\infty}^{\infty} ds \psi_E(\mathbf{k}, s) \exp \left\{ i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{W})s - \frac{1}{2} k^2 \langle v^2 \rangle s^2 \right\}.$$

С учетом спектра корреляции Эйлера (30) получается выражение для спектра корреляции скорости жидкости на траектории частицы:

$$\psi_L^{(p)}(\omega) = \frac{\tilde{T}_E}{(2\pi)} \int \frac{k_E}{k} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{W}) \frac{k_E}{k} \tilde{T}_E \right]^2 - \frac{k^2}{2k_E^2} \right\} d\mathbf{k}. \quad (32)$$

Здесь эффективный временной масштаб  $\tilde{T}_E$  равен (см. Приложение):

$$\tilde{T}_E = T_E / \sqrt{1 + k_E^2 \langle v^2 \rangle T_E^2} = T_E / \sqrt{1 + \chi_E^2 f_p^2}. \quad (33)$$

В соответствии с идеей приближенного решения системы функциональных уравнений, изложенной в предыдущем разделе, рассчитаем интегральный временной масштаб флуктуаций скорости среды вдоль траектории частицы:

$$T_L^{(p)} = \frac{1}{2} \psi_L^{(p)}(0) = \tilde{T}_E \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\chi_E \gamma^*} \operatorname{erf} \left( \frac{\chi_E \gamma^*}{\sqrt{2}} \right), \quad (34)$$

где  $\gamma^* = \gamma / \sqrt{1 + \chi_E^2 f_p^2}$  — модернизированный параметр осредненного скольжения.

Формулы (21) и (34) образуют систему алгебраических уравнений для расчета функции отклика частиц  $f_p$ . Для безынерционных частиц  $\tau_p = 0$  в отсутствии осредненной скорости скольжения  $W = 0$  из формулы (33) следует оценка для интегрального временного масштаба корреляции Лагранжа частиц пассивной примеси:

$$T_L^0 = T_E / \sqrt{1 + k_E^2 \langle u^2 \rangle T_E^2} = T_E / \sqrt{1 + \chi_E^2}. \quad (35)$$

Видно, что масштаб Лагранжа зависит от структурного параметра турбулентности  $\chi_E$ . Интегральный временной масштаб корреляции Лагранжа пассивной примеси всегда меньше, чем интегральный временной масштаб корреляции Эйлера. Это объясняется разрушением корреляции микрочастицы при ее случайном блуждании внутри энергоемких флуктуаций скорости среды. Из формулы (34) видно, что рост осредненного скольжения приводит к уменьшению интегрального временного масштаба флуктуаций скорости среды вдоль траектории частицы (эффект «пересечения траекторий»).

Определяем параметр инерции частиц с помощью критерия Стокса  $St_p = \tau_p / T_E$ . Для инерционных частиц ( $St_p \gg 1$ ) без массовых сил ( $W = 0$ ) функция отклика  $f_p \sim St_p^{-1} \ll 1$  и интегральный временной масштаб флуктуаций скорости среды на траектории частиц стремится к интегральному временному масштабу корреляции Эйлера  $T_L^{(p)} \approx T_E > T_L^0$ .

Из формулы (18) получим выражение для отношения коэффициентов турбулентной диффузии тяжелых инерционных частиц и пассивной примеси:

$$\frac{D^{(p)}}{D^0} = \sqrt{\frac{1 + \chi_E^2}{1 + \chi_E^2 f_p^2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\chi_E \gamma^*} \operatorname{erf} \left( \frac{\chi_E \gamma^*}{\sqrt{2}} \right). \quad (36)$$

Для инерционных частиц ( $St_p \gg 1$ ) в отсутствие массовых сил ( $\gamma = 0$ ) коэффициент стационарной турбулентной диффузии частиц становится выше, чем коэффициент турбулентной диффузии пассивной примеси:  $D^{(p)} / D^{(0)} \approx \sqrt{1 + \chi_E^2} > 1$ . Для безынерционных

частиц ( $St_p = 0$ ) при существенном скоростном скольжении ( $\gamma \gg 1$ ) коэффициент турбулентной диффузии частиц снижается:  $D^{(p)}/D^0 \sim (\chi_E \gamma)^{-1}$ .

Приводим систему алгебраических уравнений для расчета параметров хаотического движения частиц. Функция отклика частиц рассчитывается по формуле  $f_p = \frac{1}{1 + St_p (T_L^{(p)}/T_E)}$ .

Отношение временного макромасштаба флуктуаций скорости жидкости на траектории частицы к масштабу Эйлера равно:

$$\frac{T_L^{(p)}}{T_E} = \frac{1}{\sqrt{1 + \chi_E^2 f_p}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\chi_E \gamma^*} \operatorname{erf} \left( \frac{\chi_E \gamma^*}{\sqrt{2}} \right).$$

Относительный коэффициент диффузии определяется по формуле (36).

#### 4.2. Спектр Кармана

Вид пространственной компоненты этого спектра ранее использовался в работе [26]. В настоящей работе изменен вид частотной зависимости и в целях замкнутости изложения мы приводим необходимые пояснения. Громоздкие математические выкладки вынесены в Приложение.

Трехмерный спектр Эйлера развитой турбулентности представляется в виде

$$\psi_E(\mathbf{k}, \omega) = \frac{2\pi^2}{k^2} \psi_E^0(k, \omega),$$

$$\psi_E^0(k, \omega) = \frac{\zeta_E}{k_E^5} \cdot \frac{k^4}{[1 + (k/k_E)^2]^{17/6}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{\omega_k} e^{-\omega^2/(2\omega_k^2)}, \quad (37)$$

здесь  $\zeta_E$  — нормировочная константа спектра,  $k_E$  — масштаб в пространстве волновых чисел, который будет определен в дальнейшем, частота  $\omega_k$  соответствует модели инерционного переноса энергии по спектру  $\omega_k = Q\varepsilon^{1/3} k^{2/3}$ ,  $Q$  — константа, значение которой вычисляется ниже.

Нормировочная константа для спектра (37) находится из условия (26),  $\zeta_E \approx 0,968$ . Значение масштаба волновых чисел  $k_E$  определяется из условия совпадения асимптотики спектра (37) для больших волновых чисел  $k \gg k_E$  и спектра Колмогорова для области инерционного переноса энергии по спектру:

$$k_E = (C_K/\zeta_E)^{3/2} (\varepsilon/E^{3/2}), \quad (38)$$

здесь  $\varepsilon$  — турбулентная диссипация,  $E = (3/2)\langle u^2 \rangle$  — турбулентная энергия,  $C_K \approx 1,67$  — константа Колмогорова.

Временной интегральный масштаб спектра (37) равен:

$$T_E = a_E E/\varepsilon, \quad a_E = \tilde{a}_E/(QC_K), \quad \tilde{a}_E \approx 0,033. \quad (39)$$

Интегральный временной масштаб можно также трактовать как характерное время оборота энергоемкого вихря  $\tilde{T}_E$ . Для оценки этого времени необходима величина одномерного пространственного макромасштаба [25]

$$L_E = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty k^{-1} \psi_E^0(k, 0) dk \approx 0,046/k_E.$$

Оцениваем характерное время оборота вихря  $\tilde{T}_E = L_E/u$ . При подстановке выражения для масштаба в пространстве волновых чисел (38) получаем  $\tilde{T}_E \approx 0,024 E/\varepsilon$ . Из условия приближенного равенства  $T_E \approx \tilde{T}_E$  следует оценка константы в выражении для частоты в формуле (37):  $Q \approx 1$ .

Спектру Эйлера (37) соответствует зависимость от времени (11):

$$\psi_E(\mathbf{k}, s) = \frac{2\pi^2}{k^2} \psi_E^0(k, s), \quad \psi_E^0(k, s) = \frac{\zeta_E}{k_E^5} \cdot \frac{k^4}{[1 + (k/k_E)^2]^{17/6}} e^{-s^2 \omega_k^2/2}.$$

Корреляция скорости несущей фазы на траектории частицы  $\Psi_L^{(p)}(s)$  следует из формулы (31) при подстановке аппроксимации спектра Эйлера:

$$\Psi_L^{(p)}(s) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\zeta_E}{k_E^5} \cdot \int \frac{k^2}{[1 + (k/k_E)^2]^{17/6}} \exp\left(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{W}s - \frac{s^2 \Omega_k^2}{2}\right) d\mathbf{k}, \quad (40)$$

здесь  $\Omega_k = \omega_k \sqrt{1 + k^2 \langle v^2 \rangle} / \omega_k^2$ .

В соответствии с основной идеей моделирования корреляции флуктуаций скорости несущей среды на траектории частицы (40) по формуле (12) определяется ее спектр  $\psi_L^{(p)}(\omega)$ . Временной макромасштаб флуктуаций скорости среды на траектории частицы получается по найденному спектру:

$$T_L^{(p)} \approx \frac{T_E}{\sqrt{1 + \tilde{\chi}_E^2 f_p}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\tilde{\chi}_E \gamma^*} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{\tilde{\chi}_E \gamma^*}{\sqrt{2}}\right), \quad \gamma^* = \frac{\sigma \gamma}{\sqrt{1 + \tilde{\chi}_E^2 f_p}}. \quad (41)$$

Структурный параметр для спектра Кармана  $\tilde{\chi}_E \approx 1$  (см. Приложение), а значение параметра  $\sigma$  задается порядка единицы.

Отношение коэффициентов турбулентной диффузии инерционной тяжелой примеси и пассивного скаляра имеет вид:

$$\frac{D^{(p)}}{D^0} = \sqrt{\frac{1 + \chi_E^2}{1 + \chi_E^2 f_p}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\chi_E \gamma^*} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{\chi_E \gamma^*}{\sqrt{2}}\right). \quad (42)$$

Из формул (41), (42) видно, что полученные выражения коррелируют с формулами для спектра Сэфмена (33) и (34). Это свидетельствует о том, что стохастическая динамика одиночных частиц в случайном поле скорости определяется интегральными параметрами спектра корреляции Эйлера.

## 5. Результаты расчетов

Имеющиеся в литературе данные экспериментов и прямого численного моделирования турбулентных течений с частицами подтверждают основные результаты настоящей работы. Расчеты проведены для структурного параметра  $\chi_E = 1$ , что соответствует отношению интегральных временных масштабов Лагранжа пассивной примеси и Эйлера  $T_L^0/T_E \approx 0,7$ . Это значение близко к данным прямого численного моделирования турбулентности в работе [8]. На рис. 1–5 представлено сопоставление с данными без осредненного скольжения. В этом случае результаты, полученные для спектров Сэфмена и Кармана, совпадают.

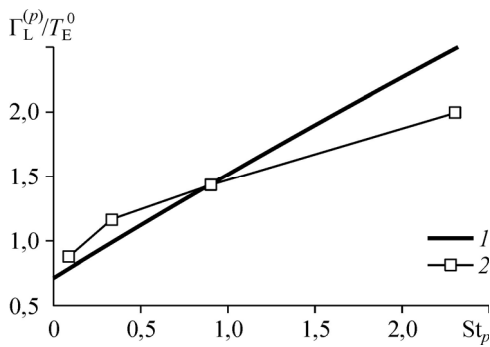


Рис. 1. Зависимость интегрального временного масштаба Лагранжа частиц от параметра инерции.  
Данные настоящей работы (1) и работы [8] (2).

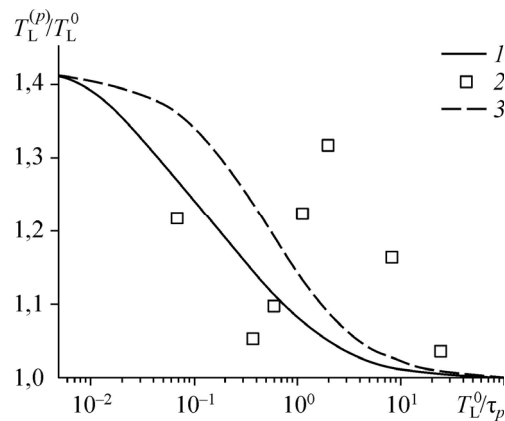


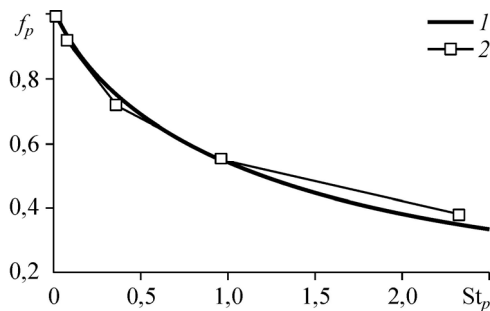
Рис. 2. Влияние времени релаксации частицы на временной интегральный масштаб корреляции скорости несущей фазы вдоль траектории частицы.  
Данные настоящей работы (1) и работ [18] (2), [11] (3).

Результаты расчетов коэффициента турбулентной диффузии инерционных частиц с учетом осредненного скольжения при различных значениях параметров  $\chi_E$  и  $\sigma$  сравниваются с экспериментальными данными и результатами численного моделирования из литературы.

Рисунок 1 иллюстрирует тенденцию роста интегрального временного масштаба Лагранжа с увеличением параметра инерционности частиц. С ростом коэффициента динамической релаксации частиц увеличивается интегральный временной масштаб флуктуаций скорости несущей среды вдоль траектории частицы (рис. 2). Для частиц большой инерции ( $St_p \gg 1$ ) этот интегральный временной масштаб стремится к интегральному временному масштабу одноточечной корреляции Эйлера. Для малоинерционных частиц ( $St_p \ll 1$ ) временной интегральный масштаб флуктуаций скорости вдоль траектории частицы переходит в масштаб Лагранжа пассивной примеси.

Увеличение инерции частиц приводит к снижению дисперсии флуктуаций скорости частиц (рис. 3). В то же время увеличение инерционности примеси приводит к более медленному затуханию корреляции Лагранжа (рис. 4). Из рис. 4 также следует корректность экспоненциальной аппроксимации (19) флуктуаций скорости среды вдоль траектории частицы.

На рис. 5 показано влияние инерции частиц на коэффициент турбулентной диффузии дисперсной примеси. Видно, что коэффициент турбулентной диффузии инерционных частиц выше, чем коэффициент турбулентной диффузии пассивной примеси. С физической точки зрения этот эффект объясняется следующим образом. Среднеквадратичная



скорость частицы  $v = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{f_p} u$ . За счет инерции длина коррелированного движения частицы порядка  $l_p \approx v \Gamma_L^{(p)}$ . Коэффициент диффузии примеси оценивается

Рис. 3. Влияние инерции частиц на интенсивность хаотического движения дисперсной примеси.  
Данные настоящей работы (1) и работы [8] (2).

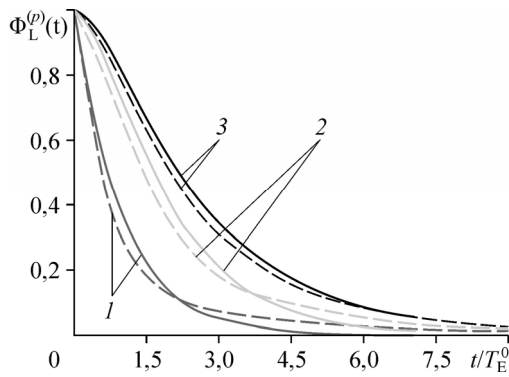


Рис. 4. Корреляция Лагранжа частиц.

Линии: сплошные — расчет по формуле (22), штриховые — данные работы [8];  $St_p = 0$  (1), 1 (2), 2,5 (3).

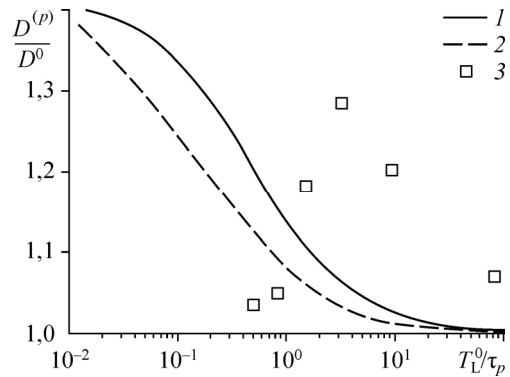


Рис. 5. Влияние инерции частиц на коэффициент турбулентной диффузии частиц. Обозначения см. на рис. 2.

как  $D^{(p)} \approx l_p v$ . Для инерционных частиц  $St_p \gg 1$ , среднеквадратичная скорость частицы  $v \approx u/\sqrt{St_p}$ , масштаб Лагранжа  $\Gamma_L^{(p)} \approx T_E St_p$ , масштаб пространственной корреляции  $l_p \approx u T_E \sqrt{St_p}$ , коэффициент диффузии  $D^{(p)} \approx T_E u > D^0 = T_L^0 u$ .

Рисунок 6 иллюстрирует влияние инерции и осредненного скоростного скольжения на коэффициент турбулентной диффузии частиц для спектра Сэфмена. Видно, что осредненное скольжение существенно понижает значение коэффициента турбулентной диффузии примеси. Это объясняется уменьшением времени контакта частиц с энергоемкими флуктуациями несущей среды. Для малых значений параметра  $\gamma$  из рис. 6 следует, что коэффициент диффузии инерционной примеси выше, чем пассивной. Этот эффект объясняется различием в интегральных временных масштабах Лагранжа и Эйлера. Из рис. 6 также видна существенная зависимость коэффициента турбулентной диффузии от структурного параметра течения. На рис. 7 для аппроксимации Кармана показано влияние относительного скольжения фаз на коэффициент турбулентной диффузии при различных значениях параметра  $\sigma$  при  $\tilde{\chi}_E = 1$ .

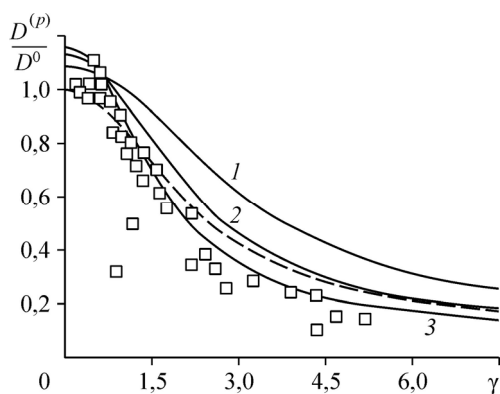


Рис. 6. Влияние осредненного скольжения частиц на коэффициент турбулентной диффузии.

Символы — данные экспериментов и прямого численного моделирования из работы [20]; расчеты настоящей работы: штриховая линия для  $St_p = 0$ ,  $\chi_E = 1$ , сплошные линии для  $St_p = 1$  при  $\chi_E = 0,7$  (1), 1 (2), 1,3 (3).

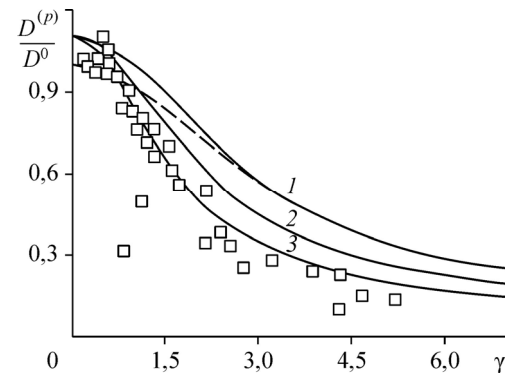


Рис. 7. Влияние осредненного скольжения частиц на коэффициент турбулентной диффузии для спектра Кармана для структурного параметра  $\tilde{\chi}_E = 1$ .

Линии соответствуют: штриховая —  $St_p = 0$ , сплошные —  $\sigma = 1$  (1), 1,3 (2), 1,7 (3). Остальные обозначения см. на рис. 6.

### Заключение

Анализ параметров хаотического движения дисперсной примеси в результате вовлечения частиц в турбулентность проведен в рамках двух гипотез. Во-первых, предполагается слабая корреляция нелокальных флуктуаций скорости среды в переменных Эйлера и случайной траектории частицы в переменных Лагранжа. Справедливость этой гипотезы основана на следующих соображениях. Флуктуация скорости среды в выделенной точке пространства складывается из бесконечного множества случайных траекторий жидких микрочастиц, проходящих через эту точку, и нелокального влияния флуктуаций давления в турбулентном потоке. Случайная траектория инерционных частиц находится под воздействием локальной силы вязкого трения в результате разности скоростей частицы и несущей среды. Поэтому предположение о статистической независимости хаотического движения инерционной частицы и флуктуаций скорости среды является разумным допущением. Заметим также, что расщепление корреляций четвертого порядка на произведение корреляций второго порядка — широко используемый прием в теории турбулентности и в динамике стохастических систем. Во-вторых, предполагается, что флуктуации скорости инерционных частиц являются случайным процессом Гаусса. Эта гипотеза использует результаты экспериментальных и теоретических исследований. В переменных Эйлера статистика флуктуаций скорости среды близка к распределению Гаусса. Вследствие линейности силы трения в уравнении движения флуктуации скорости частицы также можно моделировать случайным процессом Гаусса.

В рамках этих гипотез построена замкнутая система функциональных уравнений для расчета связи между спектрами корреляций Лагранжа частиц, флуктуаций скорости несущей среды по траектории частицы и корреляции Эйлера. Получена замкнутая система алгебраических уравнений для расчета временных интегральных масштабов Лагранжа и корреляции скорости среды на траектории частицы. Представлены формулы для расчета дисперсии флуктуаций скорости частиц и коэффициента турбулентной диффузии дисперсной примеси.

Результаты получены для двух аппроксимаций спектра — аппроксимации Сэфмена и Кармана. Показано, что качественный характер зависимости интенсивности хаотического движения частиц слабо зависит от конкретного вида спектра, а определяется интегральными пространственными и временными масштабами.

Исследовано влияние инерции частиц, скорости осредненного скольжения и микроструктуры флуктуаций скорости среды на параметры хаотического движения примеси. Показано, что отличие во временных интегральных масштабах корреляции Эйлера и Лагранжа связано с пространственной микроструктурой флуктуаций скорости среды. Установлено, что в отсутствие массовых сил коэффициент стационарной диффузии инерционных частиц всегда выше, чем коэффициент диффузии безынерционной примеси. Проиллюстрирована зависимость коэффициента турбулентной диффузии примеси от структурного параметра турбулентности.

### Приложение

В настоящем разделе представлены основные математические выкладки, поясняющие результаты, приведенные в тексте для спектров Сэфмена и Кармана.

#### Спектр Сэфмена

Для формулы (29) спектр флуктуаций скорости на траектории частицы имеет вид (32):

$$\psi_L^{(p)}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} k_E^3} \int \exp\left(-\frac{k^2}{2k_E^2}\right) d\mathbf{k} \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{W})s - \frac{k^2}{2k_E^2} \left(1 + k_E^2 T_E^2 \langle v^2 \rangle\right) \frac{s^2}{T_E^2}\right\} ds.$$



В результате вычисления интеграла по времени получаем следующее выражение:

$$\psi_L^{(p)}(\omega) = \frac{\tilde{T}_E}{(2\pi)k_E^3} \int \frac{k_E}{k} \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[ (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{W}) \frac{k_E}{k} \tilde{T}_E \right]^2 - \frac{k^2}{2k_E^2} \right\} d\mathbf{k}, \quad (1)$$

где временной масштаб  $\tilde{T}_E = T_E / \sqrt{1 + \chi_E^2 f_p^2}$ .

В сферической системе координат, расположенной в пространстве волновых чисел так, что ось  $k_z$  направлена вдоль вектора относительной скорости  $\mathbf{W}$ , формула (1) принимает вид:

$$\psi_L^{(p)}(\omega) = \frac{\tilde{T}_E}{k_E^2} \int_0^\infty k \exp \left( -\frac{k^2}{2k_E^2} \right) dk \int_0^\pi \sin \theta \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \cos \theta \frac{k_E}{k} \omega^* \tilde{T}_E \right)^2 \right] d\theta,$$

где  $\omega^* = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{W}$ .

Интегральный временной масштаб флуктуаций скорости среды на траектории частицы будет иметь вид:

$$T_L^{(p)} = \frac{1}{2} \psi_L^{(p)}(0) = \frac{\tilde{T}_E}{k_E^2} \int_0^\infty k \exp \left( -\frac{k^2}{2k_E^2} \right) dk \int_0^\pi \sin \theta \exp \left[ -\frac{1}{2} (\cos \theta W k_E \tilde{T}_E)^2 \right] d\theta.$$

В результате интегрирования по углу  $\theta$  и по модулю волнового вектора  $k$  получаем выражение для временного масштаба:

$$T_L^{(p)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\tilde{T}_E}{\chi_E \gamma^*} \cdot \operatorname{erf} \left( \frac{\chi_E \gamma^*}{\sqrt{2}} \right), \quad \gamma^* = \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \chi_E^2 f_p^2}}.$$

### Спектр Кармана

При вычислении нормировочной константы спектра (37)  $\zeta_E$  используется интеграл:

$$\zeta_E = \left( \int_0^\infty \frac{x^4}{(1+x^2)^{17/6}} dx \right)^{-1} = \frac{55}{9\sqrt{3}\pi^{3/2}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) \approx 0,968,$$

здесь  $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$  — гамма-функция.

Значение масштаба  $k_E$  определяется на основе асимптотики спектра Кармана (37) при больших значениях волновых чисел —  $k \gg k_E$ ,  $\psi_E^0(k, 0) \rightarrow (\zeta_E/k_E)(k/k_E)^{-5/3}$ . Это распределение должно совпадать со спектром Колмогорова  $C_K \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}/E$ , что позволяет определить значение масштаба  $k_E$  (38).

Временной интегральный масштаб спектра Кармана находится по формуле

$$T_E = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \int \psi_E(\mathbf{k}, 0) d\mathbf{k} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\zeta_E}{k_E^5} \cdot \int_0^\infty \frac{k^4}{[1+(k/k_E)^2]^{17/6}} \frac{dk}{\omega_k}. \quad (2)$$

Интеграл в формуле для масштаба  $T_E$  равен:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{10/3}}{[1+x^2]^{17/6}} dx = \tilde{a}_E = \frac{81\pi^{3/2}}{11264\Gamma(2/3)\Gamma(5/6)} \approx 0,033.$$

Рассчитываем одномерный интегральный пространственный масштаб [25]:

$$L_E = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} k^{-1} \psi_E^0(k, 0) dk = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\zeta_E}{k_E} \cdot \int_0^{\infty} \frac{x^3}{[1+x^2]^{17/6}} dx = \frac{9\pi}{616} \cdot \frac{\zeta_E}{k_E} \approx \frac{0,046}{k_E}.$$

Вычисление характерного времени оборота турбулентного вихря  $\tilde{T}_E = L_E/u$  ( $u = \sqrt{2/3}E^{1/2}$ ) приводит к величине

$$\tilde{T}_E = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{9\pi}{616} \cdot \frac{\zeta_E^{5/2}}{C_K^{3/2}} \cdot \frac{E}{\varepsilon} \approx 0,024 \frac{E}{\varepsilon}.$$

Спектр корреляции флуктуаций скорости несущей среды на траектории частицы (40) определяется как

$$\psi_L^{(p)}(\omega) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\zeta_E}{k_E^5} \cdot \int d\mathbf{k} \frac{k^2}{[1+(k/k_E)^2]^{17/6}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i\omega^* s - \frac{s^2 \Omega_k^2}{2}\right) ds,$$

где  $\omega^* = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{W}$  — эффективная частота,  $\Omega_k = \omega_k \sqrt{1+k^2 \langle v^2 \rangle} / \omega_k^2$ .

После интегрирования по времени для спектра получим

$$\psi_L^{(p)}(\omega) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\zeta_E}{k_E^5} \cdot \int \frac{k^2}{[1+(k/k_E)^2]^{17/6}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{\Omega_k} \exp\left(-\frac{\omega^{*2}}{2\Omega_k^2}\right) d\mathbf{k}.$$

Временной интегральный масштаб корреляции вдоль траектории частицы имеет вид:

$$T_L^{(p)} = \frac{1}{2} \psi_L^{(p)}(0) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\zeta_E}{k_E^5} \cdot \int \frac{k^2}{[1+(k/k_E)^2]^{17/6}} \cdot \frac{1}{\Omega_k} \cdot \exp\left[-\frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{W})^2}{2\Omega_k^2}\right] d\mathbf{k}.$$

Систему координат в пространстве волновых векторов располагаем аналогично спектру Сэфмена. В результате вычисления интеграла по углу  $\theta$  получаем

$$T_L^{(p)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\zeta_E}{k_E^5} \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{\Omega_k} \cdot \frac{k^2}{[1+(k/k_E)^2]^{17/6}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\Omega_k}{kW} \operatorname{erf}\left(\frac{kW}{\sqrt{2}\Omega_k}\right) k^2 dk. \quad (3)$$

Интеграл по модулю волнового вектора не имеет аналитического значения. С целью получения оценок проведем в интеграле аппроксимации. Для сомножителя  $k^2 \langle v^2 \rangle / \omega_k^2$  принимается:

$$\frac{k^2 \langle v^2 \rangle}{\omega_k^2} \approx \frac{k_E^{2/3} \langle u^2 \rangle \cdot \langle v^2 \rangle}{Q^2 \varepsilon^{2/3} \langle u^2 \rangle} = \frac{1}{Q^2} \cdot \frac{2}{3} \left( \frac{C_K}{\zeta_E} \right) \frac{\langle v^2 \rangle}{\langle u^2 \rangle} = \tilde{\chi}_E^2 f_p,$$

здесь  $\tilde{\chi}_E = Q^{-1} (2C_K/3\zeta_E)^{1/2} \approx 1,055$  — структурный параметр для спектра Кармана. Для множителя  $kW/\Omega_k$  справедливо:

$$\frac{kW}{\Omega_k} = \frac{uk}{\omega_k} \cdot \frac{\gamma}{\sqrt{1+k^2 \langle v^2 \rangle / \omega_k^2}} \approx \frac{\tilde{\chi}_E \gamma}{\sqrt{1+\tilde{\chi}_E^2 f_p}} = \gamma^* \tilde{\chi}_E, \quad \gamma^* = \frac{\sigma \gamma}{\sqrt{1+\tilde{\chi}_E^2 f_p}}.$$

С учетом сделанных аппроксимаций и формулы (2) получаем выражение для временного масштаба флуктуаций скорости среды вдоль траектории частицы:

$$T_L^{(p)} = \frac{T_E}{\sqrt{1+\tilde{\chi}_E^2 f_p}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\tilde{\chi}_E \gamma^*} \operatorname{erf} \left( \frac{\tilde{\chi}_E \gamma^*}{\sqrt{2}} \right).$$

В отличие от спектра Сэфмена полученные выражения, вследствие сделанных аппроксимаций, приближенные. Этот факт учитывается путем введения константы  $\delta \sim 1$ .

### Список литературы

1. **Зайчик Л.И., Алипченков В.М.** Статистические модели движения частиц в турбулентной жидкости. М.: Физматлит, 2007. 312 с.
2. **Герехов В.И., Пахомов М.А.** Тепломассоперенос и гидродинамика в газокapельных потоках. Новосибирск: НГТУ, 2008. 284 с.
3. **Фортов В.Е., Храпак А.Г., Храпак С.А., Молотков В.И., Петров О.Ф.** Пылевая плазма // УФН. 2004. Т. 174. С. 495–544.
4. **Bateson C.P., Aliseda A.** Wind tunnel measurements of the preferential concentration of inertial droplets in homogeneous isotropic turbulence // Exp. Fluids. 2012. Vol. 52. P. 1373–1387.
5. **Ahmed A.M., Elghobashi S.** Direct numerical simulation of particle dispersion in homogeneous turbulent shear flows // Phys. Fluids. 2001. Vol. 13. P. 3346–3364.
6. **Yeh F., Lei U.** On the motion of small particles in a homogeneous isotropic turbulent flow // Phys. Fluids A. 1991. Vol. 3. P. 2571–2586.
7. **Reynolds A.M., Cohen J.E.** Stochastic simulation of heavy-particle trajectories in turbulent flows // Phys. Fluids. 2002. Vol. 14. P. 342–351.
8. **Wetchagaruna S., Riley J.J.** Dispersion and temperature statistics of inertial particles in isotropic turbulence // Phys. Fluids. 2010. Vol. 22. P. 063301-1–15.
9. **Nadeem A.M., Vassilicos J.C.** A Lagrangian model for turbulent dispersion with turbulent-like flow structure: Comparison with direct numerical simulation for two-particle statistics // Phys. Fluids. 1999. Vol. 11. P. 1572–1583.
10. **Lain S., Grillo C.A.** Evaluation of Lagrangian particle dispersion models in turbulent flows // Chem. Engng Commun. 2007. Vol. 195, No. 3. P. 189–208.
11. **Deutsch E., Simonin O.** Large eddy simulation applied to the modeling of particulate transport coefficients in turbulent two-phase flows // In: Proc. 8th Symp. on Turbulent Shear Flows, 9–11 September, Munich, Germany, 1991. P. 10-1–6.
12. **Elghobashi S., Truesdell G.C.** On the two-way interaction between homogeneous turbulence and dispersed solid. Part. I: Turbulence modification // Phys. Fluids. 1993. Vol. 5. P. 1790–1801.
13. **Truesdell G.C., Elghobashi S.** On the two-way interaction between homogeneous turbulence and dispersed solid. Part. II: Particle dispersion // Phys. Fluids. 1994. Vol. 6. P. 1405–1407.
14. **Squires K.D., Eaton J.K.** Measurements of particle dispersion obtained from direct numerical simulations of isotropic turbulence // J. Fluid Mech. 1991. Vol. 226. P. 1–35.
15. **Squires K.D., Eaton J.K.** Particle response and turbulence modification in isotropic turbulence // Phys. Fluids A. 1990. Vol. 2. P. 1191–1203.
16. **Mashayek F., Pandya R.V.R.** Analytical description of particle/droplet-laden turbulent flows // Prog. Energy Comb. Sci. 2003. Vol. 29. P. 329–378.
17. **Minier J.P., Peirano E.** The PDF approach to turbulent polydispersed two-phase flows // Physics Reports. 2001. Vol. 352. P. 1–214.
18. **Wang L.P., Stock D.E.** Dispersion of heavy particles in turbulent motion // J. Atmos. Sci. 1993. Vol. 50. P. 1897–1913.

19. **Gouesbet G., Berlemont A., Picart A.** Dispersion of discrete particles by continuous turbulent motions: extensive discussion of Tchen's theory, using a two parameter family of Lagrangian correction functions // *Phys. Fluids*. 1984. Vol. 27. P. 827–835.
20. **Fung J.C.H., Hunt J.C.R., Perkins R.J.** Diffusivities and velocity spectra of small inertial particles in turbulent-like flows // *Proc. R. Soc. Lond. A*. 2003. Vol. 459. P. 445–457.
21. **Derevich I.V.** Influence of internal turbulent structure on intensity of particle velocity and temperature fluctuations of particles // *Int. J. Heat and Mass Transfer*. 2001. Vol. 44. P. 4505–4523.
22. **Yeung P.K., Pope S.B.** Lagrangian statistics from direct numerical simulations of isotropic turbulence // *J. Fluid Mech.* 1989. Vol. 207. P. 531–586.
23. **Yudine M.I.** Physical considerations on heavy-particle diffusion // *Adv. Geophy.* 1959. Vol. 6. P. 185–191.
24. **Csanady G.T.** Turbulent diffusion of heavy particles in the atmosphere // *J. Atmos. Sci.* 1963. Vol. 20. P. 201–208.
25. **Монин А.С., Яглом А.М.** Статистическая гидромеханика. Т. 2: Механика турбулентности. М.: Наука, 1967. 720 с.
26. **Деревич И.В., Здор А.Г.** Замкнутая модель флуктуационного движения частиц в турбулентном потоке // *Изв. РАН, МЖГ*. 2009. № 1. С. 68–82.
27. **Tchen C.M.** Mean value and correlation problems connected with the motion of small particles suspended in a turbulent fluid // Ph.D. Thesis. Delft University, The Hague, 1947.
28. **Хинце И.О.** Турбулентность: ее механизм и теория: пер. с англ. М., 1963. 680 с.
29. **Taylor G.I.** Diffusion by continuous movements // *Proc. London Math. Soc.* 1922. Vol. 20. P. 196–212.
30. **Corrsin S., Lumley J.** On the equation of motion for a particle in turbulent fluid // *Appl. Sci. Res.* 1956. Vol. 6. P. 114–116.
31. **Балеску Р.** Равновесная и неравновесная статистическая механика. В 2 т. : пер. с англ. М., 1978. Т. 1. 404 с.
32. **Гардинер К.В.** Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир. 1986. 527 с.
33. **Ott S., Mann J.** An experimental test of Corrsin's conjecture and some related ideas // *New J. of Physics*. 2005. Vol. 7. P. 142–166.
34. **Кляцкин В.И.** Динамика стохастических систем: курс лекций. М. Физматлит, 2003. 240 с.
35. **Saffman P.G.** An approximate calculation of the Lagrangian autocorrelation coefficient for stationary homogeneous turbulence // *Appl. Sci. Res.* 1962. Vol. 11. P. 245–255.

*Статья поступила в редакцию 4 марта 2014 г.,  
после доработки — 15 августа 2014 г.*