УДК 539.3+517.95

ОБ ОДНОСТОРОННЕМ КОНТАКТЕ ДВУХ ПЛАСТИН, РАСПОЛОЖЕННЫХ ПОД УГЛОМ ДРУГ К ДРУГУ

А. М. Хлуднев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: khlud@hydro.nsc.ru

Рассматривается задача о контакте двух упругих пластин, расположенных под заданным углом друг к другу. Предполагается, что множество точек контакта заранее неизвестно и определяется лишь после решения задачи. Приводятся различные формулировки рассматриваемой задачи и доказывается их эквивалентность. Найдена совокупность краевых условий на возможном множестве контакта и описан характер их выполнения. Исследованы асимптотические свойства решений при стремлении параметров жесткости контактирующих тел к бесконечности.

Ключевые слова: контактная задача, неизвестная граница, тонкое упругое препятствие, трещина.

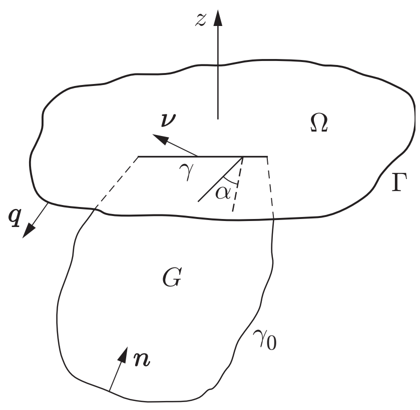
ВВЕДЕНИЕ

Вариационный подход, используемый для описания контактного взаимодействия тел с неизвестной областью контакта, оказался очень эффективным. Классическим примером является контактная задача Синьорини о взаимодействии упругого и жесткого тел в отсутствие трения. Свойства решений этой задачи изучены в работе [1], стимулировавшей исследования широкого класса контактных задач с неизвестной областью контакта. При этом рассматривались как двумерные и трехмерные контактные задачи, так и задачи о контакте пластин и оболочек (см. работу [2] и библиографию к ней). Как известно, задачи о равновесии упругих и неупругих тел, содержащих трещины, также можно отнести к классу контактных задач, если на берегах трещины заданы краевые условия взаимного непроникания в виде системы равенств и неравенств [3–5]. Условия не допускают взаимного проникания берегов, поэтому соответствующая математическая модель трещины предпочтительнее классической модели с линейными краевыми условиями на берегах.

Задачи о контакте тел разных размерностей с неизвестной областью контакта имеют некоторую аналогию с краевыми задачами теории трещин, а именно: уравнение равновесия для одного из тел формулируется в области с разрезом, а краевые условия на берегах разреза имеют вид системы равенств и неравенств. Однако характер и природа этих краевых условий и краевых условий, рассматриваемых в теории трещин, различны. Задачи о контакте представляют интерес с точки зрения приложений, и их полный математический анализ очень актуален.

В данной работе рассмотрена задача о контакте вдоль линии двух упругих пластин и дано полное описание краевых условий, выполняющихся на множестве контакта. Исследуется асимптотика решения при варьировании параметров модели, характеризующих

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06-01-00209).



Геометрия задачи

жесткость контактирующих тел. Рассматривается контакт пластин (верхней и нижней), в естественном состоянии расположенных под углом α друг к другу. Исследованы две модели (модели А и Б). В первой модели предполагается, что нижняя пластина деформируется в своей плоскости, а в задаче для второй модели считается, что она подвергается лишь изгибу. При этом уравнение равновесия верхней пластины задается в области с разрезом. Нижнюю пластину можно интерпретировать как тонкое упругое препятствие для верхней пластины. В недавно опубликованной работе [6] анализируется задача о контакте упругой пластины и упругой балки. Таким образом, балка играет роль тонкого упругого препятствия для пластины. Следует отметить, что односторонние контактные задачи для пластин анализировались в большом количестве работ [7–10]. В частности, тонкое жесткое (недеформируемое) препятствие для пластин рассматривалось в [10].

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с гладкой границей Γ, вектор внешней нормали к которой обозначим через $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2)$. Полагаем, что Ω соответствует срединной плоскости верхней (горизонтальной) пластины. Срединную поверхность нижней пластины обозначим через G, считая ее ограниченной областью с гладкой границей ∂G (см. рисунок). Угол между Ω и G обозначим через α ($\alpha \in (0, \pi/2]$). Будем считать, что $\Omega \cap G = \emptyset$, $\Omega \cap \partial G \neq \emptyset$. Обозначим $\gamma_0 = (\partial G) \setminus \Omega$. В этом случае $\partial G = \gamma \cup \bar{\gamma}_0$. Пусть $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$ — вектор нормали к γ, расположенный в плоскости Ω. Через $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2)$ будем обозначать единичный вектор внутренней нормали к ∂G, расположенный в плоскости G. Будем полагать, что γ — связное множество (в данном случае это интервал) и $\gamma \cap \Gamma = \emptyset$. Пусть $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$.

1. ЗАДАЧА А

1.1. Постановка задачи А. Пусть две упругие пластины расположены под углом α друг к другу и в естественном состоянии соприкасаются по линии γ (см. рисунок). Предположим, что точки верхней пластины смещаются лишь в направлении оси z, а точки нижней пластины допускают перемещения лишь в срединной плоскости. Приведем полную постановку задачи, которая имеет несколько эквивалентных формулировок: дифференциальную, вариационную и смешанную. Сначала рассмотрим дифференциальную постановку задачи. Требуется найти функции $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (u_1(\boldsymbol{x}), u_2(\boldsymbol{x}))$, $w(\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in G$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2) \in \Omega_\gamma$, такие что

$$-\operatorname{div}(B\varepsilon(\boldsymbol{u})) = \boldsymbol{g} \quad \text{в} \quad G; \tag{1}$$

$$\Delta^2 w = f \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma; \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_0; \tag{3}$$

$$w = w_q = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma; \tag{4}$$

$$\boldsymbol{un} \sin\alpha + w \geqslant 0, \quad \sigma_n \leqslant 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = 0, \quad \sigma_n(\boldsymbol{un}\sin\alpha + w) = 0 \quad \text{на} \quad \gamma; \tag{5}$$

$$[w] = [w_\nu] = 0, \quad [m(w)] = 0, \quad [t^\nu(w)]\sin\alpha = -\sigma_n \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{6}$$

Здесь $\varepsilon(\boldsymbol{u}) = \{\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u})\}$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$ — тензоры деформаций и напряжений $(i, j = 1, 2)$ соответственно,

$$\sigma_n = \sigma_{ij} n_j n_i, \qquad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \sigma\boldsymbol{n} - \sigma_n \cdot \boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = (\sigma_\tau^1, \sigma_\tau^2),$$

$$\sigma\boldsymbol{n} = (\sigma_{1j} n_j, \sigma_{2j} n_j), \qquad \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \qquad i, j = 1, 2,$$

$B = \{b_{ijkl}\}$ $(i, j, k, l = 1, 2)$ — тензор модулей упругости, $b_{ijkl} \in L^\infty(G)$:

$$b_{ijkl} = b_{jikl} = b_{ijlk}, \qquad b_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geqslant c|\xi|^2, \qquad c > 0,$$

$[v] = v^+ - v^-$ — скачок функции v на γ; величины $v^\pm$ соответствуют положительному и отрицательному (по отношению к нормали $\boldsymbol{\nu}$) берегам разреза $\gamma^\pm$. Все функции с двумя нижними индексами предполагаются симметричными по этим индексам, т. е. $\xi_{ij} = \xi_{ji}$ и т. д. По повторяющимся индексам проводится суммирование, функции $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2) \in L^2(G)$, $f \in L^2(\Omega)$ заданы. Кроме того,

$$w_\nu = \frac{\partial w}{\partial \nu}, \qquad w_q = \frac{\partial w}{\partial q}, \qquad m(w) = \varkappa_1 \Delta w + (1 - \varkappa_1)\,\frac{\partial^2 w}{\partial \nu^2},$$

$$t^\nu(w) = \frac{\partial}{\partial \nu}\Big(\Delta w + (1 - \varkappa_1)\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\Big), \qquad (s_1, s_2) = (-\nu_2, \nu_1),$$

где $\varkappa_1$ — коэффициент Пуассона верхней пластины; $m(w)$, $t^\nu(w)$ — изгибающий момент и перерезывающая сила для верхней пластины.

Следует отметить, что уравнения (1), (2) являются уравнениями равновесия, $\sigma = B\varepsilon(\boldsymbol{u})$ — закон Гука ($\sigma = \sigma(\boldsymbol{u})$). Соотношения (3), (4) обеспечивают защемление пластин на γ_0 и Γ соответственно. Первое неравенство в (5) описывает взаимное непроникание пластин. Уравнение равновесия (2) справедливо в области Ω_γ с разрезом (трещиной) γ, а краевые условия (5), (6) имеют вид системы равенств и неравенств.

Приведем вариационную постановку задачи (1)–(6), из которой, в частности, следует существование решения. Дифференциальная постановка этой задачи эквивалентна вариационной.

Рассмотрим пространства Соболева

$$H^1_{\gamma_0}(G) = \{v \in H^1(G)\colon v = 0 \text{ на } \gamma_0\}, \qquad H^2_0(\Omega) = \{v \in H^2(\Omega)\colon v = v_q = 0 \text{ на } \Gamma\}$$

и билинейную форму

$$a_\Omega(w, \bar w) = \int\limits_\Omega (w_{,11}\bar w_{,11} + w_{,22}\bar w_{,22} + \varkappa_1(w_{,11}\bar w_{,22} + w_{,22}\bar w_{,11}) + 2(1 - \varkappa_1) w_{,12}\bar w_{,12}).$$

Пусть $(u, v)_\Omega$ обозначает скалярное произведение в $L^2(\Omega)$, т. е. $(u, v)_\Omega = \int\limits_\Omega uv$. Обозначим

$$K = \{(\boldsymbol{u}, w)\colon \boldsymbol{u} = (u_1, u_2) \in H^1_{\gamma_0}(G),\ w \in H^2_0(\Omega),\ \boldsymbol{un}\sin\alpha + w \geqslant 0 \text{ на } \gamma\}$$

и рассмотрим функционал энергии

$$E(\boldsymbol{u}, w) = (\sigma(\boldsymbol{u}), \varepsilon(\boldsymbol{u}))_G/2 - (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{u})_G + a_\Omega(w, w)/2 - (f, w)_\Omega.$$

Можно найти решение задачи минимизации

$$\inf_{(\boldsymbol{u},w)\in K} E(\boldsymbol{u},w), \tag{7}$$

которая эквивалентна вариационному неравенству

$$(\boldsymbol{u},w)\in K; \tag{8}$$

$$(\sigma(\boldsymbol{u}),\varepsilon(\bar{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{u}))_G-(\boldsymbol{g},\bar{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{u})_G+a_\Omega(w,\bar{w}-w)-(f,\bar{w}-w)_\Omega\geqslant 0\quad\forall(\bar{\boldsymbol{u}},\bar{w})\in K. \tag{9}$$

Заметим, что функционал E является коэрцитивным и слабополунепрерывным снизу на пространстве $[H^1_{\gamma_0}(G)]^2\times H^2_0(\Omega)$. Более того, множество K слабозамкнуто. Следовательно, задача минимизации (7) имеет решение (единственное), удовлетворяющее вариационному неравенству (8), (9).

Докажем, что задачи (1)–(6) и (8), (9) эквивалентны.

Прежде всего из (8), (9) получим соотношения (1)–(6) и выясним, в каком смысле выполнены краевые условия (5), (6). Заметим, что уравнения (1), (2) вытекают из (9) и выполняются в смысле распределений. Действительно, подставив в (9) пробные функции $(\bar{\boldsymbol{u}},\bar{w})=(\boldsymbol{u}\pm\boldsymbol{\psi},w\pm\varphi)$, $\boldsymbol{\psi}=(\psi_1,\psi_2)\in C_0^\infty(G)$, $\varphi\in C_0^\infty(\Omega_\gamma)$, получим (1), (2).

Выберем $(\bar{\boldsymbol{u}},\bar{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\psi},w)$ в качестве пробных функций в (9). Здесь $\boldsymbol{\psi}=(\psi_1,\psi_2)\in H^1_{\gamma_0}(G)$, $\boldsymbol{\psi}_n=\boldsymbol{\psi}n\geqslant 0$ на γ. В результате получим

$$(\sigma(\boldsymbol{u}),\varepsilon(\boldsymbol{\psi}))_G-(\boldsymbol{g},\boldsymbol{\psi})_G\geqslant 0. \tag{10}$$

Справедлива следующая формула Грина [4, 11]:

$$(\sigma(\boldsymbol{u}),\varepsilon(\boldsymbol{\psi}))_G=-(\operatorname{div}\sigma(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{\psi})_G-\langle\sigma_n,\boldsymbol{\psi}_n\rangle_{1/2,\partial G}-\langle\sigma_\tau,\boldsymbol{\psi}_\tau\rangle_{1/2,\partial G}. \tag{11}$$

Здесь запись $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{1/2,\partial G}$ означает двойственность между $H^{-1/2}(\partial G)$ и $H^{1/2}(\partial G)$, где пространство $H^{-1/2}(\partial G)$ является сопряженным к $H^{1/2}(\partial G)$; $\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi}_n\boldsymbol{n}+\boldsymbol{\psi}_\tau$. С учетом уравнений равновесия

$$-\operatorname{div}\sigma(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{g}\qquad\text{в}\quad G$$

из (10) получим

$$-\langle\sigma_n,\boldsymbol{\psi}_n\rangle_{1/2,\partial G}-\langle\boldsymbol{\sigma}_\tau,\boldsymbol{\psi}_\tau\rangle_{1/2,\partial G}\geqslant 0. \tag{12}$$

Поскольку функции $\boldsymbol{\psi}_\tau$ являются произвольными на ∂G, из неравенства (12) следует соотношение

$$\langle\boldsymbol{\sigma}_\tau,\boldsymbol{\psi}_\tau\rangle_{1/2,\partial G}=0. \tag{13}$$

Введем в рассмотрение пространство $H^{1/2}_{00}(\gamma)$, в котором норма определена следующим образом (см. [4]):

$$\|v\|^2_{H^{1/2}_{00}(\gamma)}=\|v\|^2_{H^{1/2}(\gamma)}+\int\limits_\gamma\rho^{-1}v^2.$$

Здесь $\rho(\boldsymbol{y})=\operatorname{dist}(\boldsymbol{y},\partial\gamma)$. Введем также пространство

$$H^{3/2}_{00}(\gamma)=\Big\{v\in H^{3/2}_0(\gamma)\colon\quad\int\limits_\gamma\frac{|\nabla v|^2}{\rho}<\infty\Big\}$$

и используем следующее утверждение. Пусть функция u определена на γ. Обозначим через $\bar{u}$ продолжение u нулем вне γ, т. е.

$$\bar{u}=\begin{cases}u & \text{на}\quad\gamma,\\ 0 & \text{на}\quad\partial G\setminus\gamma.\end{cases}$$

Тогда $\bar{u} \in H^{i/2}(\partial G)$ тогда и только тогда, когда $u \in H_{00}^{i/2}(\gamma)$, $i = 1, 3$ (см. [4, 11]). В силу этого свойства и равенства $\boldsymbol{\psi} = 0$ на γ_0 соотношение (13) можно записать в виде

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_\tau, \boldsymbol{\psi}_\tau \rangle_{1/2,\gamma}^{00} = 0, \qquad (14)$$

где запись $\langle \,\cdot\, , \,\cdot\, \rangle_{1/2,\gamma}^{00}$ означает двойственность между $H_{00}^{1/2}(\gamma)$ и сопряженным пространством $H_{00}^{-1/2}(\gamma)$. Из соотношения (14) следует равенство

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = (\sigma_\tau^1, \sigma_\tau^2) = 0 \quad \text{в смысле} \quad H_{00}^{-1/2}(\gamma), \qquad (15)$$

а из неравенства (12) — неравенство

$$\sigma_n \leqslant 0 \quad \text{в смысле} \quad H_{00}^{-1/2}(\gamma). \qquad (16)$$

Рассмотрим продолжение γ в области Ω до замкнутой кривой Σ класса $C^{1,1}$, так что $\Sigma \subset \Omega$. В этом случае область Ω разбивается на две подобласти Ω_1, Ω_2 с границами Σ и $\Sigma \cup \Gamma$ соответственно. Будем считать, что нормаль $\boldsymbol{\nu}$ определена на Σ, являясь внешней по отношению к Ω_1. Выберем $(\bar{\boldsymbol{u}}, \bar{w}) = (\boldsymbol{u}, w + \varphi)$ в качестве пробных функций в (9). Здесь $\varphi \geqslant 0$ на γ, $\varphi \in H_0^2(\Omega)$. В результате получим соотношение

$$a_\Omega(w, \varphi) - (f, \varphi)_\Omega \geqslant 0. \qquad (17)$$

Рассмотрим пространство

$$V = \{v \in H^2(\Omega_1)\colon \quad \Delta^2 v \in L^2(\Omega_1)\}.$$

Для $v \in V$ можно определить $m(v) \in H^{-1/2}(\Sigma)$, $t^\nu(v) \in H^{-3/2}(\Sigma)$. Тогда имеет место следующая формула Грина [4, 12]:

$$(\varphi, \Delta^2 v)_{\Omega_1} = a_{\Omega_1}(\varphi, v) + \langle t^\nu(v), \varphi \rangle_{3/2,\Sigma} - \langle m(v), \varphi_\nu \rangle_{1/2,\Sigma} \quad \forall \varphi \in H^2(\Omega_1). \qquad (18)$$

Здесь запись $\langle \,\cdot\, , \,\cdot\, \rangle_{i/2,\Sigma}$ означает двойственность между пространством $H^{-i/2}(\Sigma)$ и сопряженным к нему пространством $H^{i/2}(\Sigma)$, $i = 1, 3$. Формула Грина позволяет вывести из (17) и (2) следующее неравенство:

$$-\langle [m(w)], \varphi_\nu \rangle_{1/2,\Sigma} + \langle [t^\nu(w)], \varphi \rangle_{3/2,\Sigma} \geqslant 0.$$

Поскольку φ_ν являются произвольными функциями на Σ, отсюда получаем

$$[m(w)] = 0 \quad \text{в смысле} \quad H^{-1/2}(\Sigma); \qquad (19)$$

$$\langle [t^\nu(w)], \varphi \rangle_{3/2,\Sigma} \geqslant 0 \quad \forall \varphi \in H_0^2(\Omega), \qquad \varphi \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \gamma. \qquad (20)$$

Подставим $(\bar{\boldsymbol{u}}, \bar{w}) = (\boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{\psi}, w \pm \varphi)$ в качестве пробных функций в (9), причем $\boldsymbol{\psi}_n \sin\alpha = -\varphi$ на γ, $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2) \in H_{\gamma_0}^1(G)$, $\varphi \in H_0^2(\Omega)$. В этом случае $\boldsymbol{\psi}_n \in H_{00}^{1/2}(\gamma)$. Предположим дополнительно, что $\varphi = 0$ на $\Sigma \setminus \gamma$. Тогда $\varphi \in H_{00}^{3/2}(\gamma)$. Указанная подстановка дает

$$(\sigma(\boldsymbol{u}), \varepsilon(\boldsymbol{\psi}))_G - (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{\psi})_G + a_\Omega(w, \varphi) - (f, \varphi)_\Omega = 0. \qquad (21)$$

В силу (1), (2), (15), (19) с использованием формул Грина (11), (18) из (21) следует

$$\langle [t^\nu(w)], \varphi \rangle_{3/2,\Sigma} - \langle \sigma_n, \boldsymbol{\psi}_n \rangle_{1/2,\gamma}^{00} = 0.$$

Поскольку $\varphi = 0$ на $\Sigma \setminus \gamma$, последнее соотношение можно записать в виде

$$\langle [t^\nu(w)], \varphi \rangle_{3/2,\gamma}^{00} - \langle \sigma_n, \boldsymbol{\psi}_n \rangle_{1/2,\gamma}^{00} = 0. \qquad (22)$$

Однако в данном случае $\langle \sigma_n, \boldsymbol{\psi}_n \rangle^{00}_{3/2,\gamma} = \langle \sigma_n, \boldsymbol{\psi}_n \rangle^{00}_{1/2,\gamma}$, поэтому из (22) следует

$$[t^\nu(w)] \sin\alpha = -\sigma_n \quad \text{в смысле} \quad H^{-1/2}_{00}(\gamma). \tag{23}$$

Выберем $(\bar{\boldsymbol{u}}, \bar{w}) = (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\psi}, w+\varphi)$ в качестве пробной функции в (9), причем $\boldsymbol{\psi}_n \sin\alpha + \varphi \geqslant 0$ на γ, $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2) \in H^1_{\gamma_0}(G)$, $\varphi \in H^2_0(\Omega)$. В результате получим

$$(\sigma(\boldsymbol{u}), \varepsilon(\boldsymbol{\psi}))_G - (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{\psi})_G + a_\Omega(w, \varphi) - (f, \varphi)_\Omega \geqslant 0.$$

Используя формулы Грина (11), (18) в этом неравенстве, в силу (1), (2), (15)–(19) имеем

$$\langle [t^\nu(w)], \varphi \rangle_{3/2,\Sigma} - \langle \sigma_n, \boldsymbol{\psi}_n \rangle^{00}_{1/2,\gamma} \geqslant 0 \quad \forall (\psi, \varphi) \in K. \tag{24}$$

Неравенство (24) обеспечивает точную формулировку соотношений (см. (5), (6))

$$\sigma_n \leqslant 0, \qquad [t^\nu(w)] \sin\alpha = -\sigma_n \quad \text{на} \quad \gamma.$$

Заметим также, что соотношения (16), (20), (23) следуют из (24).

Выбирая $(\bar{\boldsymbol{u}}, \bar{w}) = (0, 0)$, $(\bar{\boldsymbol{u}}, \bar{w}) = 2(\boldsymbol{u}, w)$ в (9), получим соотношение

$$\langle [t^\nu(w)], w \rangle_{3/2,\Sigma} - \langle \sigma_n, \boldsymbol{u}_n \rangle^{00}_{1/2,\gamma} = 0,$$

которое представляет собой точную запись последних соотношений в (5), (6).

Из сказанного выше следует, что первый член в (24) не зависит от выбора Σ. Важно лишь, чтобы кривая Σ удовлетворяла указанным условиям гладкости. Более того, первый член в (24) не зависит от значений φ на $\Sigma \setminus \bar{\gamma}$. Иными словами, если $\varphi^1 = \varphi^2$ на γ, то

$$\langle [t^\nu(w)], \varphi^1 \rangle_{3/2,\Sigma} = \langle [t^\nu(w)], \varphi^2 \rangle_{3/2,\Sigma}.$$

Система граничных условий (3)–(6) является полной, в частности, вариационное неравенство (8), (9) можно вывести из (1)–(6).

Приведем так называемую смешанную формулировку задачи (1)–(6). В отличие от дифференциальной и вариационной эта формулировка содержит множество допустимых напряжений и моментов. При этом перемещения пластин формально находятся из достаточно широких классов функций, не позволяющих говорить о каких-либо краевых условиях на границе из-за недостаточной гладкости. Тем не менее вся необходимая информация о перемещениях содержится в предлагаемой формулировке задачи. Будем использовать связь между $m = \{m_{ij}\}$ и $\nabla\nabla w = \{w_{,ij}\}$ в виде $m = D\nabla\nabla w, D = \{d_{ijkl}\}$, $d_{ijkl} = d_{jikl} = d_{klij}$, $i, j, k, l = 1, 2$. В дальнейшем потребуется конкретный вид D, соответствующий соотношениям

$$m_{11} = w_{,11} + \varkappa_1 w_{,22}, \qquad m_{22} = w_{,22} + \varkappa_1 w_{,11}, \qquad m_{12} = (1 - \varkappa_1) w_{,12}.$$

Запишем задачу (1)–(6) в следующем эквивалентном виде. Найти функции $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (u_1(\boldsymbol{x}), u_2(\boldsymbol{x}))$, $\sigma(\boldsymbol{x}) = \{\sigma_{ij}(\boldsymbol{x})\}$, $w(\boldsymbol{y})$, $m(\boldsymbol{y}) = \{m_{ij}(\boldsymbol{y})\}$, $i, j = 1, 2$, $\boldsymbol{x} \in G$, $\boldsymbol{y} \in \Omega_\gamma$, такие что

$$-\operatorname{div}\sigma = \boldsymbol{g} \quad \text{в} \quad G; \tag{25}$$

$$B^{-1}\sigma = \varepsilon(\boldsymbol{u}) \quad \text{в} \quad G; \tag{26}$$

$$\nabla\nabla m = f \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma; \tag{27}$$

$$D^{-1} m = \nabla\nabla w \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \tag{28}$$

$$\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_0; \tag{29}$$

$$w = w_q = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma; \tag{30}$$

$$\boldsymbol{un}\sin\alpha + w \geqslant 0, \quad \sigma_n \leqslant 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = 0, \quad \sigma_n(\boldsymbol{un}\sin\alpha + w) = 0 \quad \text{на} \quad \gamma; \tag{31}$$

$$[w] = [w_\nu] = 0, \quad [m_\nu] = 0, \quad [T^\nu(m)] \sin\alpha = -\sigma_n \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{32}$$

Здесь

$$\nabla\nabla m = m_{ij,ij}, \qquad m_\nu = m_{ij}\nu_j\nu_i,$$

$$T^\nu(m) = m_{ij,k}s_k s_j \nu_i + m_{ij,j}\nu_i, \qquad (s_1, s_2) = (-\nu_2, \nu_1).$$

Тензор B^{-1} получен обращением закона Гука $\sigma = B\varepsilon(\boldsymbol{u})$, а тензор D^{-1} — обращением закона $m = D\nabla\nabla w$.

Наряду с формулой (22) потребуется следующий вариант формулы Грина (см. [4]). Если $m = \{m_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, причем $m \in L^2(\Omega_1)$, $\nabla\nabla m \in L^2(\Omega_1)$, то можно определить $m_\nu \in H^{-1/2}(\Sigma)$, $T^\nu(m) \in H^{-3/2}(\Sigma)$, при этом

$$(\varphi, m_{ij,ij})_{\Omega_1} = (\varphi_{,ij}, m_{ij})_{\Omega_1} + \langle T^\nu(m), \varphi\rangle_{3/2,\Sigma} - \langle m_\nu, \varphi_\nu\rangle_{1/2,\Sigma} \qquad \forall \varphi \in H^2(\Omega_1).$$

Введем множество допустимых напряжений и моментов

$$L = \{(\bar\sigma, \bar m)\colon \quad \bar\sigma, \operatorname{div}\bar\sigma \in L^2(G), \quad \bar m, \nabla\nabla\bar m \in L^2(\Omega_\gamma),$$
$$\bar\sigma_n \leqslant 0, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}_\tau = 0, \quad [\bar m_\nu] = 0, \quad [T^\nu(\bar m)]\sin\alpha = -\bar\sigma_n \text{ на } \gamma\}.$$

Здесь $\bar\sigma = \{\bar\sigma_{ij}\}$, $\bar m = \{\bar m_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$; граничные условия для $\bar\sigma$, $\bar m$ в определении L выполнены в следующем смысле:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_\tau = (\bar\sigma_\tau^1, \bar\sigma_\tau^2) = 0 \quad \text{в смысле} \quad H_{00}^{-1/2}(\gamma),$$

$$[\bar m_\nu] = 0 \quad \text{в смысле} \quad H_{00}^{-1/2}(\Sigma).$$

Неравенство $\bar\sigma_n \leqslant 0$ и равенство $[T^\nu(\bar m)]\sin\alpha = -\bar\sigma_n$ выполняются в смысле

$$\langle [T^\nu(\bar m)], \bar w\rangle_{3/2,\Sigma} - \langle \bar\sigma_n, \bar{\boldsymbol{u}}_n\rangle_{1/2,\gamma}^{00} \geqslant 0 \qquad \forall (\bar{\boldsymbol{u}}, \bar w) \in K.$$

Умножим (26), (28) на $\bar\sigma - \sigma$, $\bar m - m$ соответственно, проинтегрируем по G, Ω_γ и просуммируем. Здесь $(\bar\sigma, \bar m) \in L$. В результате получаем следующую формулировку задачи. Найти функции $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (u_1(\boldsymbol{x}), u_2(\boldsymbol{x}))$, $\sigma(\boldsymbol{x}) = \{\sigma_{ij}(\boldsymbol{x})\}$, $w(\boldsymbol{y})$, $m(\boldsymbol{y}) = \{m_{ij}(\boldsymbol{y})\}$, $i, j = 1, 2$, $\boldsymbol{x} \in G$, $\boldsymbol{y} \in \Omega_\gamma$, такие что

$$\boldsymbol{u} \in L^2(G), \qquad w \in L^2(\Omega_\gamma), \qquad (\sigma, m) \in L; \tag{33}$$

$$-\operatorname{div}\sigma = \boldsymbol{g} \quad \text{в} \quad G; \tag{34}$$

$$\nabla\nabla m = f \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma; \tag{35}$$

$$(B^{-1}\sigma, \bar\sigma - \sigma)_G + (\boldsymbol{u}, \operatorname{div}\bar\sigma - \operatorname{div}\sigma)_G + (D^{-1}m, \bar m - m)_{\Omega_\gamma} -$$
$$-(w, \nabla\nabla\bar m - \nabla\nabla m)_{\Omega_\gamma} \geqslant 0 \qquad \forall (\bar\sigma, \bar m) \in L. \tag{36}$$

Соотношения (33)–(36) представляют собой смешанную формулировку задачи (1)–(6). Следует отметить, что перемещения $\boldsymbol{u}$, w в этой формулировке ищутся в пространствах L^2, поэтому никаких краевых условий для перемещений задача (33)–(36) не содержит. Отметим также, что (1)–(6) эквивалентно (33)–(36). Для доказательства этого факта достаточно вывести (1)–(6) из (33)–(36) (см. ниже). Из (36) вытекает справедливость следующих уравнений в смысле распределений:

$$B^{-1}\sigma = \varepsilon(\boldsymbol{u}) \quad \text{в} \quad G, \qquad D^{-1}m = \nabla\nabla w \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma. \tag{37}$$

Таким образом, в силу (33) имеем включения $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2) \in H^1(G)$, $w \in H^2(\Omega_\gamma)$. Это означает, что в действительности гладкость функций $\boldsymbol{u}$, w выше, чем в (33), и можно говорить о краевых условиях для перемещений.

Из (33)–(36) можно вывести краевые условия (4). Покажем, что

$$[w] = [w_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{38}$$

С этой целью найдем решение $\tilde{w}$ задачи

$$\Delta^2 \tilde{w} = f \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma; \tag{39}$$

$$\tilde{w} = \tilde{w}_q = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma; \tag{40}$$

$$m(\tilde{w}) = \varphi, \quad t^\nu(\tilde{w}) = \xi \quad \text{на} \quad \gamma^\pm, \tag{41}$$

где φ, ξ — произвольные функции в $L^2(\gamma)$. Задача (39)–(41) допускает вариационную формулировку. Требуется найти функцию $\tilde{w}$, такую что

$$\tilde{w} \in H^2_\Gamma(\Omega_\gamma); \tag{42}$$

$$a_{\Omega_\gamma}(\tilde{w}, v) - (f, v)_{\Omega_\gamma} - (\xi, [v])_\gamma + (\varphi, [v_\nu])_\gamma = 0 \quad \forall v \in H^2_\Gamma(\Omega_\gamma), \tag{43}$$

где

$$H^2_\Gamma(\Omega_\gamma) = \{v \in H^2(\Omega_\gamma)\colon \quad v = v_q = 0 \text{ на } \Gamma\}.$$

Решение $\tilde{w}$ задачи (42), (43) удовлетворяет условиям

$$[m(\tilde{w})] = 0 \quad \text{в смысле} \quad H^{-1/2}(\Sigma),$$

$$[t^\nu(\tilde{w})] = 0 \quad \text{в смысле} \quad H^{-3/2}(\Sigma).$$

Выбрав в (36) пробные функции в виде $(\bar{\sigma}, \bar{m}) = (\sigma, m) \pm (0, \tilde{m})$, $\tilde{m} = \{\tilde{m}_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, $\tilde{m} = D\nabla\nabla\tilde{w}$, получим соотношение

$$(D^{-1}m, \tilde{m})_{\Omega_\gamma} - (w, \nabla\nabla\tilde{m})_{\Omega_\gamma} = 0,$$

из которого в силу (37) следует

$$\langle T^\nu(\tilde{m}), [w]\rangle_{3/2,\Sigma} - \langle \tilde{m}_\nu, [w_\nu]\rangle_{1/2,\Sigma} = 0.$$

Здесь $T^\nu(\tilde{m}) = t^\nu(\tilde{w})$; $\tilde{m}_\nu = m(\tilde{w})$ (в силу предыдущих замечаний скачки этих величин на Σ равны нулю). Из (42), (43) вытекает соотношение

$$\langle T^\nu(\tilde{m}), [v]\rangle_{3/2,\Sigma} - \langle \tilde{m}_\nu, [v_\nu]\rangle_{1/2,\Sigma} = (\xi, [v])_\gamma - (\varphi, [v_\nu])_\gamma \quad \forall v \in H^2_\Gamma(\Omega_\gamma).$$

Следовательно,

$$(\xi, [w])_\gamma - (\varphi, [w_\nu])_\gamma = 0,$$

и в силу произвольности φ, ξ выполняются граничные условия (38). В частности, получаем $w \in H^2_0(\Omega)$.

Докажем, что функция $\boldsymbol{u}$ в (33)–(36) удовлетворяет условию

$$\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_0. \tag{44}$$

Напомним, что $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2) \in H^1(G)$. Разделим γ_0 на две части: $\gamma_0 = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где γ_i $(i = 1, 2)$ — гладкие кривые. Введем следующее обозначение:

$$H^1_{\gamma_1}(G) = \{v \in H^1(G)\colon v = 0 \text{ на } \gamma_1\}.$$

Пусть $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2) \in L^2(\gamma_2)$ — произвольная функция. Существует решение задачи

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \in H^1_{\gamma_1}(G); \tag{45}$$

$$(\sigma(\tilde{\boldsymbol{u}}), \varepsilon(\boldsymbol{v}))_G - (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{v})_G + (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{v})_{\gamma_2} = 0 \quad \forall \boldsymbol{v} = (v_1, v_2) \in H^1_{\gamma_1}(G), \tag{46}$$

где $\sigma(\tilde{\boldsymbol{u}}) = B\varepsilon(\tilde{\boldsymbol{u}})$. Очевидно, это решение удовлетворяет соотношениям

$$-\operatorname{div}(B\varepsilon(\tilde{\boldsymbol{u}})) = \boldsymbol{g} \quad \text{в} \quad G,$$

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_1,$$

$$\sigma(\tilde{\boldsymbol{u}})\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{на} \quad \gamma,$$

$$\sigma(\tilde{\boldsymbol{u}})\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\xi} \quad \text{на} \quad \gamma_2.$$

Обозначим $\tilde{\sigma} = \sigma(\tilde{\boldsymbol{u}})$ и выберем срезающую функцию η, $\eta = 1$ в малой окрестности фиксированной точки на γ_2. В этом случае $\pm(\eta\tilde{\sigma}, 0) \in L$. Выберем в (36) пробную функцию $(\bar{\sigma}, \bar{m}) = (\sigma, m) \pm (\eta\tilde{\sigma}, 0)$. Тогда

$$(B^{-1}\sigma, \eta\tilde{\sigma})_G + (\boldsymbol{u}, \operatorname{div}(\eta\tilde{\sigma}))_G = 0$$

и, следовательно, в силу (37)

$$\langle(\eta\tilde{\sigma})\boldsymbol{n}, \boldsymbol{u}\rangle_{1/2,\partial G} = 0.$$

Это соотношение может быть записано в виде

$$\langle\tilde{\sigma}\boldsymbol{n}, \eta\boldsymbol{u}\rangle_{1/2,\partial G} = 0. \tag{47}$$

В то же время из тождества (46) следует соотношение

$$\langle\tilde{\sigma}\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}\rangle_{1/2,\partial G} = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{v})_{\gamma_2} \qquad \forall \boldsymbol{v} = (v_1, v_2) \in H^1_{\gamma_1}(G). \tag{48}$$

Поскольку $\eta\boldsymbol{u} = (\eta u_1, \eta u_2) \in H^1_{\gamma_1}(G)$, из (47), (48) находим

$$(\boldsymbol{\xi}, \eta\boldsymbol{u})_{\gamma_2} = 0.$$

В силу произвольности $\boldsymbol{\xi}$ выполняется равенство $\eta\boldsymbol{u} = 0$ на γ_2, откуда следует необходимое краевое условие (44).

Докажем, что решение задачи (33)–(36) удовлетворяет краевому условию

$$\boldsymbol{un}\sin\alpha + w \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{49}$$

Рассмотрим решение $\tilde{w}$ задачи

$$\tilde{w} \in H^2_\Gamma(\Omega_\gamma); \tag{50}$$

$$a_{\Omega_\gamma}(\tilde{w}, v) - (f, v)_{\Omega_\gamma} - (\varphi, v)_{\gamma^+} = 0 \quad \forall v \in H^2_\Gamma(\Omega_\gamma), \tag{51}$$

где $\varphi \in L^2(\gamma)$ — произвольная функция ($\varphi \geqslant 0$). Индекс γ^+ означает, что берется след функции v на берегу γ^+. Решение этой задачи удовлетворяет соотношениям

$$\Delta^2\tilde{w} = f \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma,$$

$$\tilde{w} = \tilde{w}_q = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma,$$

$$m(\tilde{w}) = 0 \quad \text{на} \quad \gamma^\pm,$$

$$t^\nu(\tilde{w}) = \varphi \quad \text{на} \quad \gamma^+, \qquad t^\nu(\tilde{w}) = 0 \quad \text{на} \quad \gamma^-.$$

Найдем также решение $\tilde{u}$ задачи

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \in H^1_{\gamma_0}(G); \tag{52}$$

$$(\sigma(\tilde{\boldsymbol{u}}), \varepsilon(\boldsymbol{v}))_G - (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{v})_G - (\varphi\sin\alpha, v_n)_\gamma = 0 \quad \forall \boldsymbol{v} = (v_1, v_2) \in H^1_{\gamma_0}(G), \tag{53}$$

где $\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{vn}$; $\sigma(\tilde{\boldsymbol{u}}) = B\varepsilon(\tilde{\boldsymbol{u}})$. Очевидно, что $\tilde{\boldsymbol{u}}$ удовлетворяет уравнениям и краевым условиям

$$-\operatorname{div}(B\varepsilon(\tilde{\boldsymbol{u}})) = \boldsymbol{g} \quad \text{в} \quad G,$$

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_0,$$

$$\sigma_n(\tilde{\boldsymbol{u}}) = -\varphi \sin\alpha, \qquad \boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}}) = 0 \quad \text{на} \quad \gamma.$$

Определим тензоры $\tilde{\sigma} = \sigma(\tilde{\boldsymbol{u}})$, $\tilde{m} = \{\tilde{m}_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, $\tilde{m} = D\nabla\nabla\tilde{w}$. Тогда функция $(\bar{\sigma}, \bar{m}) = (\sigma, m) + (\tilde{\sigma}, \tilde{m})$ может быть выбрана в (36) в качестве пробной. Действительно, $\tilde{\sigma}_n \leqslant 0$, $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_\tau = 0$, $[\tilde{m}_\nu] = 0$ на γ. Более того, из тождества (51) следует

$$\langle [T^\nu(\tilde{m})], \bar{w}\rangle_{3/2,\Sigma} = (\varphi, \bar{w})_\gamma \qquad \forall \bar{w} \in H_0^2(\Omega),$$

а из (53) —

$$-\langle \tilde{\sigma}_n, \bar{\boldsymbol{u}}_n\rangle^{00}_{1/2,\gamma} = (\varphi, \bar{\boldsymbol{u}}_n \sin\alpha)_\gamma \qquad \forall \bar{\boldsymbol{u}} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in H^1_{\gamma_0}(G).$$

Складывая два последних соотношения, получаем равенство

$$\langle [T^\nu(\tilde{m})], \bar{w}\rangle_{3/2,\Sigma} - \langle \tilde{\sigma}_n, \bar{\boldsymbol{u}}_n\rangle^{00}_{1/2,\gamma} = (\varphi, \bar{w} + \bar{\boldsymbol{u}}_n \sin\alpha)_\gamma. \tag{54}$$

Если $\bar{w} + \bar{\boldsymbol{u}}_n \sin\alpha \geqslant 0$ на γ, т. е. $(\bar{\boldsymbol{u}}, \bar{w}) \in K$, то правая часть (54) неотрицательна и $(\tilde{\sigma}, \tilde{m}) \in L$, а следовательно, $(\bar{\sigma}, \bar{m}) = (\sigma, m) + (\tilde{\sigma}, \tilde{m}) \in L$. Поэтому, подставляя $(\bar{\sigma}, \bar{m})$ в (36), получаем

$$(B^{-1}\sigma, \tilde{\sigma})_G + (\boldsymbol{u}, \operatorname{div}\tilde{\sigma})_G + (D^{-1}m, \tilde{m})_{\Omega_\gamma} - (w, \nabla\nabla\tilde{m})_{\Omega_\gamma} \geqslant 0.$$

Отсюда следует неравенство

$$\langle [T^\nu(\tilde{m})], w\rangle_{3/2,\Sigma} - \langle \tilde{\sigma}_n, \boldsymbol{u}_n\rangle^{00}_{1/2,\gamma} \geqslant 0$$

и (в силу (54)) неравенство

$$(\varphi, w + \boldsymbol{u}_n \sin\alpha)_\gamma \geqslant 0.$$

Поскольку функции $\varphi \geqslant 0$ произвольны, получаем неравенство $w + \boldsymbol{u}_n \sin\alpha \geqslant 0$ на γ, из которого следует справедливость (49).

Наконец, покажем, что решение задачи (33)–(36) удовлетворяет граничному условию

$$\sigma_n(\boldsymbol{u}\boldsymbol{n}\sin\alpha + w) = 0 \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{55}$$

Выберем $(\bar{\sigma}, \bar{m}) = (0, 0)$, $(\bar{\sigma}, \bar{m}) = 2(\sigma, m)$ в качестве пробных функций в (36). Тогда

$$(B^{-1}\sigma, \sigma)_G + (\boldsymbol{u}, \operatorname{div}\sigma)_G + (D^{-1}m, m)_{\Omega_\gamma} - (w, \nabla\nabla m)_{\Omega_\gamma} = 0,$$

следовательно,

$$\langle [T^\nu(m)], w\rangle_{3/2,\Sigma} - \langle \sigma_n, \boldsymbol{u}_n\rangle^{00}_{3/2,\gamma} = 0,$$

что с учетом последнего соотношения в (32) означает справедливость (55).

1.2. Переход к пределу в задаче А. Для упрощения некоторые параметры в задаче (1)–(6) приняты равными единице. В действительности модель содержит ряд физических и геометрических параметров, исследование зависимости от которых, безусловно, представляет интерес. Выполним предельные переходы по параметрам жесткости пластин. Для этого проанализируем два случая.

1. Вместо закона Гука $\sigma = B\varepsilon(\boldsymbol{u})$ в (1) рассмотрим семейство законов

$$\sigma^\beta = \beta^{-1}B\varepsilon(\boldsymbol{u}), \qquad \beta > 0 \tag{56}$$

и выполним предельный переход при $\beta \to 0$, который соответствует случаю, когда жесткость нижней пластины стремится к бесконечности. Предельная задача соответствует контакту верхней пластины с тонким жестким (недеформируемым) препятствием.

2. Вместо уравнения (2) рассмотрим семейство уравнений

$$\beta^{-1}\Delta^2 w = f, \qquad \beta > 0$$

и осуществим предельный переход при $\beta \to 0$, который описывает возрастание до бесконечности жесткости верхней пластины. В пределе нижняя пластина контактирует с жестким препятствием на γ.

Сначала рассмотрим случай 1. Для любого фиксированного $\beta > 0$ имеем единственное решение задачи

$$(\boldsymbol{u}^\beta, w^\beta) \in K; \tag{57}$$

$$(\sigma^\beta(\boldsymbol{u}^\beta), \varepsilon(\bar{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u}^\beta))_G - (\boldsymbol{g}, \bar{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u}^\beta)_G + a_\Omega(w^\beta, \bar{w} - w^\beta) - (f, \bar{w} - w^\beta)_\Omega \geqslant 0 \quad \forall (\bar{\boldsymbol{u}}, \bar{w}) \in K \tag{58}$$

($\sigma^\beta(\boldsymbol{u}^\beta) = \sigma^\beta$ определены в (56)). Подставляя $(\bar{\boldsymbol{u}}, \bar{w}) = (0,0)$, $(\bar{\boldsymbol{u}}, \bar{w}) = 2(\boldsymbol{u}^\beta, w^\beta)$ в (58) в качестве пробных функций, найдем

$$(\sigma^\beta(\boldsymbol{u}^\beta), \varepsilon(\boldsymbol{u}^\beta))_G - (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{u}^\beta)_G + a_\Omega(w^\beta, w^\beta) - (f, w^\beta)_\Omega = 0. \tag{59}$$

Из соотношения (59) следуют две оценки

$$\|w^\beta\|_{H_0^2(\Omega)} \leqslant c_1, \qquad \beta^{-1}\|\boldsymbol{u}^\beta\|^2_{H^1_{\gamma_0}(G)} \leqslant c_2$$

с постоянными c_1, c_2, равномерными по β. Можно считать, что для подпоследовательности с прежним обозначением $\boldsymbol{u}^\beta$, w^β имеет место сходимость при $\beta \to 0$:

$$w^\beta \to w^0 \quad \text{слабо в} \quad H_0^2(\Omega),$$

$$\boldsymbol{u}^\beta \to 0 \quad \text{сильно в} \quad H^1_{\gamma_0}(G).$$

Так как $\boldsymbol{u}^\beta \boldsymbol{n} \sin\alpha + w^\beta \geqslant 0$ на γ, предельная функция w^0 удовлетворяет неравенству

$$w^0 \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{60}$$

Выберем $\bar{w} \in H_0^2(\Omega)$, $\bar{w} \geqslant 0$ на γ. Тогда $(0, \bar{w}) \in K$. Подставив элемент $(0, \bar{w})$ в (58) в качестве пробной функции, получим

$$a_\Omega(w^\beta, \bar{w} - w^\beta) - (f, \bar{w} - w^\beta)_\Omega \geqslant \beta^{-1}(\sigma(\boldsymbol{u}^\beta), \varepsilon(\boldsymbol{u}^\beta))_G - (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{u}^\beta)_G.$$

Поскольку

$$\liminf_{\beta \to 0} \frac{1}{\beta}\,(\sigma(\boldsymbol{u}^\beta), \varepsilon(\boldsymbol{u}^\beta))_G \geqslant 0,$$

из предыдущего неравенства следует

$$w^0 \in M; \tag{61}$$

$$a_\Omega(w^0, \bar{w} - w^0) - (f, \bar{w} - w^0)_\Omega \geqslant 0 \qquad \forall \bar{w} \in M. \tag{62}$$

Здесь

$$M = \{v \in H_0^2(\Omega) \colon v \geqslant 0 \text{ на } \gamma\}.$$

Задача (61), (62) описывает контакт пластины с тонким жестким препятствием, расположенным вдоль γ. Как и выше, в задаче (61), (62) можно найти полную систему краевых условий, выполняющихся на γ, которые имеют вид

$$[w^0] = [w^0_\nu] = 0, \qquad [m(w^0)] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma,$$

$$w^0 \geqslant 0, \qquad [t^\nu(w^0)] \geqslant 0, \qquad [t^\nu(w^0)]w^0 = 0 \quad \text{на} \quad \gamma.$$

Рассмотрим случай 2. Для любого фиксированного $\beta > 0$ существует единственное решение вариационного неравенства

$$(\boldsymbol{u}^\beta, w^\beta) \in K; \tag{63}$$

$$(\sigma(\boldsymbol{u}^\beta), \varepsilon(\bar{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u}^\beta))_G - (\boldsymbol{g}, \bar{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u}^\beta)_G + \beta^{-1} a_\Omega(w^\beta, \bar{w} - w^\beta) - (f, \bar{w} - w^\beta)_\Omega \geqslant 0 \quad \forall (\bar{u}, \bar{w}) \in K. \tag{64}$$

Из (64) следует соотношение

$$(\sigma(\boldsymbol{u}^\beta), \varepsilon(\boldsymbol{u}^\beta))_G - (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{u}^\beta)_G + \beta^{-1} a_\Omega(w^\beta, w^\beta) - (f, w^\beta)_\Omega = 0,$$

которое обеспечивает справедливость равномерных по β оценок

$$\beta^{-1} \|w^\beta\|^2_{H^2_0(\Omega)} \leqslant c_3, \qquad \|\boldsymbol{u}^\beta\|_{H^1_{\gamma_0}(G)} \leqslant c_4.$$

Выбирая подпоследовательность, можно предположить, что при $\beta \to 0$

$$w^\beta \to 0 \quad \text{сильно в} \quad H^2_0(\Omega),$$

$$\boldsymbol{u}^\beta \to \boldsymbol{u}^0 \quad \text{слабо в} \quad H^1_{\gamma_0}(G).$$

Очевидно, предельная функция $\boldsymbol{u}^0$ удовлетворяет неравенству

$$\boldsymbol{u}^0 \boldsymbol{n} \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{65}$$

Выбрав в (64) пробные функции в виде $(\bar{\boldsymbol{u}}, 0)$, $\bar{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{n} \geqslant 0$ на γ, $\bar{\boldsymbol{u}} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in H^1_{\gamma_0}(G)$, получим

$$(f, w^\beta)_\Omega + (\sigma(\boldsymbol{u}^\beta), \varepsilon(\bar{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u}^\beta))_G - (\boldsymbol{g}, \bar{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u}^\beta)_G \geqslant \beta^{-1} a_\Omega(w^\beta, w^\beta). \tag{66}$$

В силу соотношения

$$\liminf_{\beta \to 0} \frac{1}{\beta} a_\Omega(w^\beta, w^\beta) \geqslant 0$$

можно осуществить переход к нижнему пределу в (66), что приводит к следующему вариационному неравенству:

$$\boldsymbol{u}^0 \in N; \tag{67}$$

$$(\sigma(\boldsymbol{u}^0), \varepsilon(\bar{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u}^0))_G - (\boldsymbol{g}, \bar{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u}^0)_G \geqslant 0 \quad \forall \bar{\boldsymbol{u}} \in N, \tag{68}$$

где

$$N = \{\boldsymbol{v} = (v_1, v_2) \in H^1_{\gamma_0}(G)\colon \quad \boldsymbol{v}\boldsymbol{n} \geqslant 0 \text{ на } \gamma\}.$$

Заметим, что предельная задача (67), (68) совпадает с классической задачей Синьорини в области G (см. [1]).

2. ЗАДАЧА Б

2.1. Постановка задачи Б. Рассмотрим случай, когда обе пластины подвергнуты лишь изгибу. Геометрия задачи такая же, как в задаче А (см. рисунок). Сначала приведем дифференциальную постановку задачи. Необходимо найти функции $v(\boldsymbol{x})$, $w(\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in G$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2) \in \Omega_\gamma$, такие что

$$\Delta^2 v = h \quad \text{в} \quad G; \tag{69}$$

$$\Delta^2 w = f \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma; \tag{70}$$

$$v = v_n = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_0; \tag{71}$$

$$w = w_q = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma; \tag{72}$$

$$w - v\cos\alpha \geqslant 0, \qquad t^n(v)(w - v\cos\alpha) = 0 \quad \text{на} \quad \gamma; \tag{73}$$

$$[w] = [w_\nu] = 0, \qquad [m(w)] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma; \tag{74}$$

$$t^n(v) \leqslant 0, \qquad m(v) = 0, \qquad [t^\nu(w)]\cos\alpha = -t^n(v) \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{75}$$

Здесь

$$v_n = \frac{\partial v}{\partial n}, \quad m(w) = \varkappa_1 \Delta w + (1 - \varkappa_1)\,\frac{\partial^2 w}{\partial \nu^2}, \quad t^\nu(w) = \frac{\partial}{\partial \nu}\Big(\Delta w + (1 - \varkappa_1)\,\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\Big).$$

Величины $m(v)$, $t^n(v)$ определяются аналогично $m(w)$, $t^\nu(w)$:

$$m(v) = \varkappa_2 \Delta v + (1 - \varkappa_2)\,\frac{\partial^2 v}{\partial n^2}, \qquad t^n(v) = \frac{\partial}{\partial n}\Big(\Delta v + (1 - \varkappa_2)\,\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}\Big).$$

Здесь $\varkappa_2$ — коэффициент Пуассона для второй пластины; $(\tau_1, \tau_2) = (-n_2, n_1)$. Функция v описывает вертикальные (нормальные) перемещения нижней пластины, а функции $h \in L^2(G)$, $f \in L^2(\Omega)$ считаются заданными.

Ниже доказывается разрешимость задачи (69)–(75). С этой целью приведем вариационную формулировку задачи.

Введем пространство Соболева

$$H^2_{\gamma_0}(G) = \{v \in H^2(G)\colon v = v_n = 0 \text{ на } \gamma_0\}$$

и множество допустимых перемещений

$$S = \{(v, w)\colon v \in H^2_{\gamma_0}(G),\ w \in H^2_0(\Omega),\ w - v\cos\alpha \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \gamma\}.$$

Для нижней пластины будем использовать следующую билинейную форму:

$$a_G(v, \bar v) = \int\limits_G (v_{,11}\bar v_{,11} + v_{,22}\bar v_{,22} + \varkappa_2(v_{,11}\bar v_{,22} + v_{,22}\bar v_{,11}) + 2(1 - \varkappa_2)v_{,12}\bar v_{,12}).$$

Рассмотрим функционал энергии

$$\Pi(v, w) = a_G(v, v)/2 + a_\Omega(w, w)/2 - (h, v)_G - (f, w)_\Omega$$

и задачу минимизации

$$\inf_{(v,w)\in S} \Pi(v, w), \tag{76}$$

которая эквивалентна вариационному неравенству

$$(v, w) \in S; \tag{77}$$

$$a_G(v, \bar v - v) + a_\Omega(w, \bar w - w) - (h, \bar v - v)_G - (f, \bar w - w)_\Omega \geqslant 0 \quad \forall (\bar v, \bar w) \in S. \tag{78}$$

Множество S слабозамкнуто в пространстве $H^2_{\gamma_0}(G) \times H^2_0(\Omega)$, а функционал Π коэрцитивен и слабополунепрерывен снизу на этом пространстве. Следовательно, задача минимизации (76) имеет решение, удовлетворяющее вариационному неравенству (77), (78). Решение является единственным.

Из (77), (78) выведем уравнения и краевые условия (69)–(75) и выясним, в каком смысле выполнены условия (73)–(75).

Заметим, что уравнения (69), (70) следуют из (78) и выполнены в смысле распределений. Действительно, в (78) можно подставить пробные функции $(\bar v, \bar w) = (v \pm \varphi, w \pm \psi)$, $\varphi \in C^\infty_0(G)$, $\psi \in C^\infty_0(\Omega_\gamma)$, откуда следует справедливость (69), (70).

Как и в п. 1, рассмотрим продолжение кривой γ до замкнутой кривой Σ класса $C^{1,1}$, так что $\Sigma \subset \Omega$. Будем считать, что вектор $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$ определен на всей кривой Σ, являясь внешним по отношению к Ω_1. Выберем $(\bar{v},\bar{w}) = (v, w+\psi)$ в качестве пробных функций в (78), причем $\psi \geqslant 0$ на γ, $\psi \in H_0^2(\Omega)$. Отсюда следует неравенство

$$a_\Omega(w,\psi) - (f,\psi)_\Omega \geqslant 0. \tag{79}$$

Формула Грина (18) вместе с (70) позволяет получить из (79) следующее неравенство:

$$-\langle [m(w)], \psi_\nu \rangle_{1/2,\Sigma} + \langle [t^\nu(w)], \psi \rangle_{3/2,\Sigma} \geqslant 0.$$

Поскольку ψ_ν произвольны на Σ, имеем

$$[m(w)] = 0 \quad \text{в смысле} \quad H^{-1/2}(\Sigma); \tag{80}$$

$$\langle [t^\nu(w)], \psi \rangle_{3/2,\Sigma} \geqslant 0 \quad \forall \psi \in H_0^2(\Omega), \qquad \psi \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{81}$$

Выберем $(\bar{v},\bar{w}) = (v+\varphi, w)$ в качестве пробных функций в (78), причем $\varphi \in H^2_{\gamma_0}(G)$, $\varphi \leqslant 0$ на γ. Тогда имеем неравенство

$$a_G(v,\varphi) - (h,\varphi)_G \geqslant 0. \tag{82}$$

С учетом уравнения равновесия (69) и формулы вида (18) для области G получаем

$$-\langle m(v), \varphi_n \rangle_{1/2,\partial G} + \langle t^n(v), \varphi \rangle_{3/2,\partial G} \geqslant 0. \tag{83}$$

Заметим, что $\boldsymbol{n}$ — внутренняя нормаль к ∂G, поэтому перед вторым слагаемым в неравенстве (83) стоит знак "плюс", а перед первым — "минус". В данном случае $\varphi = \varphi_n = 0$ на $\partial G \setminus \gamma$. Следовательно, $\varphi \in H_{00}^{3/2}(\gamma)$, $\varphi_n \in H_{00}^{1/2}(\gamma)$. Поэтому неравенство (83) можно записать в виде

$$-\langle m(v), \varphi_n \rangle^{00}_{1/2,\gamma} + \langle t^n(v), \varphi \rangle^{00}_{3/2,\gamma} \geqslant 0 \quad \forall \varphi \in H_{00}^{3/2}(\gamma), \qquad \varphi \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \gamma,$$

откуда следуют два условия

$$m(v) = 0 \quad \text{в смысле} \quad H_{00}^{-1/2}(\gamma); \tag{84}$$

$$t^n(v) \leqslant 0 \quad \text{в смысле} \quad H_{00}^{-3/2}(\gamma). \tag{85}$$

Аналогично, предполагая, что $\psi = 0$ вне γ, т. е. $\psi = 0$ на $\Sigma \setminus \gamma$, из (81) получаем

$$[t^\nu(w)] \geqslant 0 \quad \text{в смысле} \quad H_{00}^{-3/2}(\gamma). \tag{86}$$

Подставив $(\bar{v},\bar{w}) = (v,w) \pm (\varphi,\psi)$ в (78) в виде пробных функций, где $(\varphi,\psi) \in S$, $-\varphi\cos\alpha + \psi = 0$ на γ, получим

$$a_G(v,\varphi) + a_\Omega(w,\psi) - (h,\varphi)_G - (f,\psi)_\Omega = 0.$$

В силу (69), (70), (80), (84) из этого соотношения следует

$$\langle t^n(v), \varphi \rangle_{3/2,\partial G} + \langle [t^\nu(w)], \psi \rangle_{3/2,\Sigma} = 0.$$

Предполагая, что $\psi = 0$ на Σ вне γ, отсюда находим

$$[t^\nu(w)] \cos\alpha = -t^n(v) \quad \text{в смысле} \quad H_{00}^{-3/2}(\gamma). \tag{87}$$

Выберем в (78) $(\bar{v},\bar{w}) = (v,w) + (\varphi,\psi)$, причем $(\varphi,\psi) \in S$. В результате имеем

$$a_G(v,\varphi) + a_\Omega(w,\psi) - (h,\varphi)_G - (f,\psi)_\Omega \geqslant 0 \qquad \forall (\varphi,\psi) \in S.$$

Значит,

$$\langle t^n(v), \varphi \rangle^{00}_{3/2,\gamma} + \langle [t^\nu(w)], \psi \rangle_{3/2,\Sigma} \geqslant 0 \quad \forall (\varphi,\psi) \in S. \tag{88}$$

Из полученного неравенства следует точная запись краевых условий

$$t^n(v) \leqslant 0, \qquad [t^\nu(w)] \cos\alpha = -t^n(v) \quad \text{на} \quad \gamma.$$

Заметим, что (86), (87) можно получить из (88).

Подставляя $(\bar{v}, \bar{w}) = (0, 0)$, $(\bar{v}, \bar{w}) = 2(v, w)$ в (78) в качестве пробных функций, имеем

$$a_G(v, v) + a_\Omega(w, w) - (h, v)_G - (f, w)_\Omega = 0.$$

Следовательно,

$$\langle t^n(v), v\rangle^{00}_{3/2,\gamma} + \langle [t^\nu(w)], w\rangle_{3/2,\Sigma} = 0. \tag{89}$$

Полученное соотношение представляет собой точную запись граничных условий (см. (73), (75))

$$[t^\nu(w)] \cos\alpha = -t^n(v), \qquad t^n(v)(w - v\cos\alpha) = 0 \quad \text{на} \quad \gamma.$$

В заключение отметим, что вариационное неравенство (77), (78) можно вывести из (69)–(75). Таким образом, система краевых условий (73)–(75) является полной на γ.

2.2. Переход к пределу в задаче Б. Изучается предельный переход при стремлении параметра, характеризующего жесткость пластины, к нулю. Для этого вместо уравнения (69) рассмотрим семейство уравнений, зависящих от параметра β:

$$\beta^{-1}\Delta^2 v = h, \qquad \beta > 0.$$

Задача заключается в обосновании предельного перехода при $\beta \to 0$, что соответствует стремлению жесткости нижней пластины к бесконечности.

Рассмотрим вариационную формулировку задачи для каждого фиксированного $\beta > 0$. Существует единственное решение v^β, w^β следующей задачи:

$$(v^\beta, w^\beta) \in S; \tag{90}$$

$$\beta^{-1} a_G(v^\beta, \bar{v} - v^\beta) + a_\Omega(w^\beta, \bar{w} - w^\beta) - (h, \bar{v} - v^\beta)_G - (f, \bar{w} - w^\beta)_\Omega \geqslant 0 \quad \forall(\bar{v}, \bar{w}) \in S. \tag{91}$$

Подставляя $(\bar{v}, \bar{w}) = (0, 0)$, $(\bar{v}, \bar{w}) = 2(v^\beta, w^\beta)$ в (91), получаем равенство

$$\beta^{-1} a_G(v^\beta, v^\beta) + a_\Omega(w^\beta, w^\beta) - (h, v^\beta)_G - (f, w^\beta)_\Omega = 0, \tag{92}$$

из которого следуют две оценки

$$\|w^\beta\|^2_{H^2_0(\Omega)} \leqslant c_5, \qquad \beta^{-1}\|v^\beta\|^2_{H^2_{\gamma_0}(G)} \leqslant c_6 \tag{93}$$

с постоянными c_5, c_6, равномерными по β. Предположим, что подпоследовательность с прежним обозначением v^β, w^β при $\beta \to 0$ обладает следующим свойством:

$$w^\beta \to w^0 \quad \text{слабо в} \quad H^2_0(\Omega), \tag{94}$$

$$v^\beta \to 0 \quad \text{сильно в} \quad H^2_{\gamma_0}(G). \tag{95}$$

Поскольку $-v^\beta \cos\alpha + w^\beta \geqslant 0$ на γ, предельная функция w^0 удовлетворяет неравенству

$$w^0 \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{96}$$

Выберем в неравенстве (91) пробные функции в виде $(0, \bar{w})$, причем $\bar{w} \in H^2_0(\Omega)$, $\bar{w} \geqslant 0$ на γ. Тогда

$$a_\Omega(w^\beta, \bar{w} - w^\beta) \geqslant \beta^{-1} a_G(v^\beta, v^\beta) + (h, v^\beta)_G - (f, \bar{w} - w^\beta)_\Omega.$$

Поскольку

$$\liminf_{\beta\to 0} \frac{1}{\beta}\, a_G(v^\beta, v^\beta) \geqslant 0,$$

из полученного выше неравенства находим

$$w^0 \in M; \tag{97}$$

$$a_\Omega(w^0, \bar{w} - w^0) - (f, \bar{w} - w^0)_\Omega \geqslant 0 \qquad \forall \bar{v} \in M, \tag{98}$$

где

$$M = \{u \in H_0^2(\Omega)\colon u \geqslant 0 \text{ на } \gamma\}.$$

Таким образом, предельная задача (97), (98) описывает контакт верхней пластины с тонким жестким препятствием, расположенным вдоль γ.

В действительности можно показать, что имеет место более сильная сходимость по сравнению с (94), (95). Для доказательства этого утверждения заметим, что из (92) следует

$$\limsup_{\beta\to 0} \frac{1}{\beta} a_G(v^\beta, v^\beta) = \limsup_{\beta\to 0}\{-a_\Omega(w^\beta, w^\beta) + (h, v^\beta)_\Omega + (f, w^\beta)_\Omega\} \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{\beta\to 0}\{-a_\Omega(w^\beta, w^\beta)\} + \limsup_{\beta\to 0}(h, v^\beta)_G + \limsup_{\beta\to 0}(f, w^\beta)_\Omega \leqslant$$

$$\leqslant -a_\Omega(w^0, w^0) + (f, w^0)_\Omega.$$

В то же время из (98) следует

$$a_\Omega(w^0, w^0) = (f, w^0)_\Omega. \tag{99}$$

Таким образом, из приведенных выше рассуждений получаем соотношения

$$0 \leqslant \liminf_{\beta\to 0} \frac{1}{\beta} a_G(v^\beta, v^\beta) \leqslant \limsup_{\beta\to 0} \frac{1}{\beta} a_G(v^\beta, v^\beta) \leqslant 0,$$

которые доказывают следующую сходимость при $\beta \to 0$:

$$\beta^{-1} a_G(v^\beta, v^\beta) \to 0. \tag{100}$$

Отсюда наряду с (95) получаем свойство

$$v^\beta/\sqrt{\beta} \to 0 \quad \text{сильно в} \quad H^2_{\gamma_0}(G).$$

Далее, наряду со сходимостью (94) можно доказать сходимость

$$w^\beta \to w^0 \quad \text{сильно в} \quad H_0^2(\Omega). \tag{101}$$

Действительно, поскольку слабая сходимость последовательности w^β к w^0 установлена, достаточно показать, что при $\beta \to 0$

$$a_\Omega(w^\beta, w^\beta) \to a_\Omega(w^0, w^0). \tag{102}$$

Из (92) получаем

$$a_\Omega(w^\beta, w^\beta) = -a_G(v^\beta, v^\beta)/\beta + (h, v^\beta)_G + (f, w^\beta)_\Omega.$$

В силу (95), (100) выражение в правой части этого неравенства имеет предел, равный $(f, w^0)_\Omega$, т. е. при $\beta \to 0$

$$\lim a_\Omega(w^\beta, w^\beta) = (f, w^0)_\Omega.$$

С учетом (99) получаем (102), что и доказывает сходимость (101).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Фикера Г.** Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.
2. **Khludnev A. M.** Modelling and control in solid mechanics / A. M. Khludnev, J. Sokolowski. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser, 1997.
3. **Хлуднев А. М.** Об экстремальных формах разрезов в пластине // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1992. № 1. С. 170–176.
4. **Khludnev A. M.** Analysis of cracks in solids / A. M. Khludnev, V. A. Kovtunenko. Southampton; Boston: WIT Press, 2000.
5. **Хлуднев А. М.** Теория трещин с возможным контактом берегов // Успехи механики. 2005. Т. 3, № 4. С. 41–82.
6. **Хлуднев А. М., Хоффманн К.-Х., Боткин Н. Д.** Вариационная задача о контакте упругих объектов разных размерностей // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 707–717.
7. **Caffarelli L. A., Friedman A.** The obstacle problem for the biharmonic operator // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1979. Ser. IV. V. 6, N 1. P. 151–184.
8. **Caffarelli L. A., Friedman A., Torelli A.** The two-obstacle problem for the biharmonic operator // Pacific J. Math. 1982. V. 103, N 3. P. 325–335.
9. **Dal Maso G., Paderni G.** Variational inequalities for the biharmonic operator with varying obstacles // Ann. Mat. Pura Appl. 1988. V. 153. P. 203–227.
10. **Schild B.** On the coincidence set in biharmonic variational inequalities with thin obstacles // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1986. Cl. Sci. Ser. IV. V. 13, N 4. P. 559–616.
11. **Grisvard P.** Elliptic problems in nonsmooth domains. Boston; L.; Melbourne: Pitman, 1985.
12. **Темам Р.** Математические задачи теории пластичности. М.: Наука, 1991.

Поступила в редакцию 6/VI 2007 г.