УДК 539.32

НЕСТАБИЛЬНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНОГО ТЕЛА

М. Н. Кирсанов

Национальный исследовательский университет "МЭИ", 111250 Москва
E-mail: mpei2004@yandex.ru

Рассмотрена возможность вырождения связи напряжений с их производными по координатам в плоской задаче теории упругости. Для конкретных зависимостей параметров упругости от координат приведены кривые, для которых выполняются условия вырождения. Показано, что даже малая неоднородность среды вызывает нестабильность напряжений.

Ключевые слова: нестабильность, плоская задача теории упругости, неоднородная среда.

Теоретические и прикладные задачи нестабильности дифференциальных уравнений, в которых переменной является время, рассмотрены в [1, 2]. В частности, изучена задача о выпучивании сжатого стержня из нелинейного реологического материала, решение которой основано на вырождении связи между функцией прогиба и ее производными по времени. Однако аналогичная постановка задачи о вырождении возможна и для пространственных производных. В настоящей работе приведены примеры такого вырождения в плоской задаче теории упругости.

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоскую задачу теории упругости для некоторой изотропной неоднородной среды. Пусть модуль Юнга и коэффициент Пуассона зависят от координат: $\nu = \nu(x, y)$, $E = E(x, y)$. Функцию напряжений F введем с использованием формулы $\sigma_{ij} = \delta_{ij}\nabla^2 F - F_{,ij}$, где $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Справедливо уравнение [3]

$$\nabla^2(\gamma\nabla^2 F) = q_{,xx}F_{,yy} - 2q_{,xy}F_{,xy} + q_{,yy}F_{,xx}, \tag{1}$$

где $q(x, y) = (1+\nu)/E$; $\gamma(x, y) = 1/E$ в случае плоской деформации, $\gamma = (1-\nu^2)/E$ в случае плоского напряженного состояния.

Запишем систему трех уравнений, первое из которых — уравнение (1), а второе и третье получаются дифференцированием первого уравнения по x, y соответственно. Вводится предположение о дифференцируемости функций по координатам x, y. Запишем в левой части системы величины $F_{,xx}$, $F_{,xy}$, $F_{,yy}$, в правой — все остальные слагаемые. В результате система принимает вид

$$A\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{X} = \{F_{,xx}, F_{,xy}, F_{,yy}\} = \{\sigma_{xx}, -\sigma_{xy}, \sigma_{yy}\}$ — вектор напряжений; вектор $\boldsymbol{B}$ зависит от частных производных третьего, четвертого и пятого порядка от функции напряжений. Элементы несимметричной матрицы A имеют вид $a_{11} = \nabla^2\gamma - q_{,yy}$, $a_{12} = 2q_{,xy}$,

$a_{13} = \nabla^2\gamma - q_{,xx}$, $a_{2k} = a_{1k,x}$, $a_{3k} = a_{1k,y}$ $(k = 1, 2, 3)$. Равенство нулю определителя системы (2) означает вырождение связи между напряжениями и их производными. В общем случае неоднородности определитель зависит от координат, следовательно, вблизи некоторых кривых, определяемых уравнением $\det A = 0$, напряжения могут неограниченно расти, если для этих кривых заданы величины (в том числе градиенты напряжений), входящие в правую часть системы (2).

Возможно также другое объяснение эффекта обращения в нуль определителя матрицы A. Если для так называемых кривых нестабильности известны напряжения, то согласно (2) для производных напряжений по координатам x и y для этих кривых допустимы нулевые значения при любых значениях напряжений. Таким образом, не решая сложные дифференциальные уравнения в частных производных с переменными коэффициентами, с помощью предложенной системы можно получить полезную информацию.

Рассмотрим случай малой неоднородности. Пусть $\nu = \nu_0 + f(x, y)$, $E = E_0(1 + h(x, y))$, где $\nu_0 = \mathrm{const}$, $E_0 = \mathrm{const}$ — упругие характеристики некоторого однородного тела. При этом в области определения добавочные слагаемые, характеризующие неоднородность, будем считать малыми величинами, но не для того, чтобы упростить решение, раскладывая его по малому параметру, а для того, чтобы оценить влияние неучтенной (или не замеченной в эксперименте) неоднородности. Очевидно, что для существенно неоднородных тел искажения напряженного состояния, вызванные этой неоднородностью, будут значительными. Представляет интерес распределение особых точек для напряжений с весьма малыми (меньше погрешности измерения упругих констант) возмущениями свойств. Такая неоднородность может быть результатом моделирования композитной среды или являться следствием предварительных упругих или неупругих (после разгрузки) деформаций. Кроме того, аналогичные уравнения с переменными коэффициентами характерны для задач термоупругости [4].

В стандартных задачах такая неоднородность, как правило, не учитывается.

2. Примеры. Для получения конкретных результатов и вывода аналитических зависимостей используем систему компьютерной математики Maple [2]. В общем случае уравнение $\det A = 0$ является нелинейной неявной связью x и y. В системе Maple для построения заданных неявно кривых используется оператор implicitplot из пакета plots. Вычисления, преобразования и построение кривых требуют существенных временных затрат, зависящих от точности построения кривых, определяемой параметром numpoints, значение которого выбиралось приближенно равным 100 000.

Рассмотрим функции $E = E_0(1 + bx + cy)$, $\nu = a \sin x + b \sin y + 0{,}4$ в случае плоской деформации. Несмотря на то что эти функции не описывают какие-либо конкретные среды и являются условными, при необходимости можно выбрать нужные коэффициенты, используя экспериментальные данные. Значение E_0 в решение не входит, а коэффициенты a, b, c будем считать малыми величинами, так чтобы в области решения добавочные слагаемые были незначительными: $a = 0{,}001$, $b = 0{,}001$.

На рис. 1 показана эволюция кривых $\det A = 0$ в координатах $x - y$ при различных значениях параметра c. Аналитическое выражение, полученное с использованием системы Maple, является очень громоздким, поэтому в данной работе не приводится. На рис. 2 представлена эволюция кривых нестабильности напряжений при $a = 0{,}001$, $c = 0{,}001$, $b = 0{,}02 \div 0{,}08$.

Рассмотрим другие зависимости параметров E, ν от координат x, y. Пусть оба параметра меняются по аналогичным законам: $E = E_0(1 + ay \sin x)$, $\nu = \nu_0 + ay \sin x$. Здесь степенью неоднородности управляет параметр a. При $\nu_0 = 1/3$ для кривых нестабильности получаем неявную зависимость

$$(ya(8 - 8\sin^2 x + \sin^4 x) - (1 + 2a^2y^2)\sin^3 x + 2\sin x)\sin x = 0. \tag{3}$$

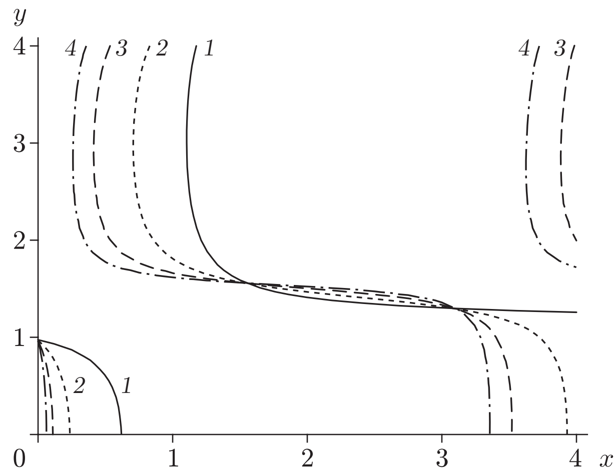

Рис. 1

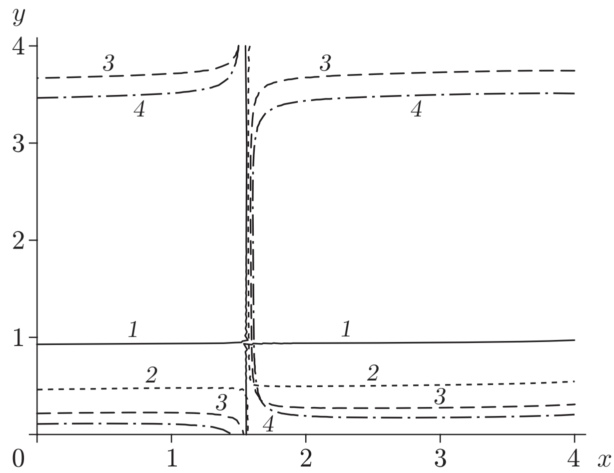

Рис. 2

Рис. 1. Эволюция кривых нестабильности напряжений при различных значениях параметра c:
1 — $c = 0{,}02$; *2* — $c = 0{,}04$; *3* — $c = 0{,}06$; *4* — $c = 0{,}08$

Рис. 2. Эволюция кривых нестабильности напряжений при различных значениях параметра b:
1 — $b = 0{,}02$; *2* — $b = 0{,}04$; *3* — $b = 0{,}06$; *4* — $b = 0{,}08$

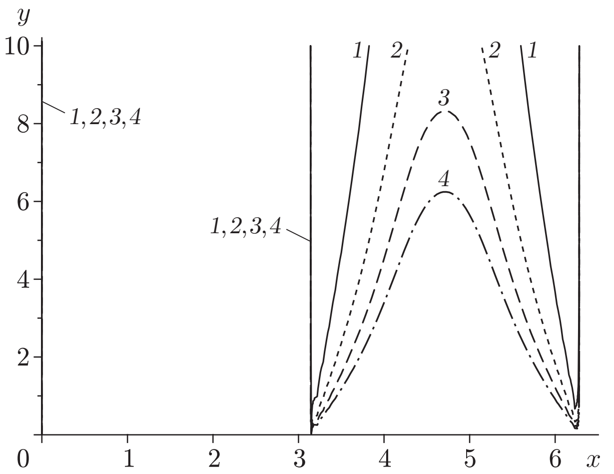

Рис. 3. Эволюция кривых нестабильности напряжений при различных значениях параметра a:
1 — $a = 0{,}02$; *2* — $a = 0{,}04$; *3* — $a = 0{,}06$; *4* — $a = 0{,}08$

Уравнение (3) распадается на два уравнения, одно из которых $\sin x = 0$ описывает вертикальные прямые, расположенные на расстоянии π друг от друга. В силу периодичности закона неоднородности по x, моделирующего, например, волокнистые структуры, распределение кривых также будет периодичным. Следует отметить, что в постановке задачи было принято предположение о дифференцируемости функций. Для волокнистых сред это предположение может быть принято только в том случае, если границы между волокнами и наполнителем сглажены путем замены реальной задачи на ее модель.

На рис. 3 показана эволюция кривых нестабильности напряжений в течение одного периода при изменении параметра a в интервале $a = 0{,}02 \div 0{,}08$.

3. Выводы. На основе известного уравнения для функции напряжений без каких-либо дополнительных предположений и упрощений получены кривые нестабильности напряжений в терминологии [1, 2] для плоской задачи теории упругости. Очевидно, что для однородного упругого тела таких кривых не существует, так же как не существует системы (2). В этом случае правая часть (1) обращается в нуль, а в левой имеются только производные напряжений второго порядка.

Приведенные примеры содержат условные функциональные зависимости параметров упругости от координат, которые могут соответствовать, например, композитным средам. Такие зависимости, по-видимому, не описывают реальные среды и необходимы только для того, чтобы показать, что даже весьма малые отклонения (меньшие погрешности измерения) упругих свойств материала от однородного распределения могут приводить к существенному изменению формы кривых, в точках которых напряжения при определенных условиях являются нестабильными. Эти условия являются следствием неудачной постановки граничных условий (заданы не напряжения, а их производные, т. е. правая часть (2)) либо неудачного выбора метода численного решения задачи. Последний случай может возникнуть при использовании конечно-разностных методов, в которых функции вычисляются через производные. Заметим также, что полученные результаты не зависят от краевых условий задачи, но зависят от области, в которой эта задача решается, т. е. от выбора начала координат и функциональных зависимостей $\nu = \nu(x, y)$, $E = E(x, y)$. Кроме того, подобное вырождение связи напряжения — градиенты напряжений может возникнуть в задаче термоупругости, в которой уравнения также содержат переменные коэффициенты.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кирсанов М. Н.** Точки нестабильности дифференциального уравнения // Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та. Сер. Механика предельного состояния. 2010. № 2. С. 191–197.
2. **Кирсанов М. Н.** Maple и Maplet. Решения задач механики. СПб.: Лань, 2012.
3. **Ломакин В. А.** Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1976.
4. **Новацкий В.** Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970.

Поступила в редакцию 24/II 2012 г.,
в окончательном варианте — 13/XII 2012 г.