

УДК 539.3

DOI: 10.15372/PMTF202315386

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ ЭНДОХРОННОЙ ТЕОРИИ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Г. Н. Кувыркин, Д. Р. Рахимов

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия
E-mails: fn2@bmstu.ru, danrus1996@gmail.com

Для описания нелинейного деформирования изотропных материалов при неизотермических условиях нагружения предлагается использовать соотношения эндохронной теории термопластичности. Приведен вариант определяющих соотношений в интегральной и дифференциальной форме для общего случая нагружения. На основе результатов экспериментов на одноосное растяжение (кручение) определены аналитические зависимости для ряда материальных параметров модели. Для анализа определяющих соотношений предложен численный алгоритм, основанный на методе Эйлера с внутренним итерационным процессом, реализуемым методом Зейделя. Приведен пример численного расчета одноосного растяжения стержня при сложном термосиловом нагружении. Показано, что результаты расчета удовлетворительно согласуются с результатами, полученными с использованием теории течения с изотропным упрочнением.

Ключевые слова: эндохронная теория пластичности, термопластичность, неизотермическое нагружение, сложное нагружение, диаграмма деформирования

Введение. Математическое моделирование процессов нелинейного деформирования изотропных материалов при неизотермическом нагружении основано на теории течения с комбинированным упрочнением [1–4]. Согласно этим теориям тензор скорости полной деформации есть суперпозиция упругой, температурной и пластической составляющих. Изменение пластической составляющей тензора деформации определяется на основе ассоциированного с поверхностью нагружения закона течения. Основная сложность построения теорий течения заключается в адекватном и достоверном определении уравнений законов изменения формы поверхности нагружения при пластическом деформировании [5, 6].

В данной работе предложен вариант эндохронной теории пластичности для изотропных материалов при неизотермических условиях нагружения, а также вычислительный алгоритм исследования определяющих соотношений. В этой теории, в отличие от теорий течения, не используется понятие поверхности нагружения и, следовательно, не выделяются упругая и пластическая составляющие деформации [7–9]. Особенностью данной теории является использование внутреннего времени z для учета процессов необратимого деформирования. Преимуществом эндохронной теории термопластичности является относительная простота определяющих соотношений и возможность описывать такие особенности

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (код проекта FSFN-2024-0004).

пластического поведения, как линейное и нелинейное упрочнение, неупругая разгрузка, гистерезис и др. [10].

1. Определяющие соотношения. Определяющие соотношения эндохронной теории термопластичности для изотропного материала, устанавливающие интегральную зависимость между напряжениями, деформацией и изменением температуры $\theta = T - T_0$, имеют вид

$$s_{ij} = \int_0^z \rho(z - z') \frac{de_{ij}}{dz'} dz', \quad \sigma_0 = \int_0^z \psi(z - z') \frac{d\varepsilon_0}{dz'} dz' - \int_0^z \varphi(z - z') \frac{d\theta}{dz'} dz', \quad (1)$$

где s_{ij} — компоненты девиатора напряжений; e_{ij} — компоненты девиатора деформации; σ_0 — среднее напряжение; $d\varepsilon_0$ — средняя деформация; $\rho(z)$, $\psi(z)$, $\varphi(z)$ — ядра интегральных выражений, зависящие от температуры T ; z — внутреннее время, определяемое формулой

$$dz = \frac{d\xi}{f(\xi)}, \quad f(\xi) \geq 1, \quad f(0) = 1,$$

$f(\xi)$ — функция упрочнения, зависящая от температуры T ; $d\xi$ — приращение меры внутреннего времени, вычисляемое по формуле [11, 12]

$$d\xi^2 = (2/3) de_{ij} de_{ij} + m^2 d\theta^2,$$

m — материальный параметр модели, описывающий необратимое деформирование при изменении температуры.

Ограничения, накладываемые на ядра интегральных выражений, имеют следующий вид [12]:

$$\rho(z) \geq 0, \quad \frac{d\rho(z)}{dz} \leq 0, \quad \psi(z) \geq 0, \quad \frac{d\psi(z)}{dz} \leq 0, \quad \frac{d\varphi(z)}{dz} \leq 0. \quad (2)$$

Продифференцируем соотношение (1) по внутреннему времени z :

$$\begin{aligned} \frac{ds_{ij}}{dz} &= \rho(0) \frac{de_{ij}}{dz} + \int_0^z \frac{d}{dz} (\rho(z - z')) \frac{de_{ij}}{dz'} dz', \\ \frac{d\sigma_0}{dz} &= \psi(0) \frac{d\varepsilon_0}{dz} - \varphi(0) \frac{d\theta}{dz} + \int_0^z \frac{d}{dz} \psi(z - z') \frac{d\varepsilon_0}{dz'} dz' - \int_0^z \frac{d}{dz} \varphi(z - z') \frac{d\theta}{dz'} dz'. \end{aligned} \quad (3)$$

Конкретизируем вид ядер интегральных выражений. С учетом неравенств (2) и условия упругого деформирования при $z \rightarrow 0$ для пластиически несжимаемого изотропного материала примем соотношения

$$\rho(z) = 2\mu e^{-az}, \quad \psi(z) = K, \quad \varphi(z) = K\alpha^{(T)}, \quad (4)$$

где $a = a(T)$ — материальный параметр модели; $\alpha^{(T)}$ — температурный коэффициент линейного расширения; $\mu = \mu(T)$, $K = K(T)$ — модуль сдвига и модуль объемного сжатия соответственно:

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad K = \frac{E}{1 - 2\nu},$$

$E = E(T)$, $\nu = \text{const}$ — модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Опишем более подробно процесс дифференцирования интегрального ядра первого уравнения в (3):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \rho(z - z') &= \frac{\partial}{\partial z} \rho(z - z')|_{\theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \rho(z - z')|_z \frac{d\theta}{dz} = \\ &= -2\mu \left(a - \left(\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{d\theta} - (z - z') \frac{da}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dz} \right) e^{-a(z-z')} . \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь нижние индексы θ и z указывают на то, что величины θ и z принимают постоянное значение при дифференцировании выражений.

Подставляя выражения (4), (5) в соотношения (3), получаем

$$\begin{aligned} \frac{ds_{ij}}{dz} &= 2\mu \frac{de_{ij}}{dz} - \int_0^z 2\mu \left(a - \left(\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{d\theta} - (z - z') \frac{da}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dz} \right) e^{-a(z-z')} \frac{de_{ij}}{dz'} dz', \\ \frac{d\sigma_0}{dz} &= K \frac{d\varepsilon_0}{dz} - K\alpha^{(T)} \frac{d\theta}{dz} + \frac{dK}{d\theta} (\varepsilon_0 - \alpha^{(T)}\theta) \frac{d\theta}{dz}. \end{aligned} \quad (6)$$

С учетом соотношений (1) преобразуем (6) к виду

$$\begin{aligned} ds_{ij} &= 2\mu de_{ij} - as_{ij} dz + \left(\frac{s_{ij}}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} + (h_{ij} - z s_{ij}) \frac{\partial a}{\partial \theta} \right) d\theta, \\ d\sigma_0 &= K(d\varepsilon_0 - \alpha^{(T)} d\theta) + \frac{\sigma_0}{K} \frac{dK}{d\theta} d\theta, \end{aligned}$$

где h_{ij} — компоненты тензора второго ранга:

$$h_{ij} = \int_0^z 2\mu z' e^{-a(z-z')} \frac{de_{ij}}{dz'} dz'. \quad (7)$$

Используя известные уравнения, связывающие девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформации: $d\sigma_{ij} = ds_{ij} + \delta_{ij} d\sigma_0$, $d\varepsilon_{ij} = de_{ij} + \delta_{ij} d\varepsilon_0$, получаем определяющее соотношение эндохронной теории пластичности при неизотермическом нагружении в дифференциальной форме

$$d\sigma_{ij} = 2\mu \left(d\varepsilon_{ij} + \frac{3\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} d\varepsilon_0 \right) + \left(\frac{\sigma_{ij}}{E} \frac{dE}{d\theta} + (h_{ij} - z s_{ij}) \frac{\partial a}{\partial \theta} - \delta_{ij} K\alpha^{(T)} \right) d\theta - as_{ij} dz,$$

или

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl} d\varepsilon_{kl} + \left(\frac{\sigma_{ij}}{E} \frac{dE}{d\theta} + (h_{ij} - z s_{ij}) \frac{\partial a}{\partial \theta} - \delta_{ij} K\alpha^{(T)} \right) d\theta - as_{ij} dz,$$

где D_{ijkl} — компоненты тензора упругих жесткостей четвертого ранга.

Обратное соотношение имеет следующий вид:

$$d\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} d\sigma_{kl} - \left(S_{ijkl} \frac{\sigma_{kl}}{E} \frac{dE}{d\theta} + S_{ijkl} (h_{kl} - z s_{kl}) \frac{\partial a}{\partial \theta} - \delta_{ij} \alpha^{(T)} \right) d\theta + a S_{ijkl} s_{kl} dz. \quad (8)$$

Здесь S_{ijkl} — компоненты тензора податливости четвертого ранга.

2. Определение компонент тензора h_{kl} . Опишем более подробно процедуру численного интегрирования выражения (7) для компонент тензора h_{ij} . Для этого разделим область интегрирования z' на n частей и будем полагать, что изменение компонент девиатора деформации $de_{ij}/dz' = \text{const}$. Тогда соотношение (7) принимает следующий вид:

$$h_{ij}(z_m) = 2\mu(T_m) \frac{de_{ij}}{dz'} \Big|_{z_1} \int_0^{z_1} z' e^{-a(T_m)(z_m-z')} dz' + \dots$$

$$\begin{aligned} \dots + 2\mu(T_m) \frac{de_{ij}}{dz'} \Big|_{z_m} \int_{z_{m-1}}^{z_m} z' e^{-a(T_m)(z_m-z')} dz' = \\ = \sum_{i=1}^n 2\mu(T_m) \frac{de_{ij}}{dz'} \Big|_{z_i} \int_{z_{i-1}}^{z_i} z' e^{-a(T_m)(z_m-z')} dz'. \end{aligned} \quad (9)$$

Проинтегрируем по частям правую часть выражения (9):

$$\begin{aligned} h_{ij}(z_m) = \sum_{i=1}^n 2 \frac{\mu(T_m)}{a(T_m)} \frac{de_{ij}}{dz'} \Big|_{z_i} \left[(z_i e^{-a(T_m)(z_m-z_i)} - z_{i-1} e^{-a(T_m)(z_m-z_{i-1})}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{a(T_m)} (e^{-a(T_m)(z_m-z_i)} - e^{-a(T_m)(z_m-z_{i-1})}) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Преобразуем выражение (10) к виду, удобному для численного решения. Для этого рассмотрим величину h_{ij} в момент времени $z_{m+1} = z_m + \Delta z$:

$$\begin{aligned} h_{ij}(z_{m+1}) = \sum_{i=1}^n 2 \frac{\mu}{a} \frac{de_{ij}}{dz'} \Big|_{z_i} \left[(z_i e^{-a(z_m+1-z_i)} - z_{i-1} e^{-a(z_m+1-z_{i-1})}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{a} (e^{-a(z_m+1-z')} - e^{-a(z_m+1-z_{i-1})}) \right] + 2 \frac{\mu}{a} \frac{de_{ij}}{dz'} \Big|_{z_{m+1}} \left[z_{m+1} - \left(z_m - \frac{1}{a} \right) e^{-a\Delta z} - \frac{1}{a} \right] = \\ = h_{ij}(z_m) e^{-a\Delta z} + 2 \frac{\mu}{a} \frac{de_{ij}}{dz'} \Big|_{z_{m+1}} \left[z_{m+1} - \left(z_m - \frac{1}{a} \right) e^{-a\Delta z} - \frac{1}{a} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Запишем (11) в следующем виде:

$$h_{ij}(z_m) = h_{ij}(z_{m-1}) e^{-a\Delta z} + 2 \frac{\mu}{a} \frac{de_{ij}}{dz'} \Big|_{z_m} \left[z_m - \left(z_{m-1} - \frac{1}{a} \right) e^{-a\Delta z} - \frac{1}{a} \right]. \quad (12)$$

Выражение (12) позволяет найти компоненты тензора h_{ij} в момент времени z_m на основе данных, полученных на предыдущем шаге по времени.

3. Метод определения материальных параметров. Материальные параметры $a(T)$ и $\beta(T)$ определяются по результатам испытаний на одноосное растяжение (кручение) образца при фиксированной температуре T . При этом зависимости $a(T)$, $\beta(T)$ имеют следующий вид:

— при растяжении

$$\begin{aligned} a(T) &= \frac{3E(T)}{2(1+\nu)\sigma_*(T)} \frac{1 - E_T(T)/E(T)}{1 - ((1-2\nu)/3)E_T(T)/E(T)}, \\ \beta(T) &= \frac{E_T(T)}{\sigma_*(T)[1 - ((1-2\nu)/3)E_T(T)/E(T)]}; \end{aligned}$$

— при кручении

$$a(T) = \sqrt{3} \frac{G(T) - G_T(T)}{\tau_*(T)}, \quad \beta(T) = \sqrt{3} \frac{G_T(T)}{\tau_*(T)}.$$

Здесь $E_T(T)$, $G(T)$, $G_T(T)$ — модуль упрочнения материала на растяжение, модуль сдвига и модуль упрочнения материала на кручение; $\sigma_*(T)$, $\tau_*(T)$ — значения нормального и касательного напряжений в точке пересечения асимптоты кривой деформирования на растяжение и кручение соответственно с осью напряжений.

Материальный параметр m определяется в экспериментах на нагрев образцов при фиксированном напряжении из условия наилучшего согласования результатов экспериментов и теоретических расчетов.

4. Вычислительный алгоритм. В настоящее время существует большое количество методов численного интегрирования систем дифференциальных уравнений [13]. В данной работе используется метод Эйлера с внутренним итерационным процессом, осуществляемым методом Зейделя. При интегрировании будем задавать шаги по напряжению $\Delta\sigma_{kl}^{(n)}$ и температуре $\Delta\theta^{(n)}$, где n — номер шага нагружения. В начальном состоянии все параметры примем равными нулю и будем решать задачу в упругой постановке.

Представим соотношение (8) в разностном виде:

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_{ij}^{(n,p)} &= S_{ijkl}(T^{(n-1)}) \Delta\sigma_{kl}^{(n)} - \Omega^{(n,p-1)} \Delta\theta^{(n)} + \Psi^{(n-1)} \Delta z^{(n,p-1)}, \\ \Omega^{(n,p-1)} &= S_{ijkl}(T^{(n-1)}) \frac{\sigma_{kl}^{(n-1)}}{E(T^{(n-1)})} \frac{dE}{d\theta} \Big|_{T^{(n-1)}} + \\ &+ S_{ijkl}(T^{(n-1)}) (h_{kl}^{(n,p-1)} - z^{(n-1)} s_{kl}^{(n-1)}) \frac{\partial a}{\partial \theta} \Big|_{T^{(n-1)}} - \delta_{ij} \alpha^{(T)}, \\ \Psi^{(n-1)} &= a(T^{(n-1)}) S_{ijkl}(T^{(n-1)}) s_{kl}^{(n-1)}.\end{aligned}$$

На p -м шаге внутренней итерационной процедуры величины $\Delta z^{(n,p)}$ и $h_{kl}^{(n,p)}$ определяем методом Зейделя в соответствии с выражением (12). Суть данного метода заключается в последовательном уточнении компонент приращения девиатора деформации $\Delta e_{ij}^{(n,p)}$, входящего в выражения для этих величин:

$$\begin{aligned}\Delta z^{(n,p)} &= \frac{1}{f(\xi^{(n-1)})} \sqrt{\frac{2}{3} (\Delta e_{11}^{(n,p)} \Delta e_{11}^{(n,p)} + \dots + \Delta e_{23}^{(n,p)} \Delta e_{23}^{(n,p)}) + m^2 (\Delta\theta^{(n)})^2}, \\ h_{kl}^{(n,p)} &= h_{kl}^{(n-1,p)} e^{-a \Delta z^{(n,p)}} + \\ &+ 2 \frac{\mu(T^{(n-1)})}{a(T^{(n-1)})} \frac{de_{ij}}{dz'} \Big|_{z^{(n)}} \left[z^{(n)} - \left(z^{(n-1)} - \frac{1}{a(T^{(n-1)})} \right) e^{-a \Delta z^{(n,p)}} - \frac{1}{a(T^{(n-1)})} \right].\end{aligned}$$

В начальном приближении для $p = 1$ полагаем $\Delta\varepsilon_{ij}^{(n,1)} = \Delta\varepsilon_{ij}^{(n-1,p)}$, в качестве критерия остановки внутренней итерационной процедуры принимаем неравенство

$$|\Delta\varepsilon_{ij}^{(n,p)} - \Delta\varepsilon_{ij}^{(n,p-1)}| \leq 0,001 |\Delta\varepsilon_{ij}^{(n,p)}|.$$

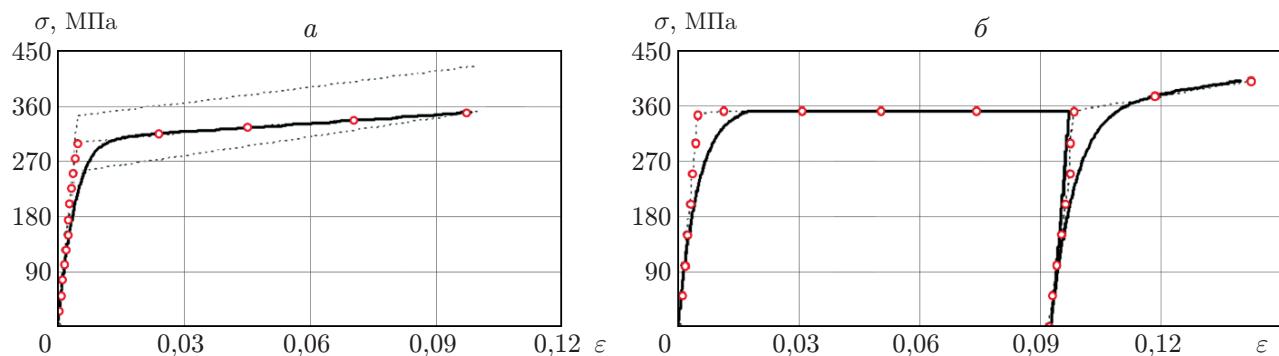
Текущие значения основных величин определяем по формулам

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{(n)} &= \sigma_{ij}^{(n-1)} + \Delta\sigma_{ij}^{(n)}, & T^{(n)} &= T^{(n-1)} + \Delta\theta^{(n)}, & \varepsilon_{ij}^{(n)} &= \varepsilon_{ij}^{(n-1)} + \Delta\varepsilon_{ij}^{(n,p)}, \\ h_{ij}^{(n)} &= h_{ij}^{(n-1)} + \Delta h_{ij}^{(n,p)}, & z^{(n)} &= z^{(n-1)} + \Delta z^{(n,p)}, & \xi^{(n)} &= \xi^{(n-1)} + \Delta\xi^{(n)}.\end{aligned}$$

5. Пример численного расчета. Рассмотрим процесс одноосного растяжения и нагрева стержня из алюминиевого сплава 2024-T6, характеристики которого приведены в таблице (T — температура, E — модуль упругости, E_T — модуль упрочнения, σ_T — предел текучести, α , β — материальные параметры). Для проверки полученных результатов будем использовать результаты расчета, полученные с использованием теории течения с изотропным упрочнением. Коэффициент Пуассона $\nu = 0,33$ и материальный параметр $m = 0$ не зависят от температуры.

Характеристики алюминиевого сплава 2024-T6

$T, ^\circ\text{C}$	$E, \text{МПа}$	$E_T, \text{ГПа}$	$\sigma_T, \text{МПа}$	α	β
20	72 540	869	345	53,0	0,56
150	68 688	871	345	50,2	0,56
200	64 779	852	336	47,3	0,55
250	59 089	1036	252	43,0	0,66
300	52 704	1309	177	38,0	0,84
350	46 188	1386	129	33,1	0,89



Зависимости напряжения от деформации для первого (*а*) и второго (*б*) случаев нагружения:

сплошная линия — расчет с использованием эндохронной теории, точки — расчет с использованием теории пластического течения

В первом случае стержень одновременно растягивается до напряжения 350 МПа и нагревается до температуры 300 °C (см. рисунок). Во втором случае нагрузка прикладывается в четыре этапа: стержень растягивается до напряжения 350 МПа, затем нагревается до температуры 300 °C, после чего проводится полная разгрузка с последующим нагружением до 450 МПа (см. рисунок).

На рисунке видно, что результаты расчета по эндохронной теории термопластичности и результаты расчета, полученные с использованием теории течения с изотропным упрочнением, удовлетворительно согласуются.

Заключение. В работе предложен вариант эндохронной теории термопластичности для изотропных материалов при термосиловом нагружении. Получены определяющие соотношения для общего случая нагружения. Значения материальных параметров модели найдены в экспериментах на одноосное растяжение и кручение. Приведен вычислительный алгоритм исследования определяющих соотношений.

С использованием предложенной модели и вычислительного алгоритма решена задача о сложном термосиловом нагружении стержня. Показано, что результаты расчета удовлетворительно согласуются с результатами, полученными с использованием теории течения с изотропным упрочнением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Севастьянов Г. М., Буренин А. А. Адиабатический нагрев материала при упругопластическом кручении с конечными деформациями // ПМТФ. 2019. Т. 60, № 6. С. 149–161.
2. Бондарь В. С., Абашев Д. Р., Фомин Д. Ю. Вариант теории термопластичности для монотонных и циклических процессов неизотермических нагрузений // Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика. 2020. № 2. С. 28–36.

3. Прокудин А. Н., Буренин А. А. Анализ упругопластического деформирования вращающегося сплошного цилиндра при общем кусочно-линейном условии пластичности // ПМТФ. 2021. Т. 62, № 5. С. 68–79.
4. Янковский А. П. Моделирование вязкоупругопластического поведения пологих оболочек с учетом скорости деформирования материала // ПМТФ. 2022. Т. 63, № 2. С. 140–150.
5. Бондарь В. С. Неупругость. Варианты теорий. М.: Физматлит, 2004.
6. Chaboche J. L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories // Intern. J. Plasticity. 2008. V. 24, iss. 10. P. 1642–1693.
7. Valanis K. C. A theory of viscoplasticity without a yield surface // Arch. Mech. 1971. V. 23, N 4. P. 517–551.
8. Кувыркин Г. Н. Термомеханика деформируемого твердого тела при высокоинтенсивном нагружении. М.: Моск. гос. техн. ун-т, 1993.
9. Suchocki C., Skoczyłas P. Finite strain formulation of elasto-plasticity without yield surface: theory, parameter identification and applications // J. Theor. Appl. Mech. 2016. V. 54, N 3. P. 731–742.
10. Sarbayev B. S., Baryshev A. N. Endochronic model of nonlinear deformation of high temperature fabric reinforced composite // AIP Conf. Proc. 2021. V. 2318. 150020.
11. Сарбаев Б. С. Определяющие соотношения для высокотемпературных композиционных материалов на основе эндохронной теории термопластичности // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2019. № 7. С. 97–104.
12. Зарубин В. С. Математические модели термомеханики / В. С. Зарубин, Г. Н. Кувыркин. М.: Физматлит, 2002.
13. Галанин М. П. Методы численного анализа математических моделей. М.: Моск. гос. техн. ун-т, 2010.

Поступила в редакцию 18/IX 2023 г.,
после доработки — 21/IX 2023 г.
Принята к публикации 25/IX 2023 г.