

УДК 539.3

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНЫХ ГОФРИРОВАННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

К. А. Ватульян*, С. С. Макаров*, Ю. А. Устинов*,**

* Южный федеральный университет, 344006 Ростов-на-Дону, Россия

** Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН,
362027 Владикавказ, Россия

E-mails: vatulyan_karina@mail.ru, makarov-sergey-rostov@mail.ru, ustinov@math.rsu.ru

Проведено исследование крутильных и продольно-изгибных колебаний ортотропных гофрированных оболочек. С использованием гипотез Кирхгофа — Лява получены соотношения, включающие уравнения движения в усилиях и моментах и соотношения закона Гука. Для оболочек с жесткозашемленными торцами приводятся результаты исследования влияния геометрических параметров оболочки (амплитуды гофра и его длины) на величину собственных частот и формы собственных колебаний. Установлено, что при крутильных колебаниях увеличение амплитуды гофра, как и увеличение количества гофров, приводит к уменьшению значений резонансных частот. В случае крутильных и продольно-изгибных колебаний исследовано влияние амплитуды гофра на формы собственных колебаний.

Ключевые слова: колебания, гофрированные оболочки, ортотропные материалы, собственные частоты, собственные формы.

DOI: 10.15372/PMTF20160620

Данная работа является продолжением исследований различных задач теории тонкостенных оболочек вращения с меридианом в форме гофра, выполненных в работах [1, 2]. Предлагаются теория и методы расчета собственных частот и соответствующих им собственных форм колебаний. Основное внимание уделяется исследованию оболочек с формой меридиана срединной поверхности, описываемой периодической функцией.

Основные соотношения. Рассматриваются колебания тонкостенной упругой ортотропной оболочки вращения толщиной h , радиус срединной поверхности которой задан некоторой гладкой функцией осевой координаты z

$$r = r(z), \quad 0 \leq z \leq L$$

(L — длина оболочки).

Все искомые характеристики (смещения, деформации, напряжения и т. п.) отнесены к гауссовой системе координат с осями e_1, e_2, e_3 и рассматриваются как функции цилиндрических координат φ, z . Вектор e_1 направлен по касательной к параллели, e_2 — по касательной к образующей, e_3 — по нормали к срединной поверхности оболочки. Глав-

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ на выполнение научно-исследовательской работы (проект № 9.665.2014/К).

© Ватульян К. А., Макаров С. С., Устинов Ю. А., 2016

ные кривизны k_1, k_2 и коэффициенты Ламе A_1, A_2 срединной поверхности определяются формулами [3]

$$k_1 = \frac{1}{r(z)\sqrt{1+r'^2}}, \quad k_2 = \frac{r''}{(\sqrt{1+r'^2})^3}, \quad r' = \frac{dr}{dz}, \quad A_1 = r(z), \quad A_2 = \sqrt{1+r'^2}.$$

С использованием гипотез Кирхгофа — Лява и вариационного принципа Гамильтона уравнения колебаний оболочки можно представить в виде [4–6]

$$\begin{aligned} \partial_\varphi (A_2 T_{11}) + A_1^{-1} \partial_z (A_1^2 T_{12}) - \partial_\varphi A_2 T_{22} + A_1 A_2 (k_1 Q_1^* - h \rho \partial_t^2 u_1) &= 0, \\ \partial_z (A_1 T_{22}) + A_2^{-1} \partial_\varphi (A_2^2 T_{12}) - \partial_z A_1 T_{11} + A_1 A_2 (k_2 Q_2^* - h \rho \partial_t^2 u_2) &= 0, \\ \partial_\varphi (A_1 Q_1^*) + \partial_z (A_2 Q_2^*) - A_1 A_2 (k_1 T_{11} + k_2 T_{22} - h \rho \partial_t^2 u_3) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\partial_z, \partial_\varphi$ — частные производные по переменным z и φ соответственно; u_1, u_2, u_3 — координаты вектора смещений в выбранном базисе; ρ — плотность материала; Q_1^*, Q_2^* — полные поперечные силы, которые определяются по формулам

$$\begin{aligned} Q_1^* &= Q_1 - T_{11} \theta_1 - T_{12} \theta_2, & Q_2^* &= Q_2 - T_{22} \theta_2 - T_{12} \theta_1, \\ Q_1 &= A_1^{-1} A_2^{-1} [\partial_\varphi (A_2 M_{11}) + A_1^{-1} \partial_z (A_1^2 M_{12}) - \partial_\varphi A_2 M_{22}], \\ Q_2 &= A_1^{-1} A_2^{-1} [\partial_z (A_1 M_{22}) + A_2^{-1} \partial_\varphi (A_2^2 M_{12}) - \partial_z A_1 M_{11}]. \end{aligned} \quad (2)$$

В случае малых деформаций выражения для усилий и моментов для ортотропной оболочки имеют вид [7]

$$\begin{aligned} T_{11} &= B E_1 (e_{11} + \nu_{21} e_{22}), & T_{22} &= B E_2 (e_{22} + \nu_{12} e_{11}), & T_{12} &= G_{12} h e_{12}, \\ M_{11} &= D E_1 (\varkappa_{11} + \nu_{21} \varkappa_{22}), & M_{22} &= D E_2 (\varkappa_{22} + \nu_{12} \varkappa_{11}), \\ M_{12} &= G_{12} h^3 e_{12}, & B &= \frac{h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, & D &= \frac{h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \end{aligned} \quad (3)$$

где T_{11}, T_{12}, T_{22} — усилия в срединной поверхности; M_{11}, M_{22} — изгибающие моменты; M_{12} — крутящий момент; E_1, E_2 — модули упругости; ν_{12}, ν_{21} — коэффициенты Пуассона; G_{12} — модуль сдвига. При этом для ортотропного материала выполнено соотношение $E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12}$ [7].

Компоненты тензора деформаций срединной поверхности e_{11}, e_{22}, e_{12} и тензора изменения ее кривизн $\varkappa_{11}, \varkappa_{22}, \varkappa_{12}$ в случае малых деформаций оболочки определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} e_{11} &= A_1^{-1} \partial_\varphi u_1 + A_1^{-1} A_2^{-1} \partial_z A_1 u_2 + k_1 u_3, & e_{22} &= A_2^{-1} \partial_z u_2 + A_1^{-1} A_2^{-1} \partial_\varphi A_2 u_1 + k_2 u_3, \\ e_{12} &= \frac{1}{2} [A_2 A_1^{-1} \partial_\varphi (u_2 A_2^{-1}) + A_1 A_2^{-1} \partial_z (u_1 A_1^{-1})], \\ \varkappa_{11} &= A_1^{-1} \partial_\varphi \theta_1 + A_1^{-1} A_2^{-1} \partial_z A_1 \theta_2, & \varkappa_{22} &= A_2^{-1} \partial_z \theta_2 + A_1^{-1} A_2^{-1} \partial_\varphi A_2 \theta_1, \\ \varkappa_{12} &= \frac{1}{2} [A_2 A_1^{-1} \partial_\varphi (\theta_2 A_2^{-1}) + A_1 A_2^{-1} \partial_z (\theta_1 A_1^{-1})], \\ \theta_1 &= -A_1^{-1} \partial_\varphi u_3 + k_1 u_1, & \theta_2 &= -A_2^{-1} \partial_z u_3 + k_2 u_2. \end{aligned}$$

Будем считать, что на торцах оболочки выполняются граничные условия, соответствующие жесткой заделке:

$$u_i \Big|_{z=0,L} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \theta_2 \Big|_{z=0,L} = 0. \quad (4)$$

Рассмотрим два типа колебаний: крутильные и продольно-изгибные.

Крутильные колебания. В случае крутильных колебаний характеристики u_1 , T_{12} , Q_1^* , M_{12} отличны от нуля. Из трех уравнений движения (1) остается одно, которое принимает вид

$$A_1^{-1} \partial_z (A_1^2 T_{12}) + A_1 A_2 k_1 Q_1^* - A_1 A_2 h \rho \partial_t^2 u_1 = 0. \quad (5)$$

Подставляя в (5) выражения для T_{12} , Q_1^* из (2), (3), получаем уравнение второго порядка относительно u_1 . В случае стационарных колебаний его решение будем искать в виде

$$u_1(z, t) = u(z) e^{-i\omega t}, \quad (6)$$

где ω — круговая частота колебаний.

Подставляя (6) в уравнение относительно u_1 и отделяя временной множитель, получаем следующую спектральную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка относительно амплитуды колебаний $u(z)$:

$$Mu - 2A_1^2 A_2 \lambda u = 0; \quad (7)$$

$$u(0) = u(L) = 0. \quad (8)$$

Здесь

$$Mu \equiv -\frac{d}{dz} \left[\frac{A_1^3}{A_2} \frac{d}{dz} \left(\frac{u}{A_1} \right) \right] - h^2 k_1 \frac{d}{dz} \left[\frac{A_1^3}{A_2} \frac{d}{dz} \left(\frac{k_1 u}{A_1} \right) \right], \quad (9)$$

$\lambda = \omega^2/c^2$ — спектральный параметр; $c^2 = G_{12}/\rho$ — квадрат скорости волны сдвига.

Следует отметить, что при $h^2/R^2 \ll 1$, где $R = \min(r(z))$, вторым слагаемым в выражении (9) можно пренебречь.

Умножим уравнение (7) на u/A_1 и затем проинтегрируем по $z \in [0, L]$. В результате преобразований получаем

$$\Phi(u, \lambda) = \|u\|_{H_1}^2 - 2\lambda \|u\|_H^2, \quad (10)$$

где H_1 , H — гильбертовы пространства, скалярные произведения в которых определяются выражениями

$$(u, v)_{H_1} = \int_0^L \{ [(A_1^{-1}u)'(A_1^{-1}v)'] + h^2 [(A_1^{-1}k_1u)'(A_1^{-1}k_1v)'] \} A_2^{-1} A_1^3 dz,$$

$$(u, v)_H = \int_0^L A_1 A_2 uv dz,$$

$$(\cdot)' = \frac{d}{dz} (\cdot).$$

Рассмотрим уравнение (7) при $\lambda = \lambda_k$, $u = u_k$ и $\lambda = \lambda_j$, $u = u_j$:

$$Mu_k - 2A_1^2 A_2 \lambda_k u_k = 0, \quad Mu_j - 2A_1^2 A_2 \lambda_j u_j = 0.$$

Умножая первое выражение на u_j/A_1 , а второе — на u_k/A_1 и интегрируя их, получаем

$$(u_k, u_j)_{H_1} - 2\lambda_k (u_k, u_j)_H = 0, \quad (u_j, u_k)_{H_1} - 2\lambda_j (u_j, u_k)_H = 0.$$

Полагая в любом из данных равенств $j = k$, получаем следующее свойство.

СВОЙСТВО 1. Все собственные значения λ_k положительные, а собственные частоты равны $\omega_k = c\sqrt{\lambda_k}$ ($k = 1, 2, \dots$).

Если $j \neq k$, то, вычитая второе равенство из первого и учитывая, что $(u_k, u_j)_{H_1} = (u_j, u_k)_{H_1}$, получаем следующее свойство.

СВОЙСТВО 2. Собственные функции (формы колебаний) u_k, u_l , соответствующие собственным значениям λ_k, λ_l , обладают свойством ортогональности:

$$(u_k, u_l)_H = \|u_k\|_H^2 \delta_{kl}$$

(δ_{kl} — символ Кронекера).

С помощью функционала (10) можно построить приближенные решения, используя метод Ритца [8]. Этот метод может оказаться эффективным при исследовании задач для оболочки вращения с малыми отклонениями ее срединной поверхности от срединной поверхности цилиндрической оболочки.

При численном интегрировании краевой задачи (7)–(9) сведем ее к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. С этой целью введем вектор $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ с безразмерными координатами

$$y_1 = \frac{u}{h}, \quad y_2 = \frac{T_{12}}{hG_{12}}, \quad x = \frac{z}{h}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= 2A_2 y_2 + S_1 y_1, \\ \frac{dy_2}{dx} &= -2 \left(S_1 + \frac{K_1}{1 + K_1^2} \frac{dK_1}{dx} \right) y_2 - \frac{1}{1 + K_1^2} \left[\frac{K_1}{2A_2} \left((3S_1 - S_2) \frac{dK_1}{dx} + \frac{d^2 K_1}{dx^2} \right) + A_2 \Omega^2 \right] y_1, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$S_1 = \frac{1}{H_1} \frac{dH_1}{dx}, \quad S_2 = \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{dx}, \quad \Omega^2 = \frac{\rho h^2}{G_{12}} \omega^2,$$

$H_1 = A_1/h, K_1 = k_1 h$ — безразмерные величины.

Граничные условия (8) принимают вид

$$y_1|_{x=0, L_0} = 0, \quad L_0 = L/h. \quad (12)$$

Численное интегрирование краевой задачи (11), (12) проводилось с использованием двух методов: метода пристрелки и метода, основанного на теории Флоке — Ляпунова [1, 9]. Применение второго метода позволяет уменьшить время расчетов для оболочек с большим количеством гофров, результаты расчетов с заданной точностью совпадают с результатами, полученными методом пристрелки.

Расчеты проводились для оболочки из ортотропного материала при следующих значениях упругих постоянных (органопластик) [10]: $E_1 = 48,6 \cdot 10^9$ Па, $E_2 = 21,3 \cdot 10^9$ Па, $\nu_{12} = 0,28, G_{12} = 9,3 \cdot 10^8$ Па, плотность $\rho = 1350$ кг/м³.

Радиус срединной поверхности гофрированной оболочки задавался выражением

$$r(z) = r_0 + K \sin^2(m\pi z/L). \quad (13)$$

Здесь r_0 — радиус срединной поверхности оболочки на торцах; K — амплитуда гофра; $L = lm$ — длина оболочки; l — длина периода; m — количество периодов по длине оболочки. Выбранная форма срединной поверхности подобна форме силфона — гофрированной оболочки, применяемой в различных технических устройствах [11].

Приведем некоторые результаты исследований распределения резонансных частот в зависимости от параметров K и m при $l = 5,5$ мм, $r_0 = 9$ мм, $h = 0,35$ мм.

Таблица 1

Зависимость первых четырех собственных частот от параметра m
в случае крутильных колебаний

m	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4
4	0,0158	0,0300	0,0425	0,0485
8	0,0089	0,0158	0,0230	0,0300
12	0,0068	0,0111	0,0158	0,0206

Для контроля точности вычислений рассмотрена аналогичная задача для цилиндрической оболочки ($K = 0$), геометрические параметры которой h , L и упругие характеристики совпадают с соответствующими параметрами гофрированной оболочки. Эта задача имеет аналитическое решение. В частности, собственные частоты крутильных колебаний цилиндрической оболочки определяются следующими формулами:

$$\omega_k = \frac{\pi k}{r_0 L} \sqrt{\frac{G_{12}(h^2 + r_0^2)}{2\rho}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Значения собственных частот ω_k , полученные численным интегрированием краевой задачи (11), (12) для цилиндрической оболочки, сравнивались со значениями, полученными по формуле (14). Сравнение первых пяти собственных частот показало, что их значения практически совпадают (различие не превышает 0,001 %).

Исследовано влияние количества гофров (параметр m) на первые четыре собственные частоты (табл. 1) при амплитуде гофра $K = 5$ мм. Из табл. 1 следует, что при увеличении количества гофров, а значит, и длины оболочки значения собственных частот уменьшаются.

ЗАМЕЧАНИЕ. Значения собственных частот f_k (в герцах) можно вычислить по формуле

$$f_k = \frac{\omega_k}{2\pi} = \frac{1}{2\pi h} \sqrt{\frac{E^*}{\rho}} \Omega_k.$$

В случае крутильных колебаний $E^* = G_{12}$, в случае продольно-изгибных $E^* = E_2$.

Исследование зависимости первых пяти собственных частот оболочки, радиус срединной поверхности которой задавался выражением (13), от амплитуды гофра K позволяет сделать вывод, что при увеличении этого параметра функция $\Omega_k(K)$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$ является монотонно убывающей (рис. 1).

На рис. 2 приведены первые три собственные формы колебаний при $m = 8$, $L = 44$ мм, $K = 5$ мм. Видно, что первая и третья собственные формы симметричны относительно срединного сечения оболочки, а вторая — антисимметрична.

На рис. 3 показана первая собственная форма крутильных колебаний при $m = 4$, $L = 22$ мм. Видно, что количество локальных максимумов соответствует количеству гофров $m = 4$. Увеличение амплитуды не приводит к существенному изменению нормированной собственной формы.

Продольно-изгибные осесимметричные колебания. В рассматриваемом случае уравнения колебаний (1) и граничные условия (4) принимают следующий вид:

$$\partial_z (A_1 T_{22}) - \partial_z A_1 T_{11} + A_1 A_2 k_2 Q_2^* - A_1 A_2 h \rho \partial_t^2 u_2 = 0, \quad (15)$$

$$\partial_z (A_2 Q_2^*) - A_1 A_2 (k_1 T_{11} + k_2 T_{22}) - A_1 A_2 h \rho \partial_t^2 u_3 = 0;$$

$$u_2|_{z=0,L} = 0, \quad u_3|_{z=0,L} = 0, \quad \theta_2|_{z=0,L} = 0. \quad (16)$$

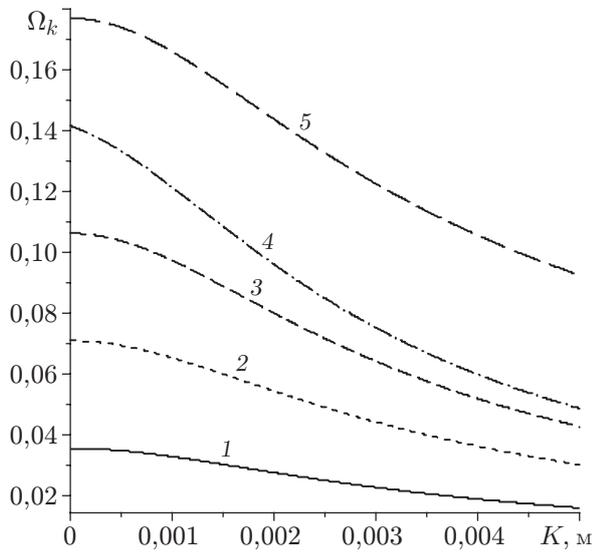


Рис. 1

Рис. 1. Зависимость первых пяти собственных частот Ω_k от амплитуды гофра K :
 1 — Ω_1 , 2 — Ω_2 , 3 — Ω_3 , 4 — Ω_4 , 5 — Ω_5

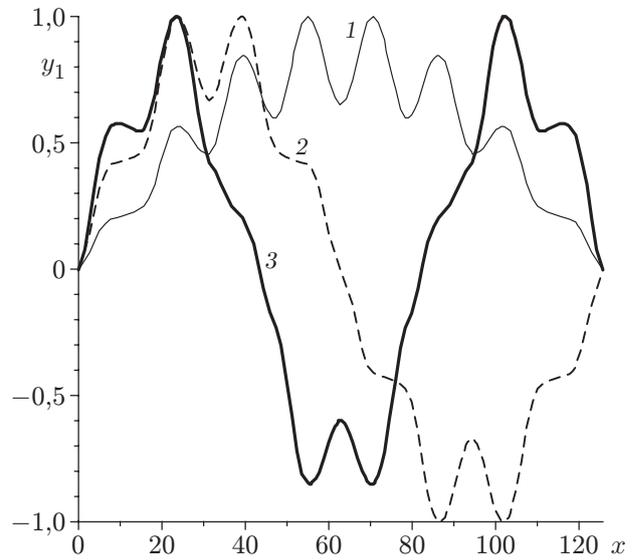


Рис. 2

Рис. 2. Первые три собственные формы крутильных колебаний при $m = 8$:
 1 — первая собственная форма, 2 — вторая собственная форма, 3 — третья собственная форма

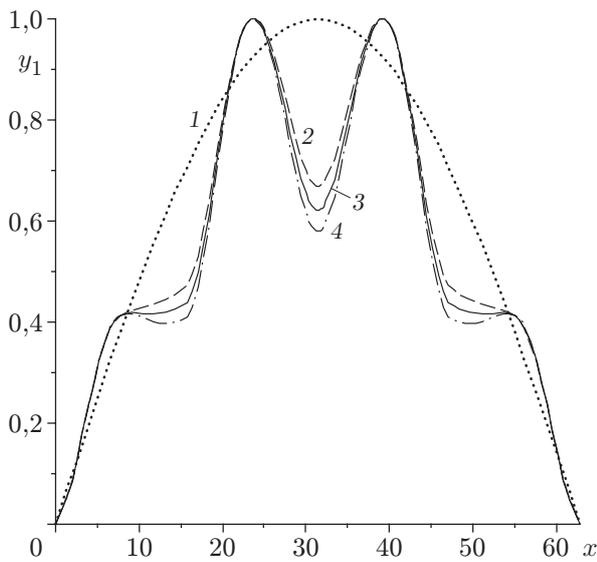


Рис. 3. Первая собственная форма крутильных колебаний при $m = 4$, $L = 22$ мм и различных значениях K :
 1 — $K = 0$ (цилиндрическая оболочка), 2 — $K = 5$ мм, 3 — $K = 6$ мм, 4 — $K = 7$ мм

При построении численного решения краевая задача (15), (16) была сведена к задаче интегрирования эквивалентной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка путем введения вектора $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_6)$ с безразмерными компонентами

$$Y_1 = \frac{u_2}{h}, \quad Y_2 = \frac{u_3}{h}, \quad Y_3 = \theta_2, \quad Y_4 = \frac{T_{22}}{BE_2}, \quad Y_5 = \frac{hM_{22}}{DE_2}, \quad Y_6 = \frac{Q_2^*}{BE_2}.$$

Рассмотрим случай установившихся колебаний. Как и выше, компоненты вектора Y_j будем искать в виде

$$Y_j(x, t) = y_j(x) e^{-i\omega t}, \quad j = 1, 2, \dots, 6.$$

Используя обозначения

$$H_1 = \frac{A_1}{h}, \quad H_2 = A_2, \quad K_1 = k_1 h, \quad K_2 = k_2 h, \quad N = \frac{H_1'}{H_1},$$

$$\delta = \frac{E_1}{E_2}, \quad \Omega^2 = \frac{h^2 \rho \omega^2}{E_2}, \quad B_1 = \frac{h^2 B}{D}, \quad B_2 = \frac{h}{B},$$

получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= -N\nu_{12}y_1 - H_2(K_2 + K_1\nu_{12})y_2 + H_2y_4, \\ \frac{dy_2}{dx} &= H_2(K_2y_1 - y_3), \quad \frac{dy_3}{dx} = H_2y_5 - N\nu_{12}y_3, \\ \frac{dy_4}{dx} &= N(\delta - \nu_{12}^2) \left(K_1y_2 + \frac{N}{H_2} y_1 \right) + N(\nu_{12} - 1)y_4 - K_2H_2y_6 - H_2B_2\Omega^2y_1, \\ \frac{dy_5}{dx} &= H_2B_1y_6 + N(\nu_{12} - 1)y_5 + \frac{N^2}{H_2} (\delta - \nu_{12}^2)y_3, \\ \frac{dy_6}{dx} &= K_1(\delta - \nu_{12}^2)(K_1H_2y_2 + Ny_1) + (K_1\nu_{12} + K_2)H_2y_4 - Ny_6 - H_2B_2\Omega^2y_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Граничные условия (16) принимают вид

$$y_i|_{x=0, L_0} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad L_0 = L/h. \quad (18)$$

Решение краевой задачи (17), (18) строилось с использованием метода пристрелки и метода Флоке — Ляпунова. Значения упругих постоянных, используемых в расчетах, выбирались такие же, как и в случае задачи о крутильных колебаниях.

В табл. 2 приведены значения первых собственных частот для гофрированных и цилиндрических оболочек одинаковой длины. Из табл. 2 следует, что при $m = 4$ первая

Таблица 2

Зависимость первых собственных частот от параметра m
в случае продольно-изгибных колебаний

m	L , мм	Ω_1	
		Гофрированная оболочка	Цилиндрическая оболочка
4	22	0,0334	0,0504
8	44	0,0312	0,0251
12	66	0,0286	0,0167

Таблица 3

Зависимость первых четырех собственных частот от параметра K в случае продольно-изгибных колебаний

K , мм	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4
1	0,0457	0,0595	0,0659	0,1010
2	0,0295	0,0483	0,0625	0,0798
4	0,0312	0,0420	0,0466	0,0571

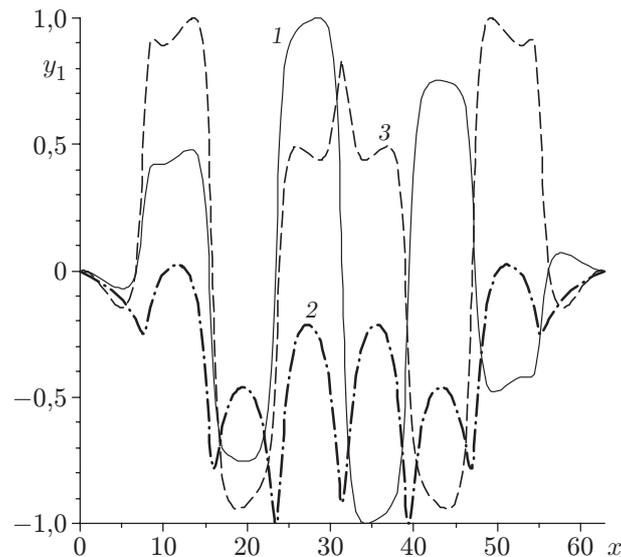


Рис. 4. Первые три собственные формы продольно-изгибных колебаний при $m = 4$, $K = 5$ мм:

1 — первая собственная форма, 2 — вторая собственная форма, 3 — третья собственная форма

собственная частота гофрированной оболочки меньше, чем у цилиндрической оболочки той же длины, а при $m = 8, 12$ — больше.

В табл. 3 приведены значения первых четырех собственных частот для гофрированной оболочки при $m = 4$ и различных значениях амплитуды гофра K . Из приведенных результатов расчета следует, что при увеличении амплитуды гофра значения собственных частот уменьшаются.

На рис. 4 представлены первые три собственные формы при $m = 4$, $K = 5$ мм. Видно, что первая собственная форма является антисимметричной, а вторая и третья симметричны относительно середины оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Макаров С. С., Устинов Ю. А. О методах исследования устойчивости гофрированных оболочек вращения // Докл. АН. 2014. Т. 459, № 4. С. 432–436.
2. Макаров С. С., Устинов Ю. А. Крутильные колебания оболочки вращения со сложной формой меридиана // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2015. № 2. С. 22–26.
3. Кабриц С. А. Общая нелинейная теория упругих оболочек / С. А. Кабриц, Е. И. Михайловский, П. Е. Товстик, К. Ф. Черных, В. А. Шамина. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2002.
4. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962.

5. **Гетман И. П., Карякин М. И., Устинов Ю. А.** Анализ нелинейного поведения круглых мембран с произвольным профилем по радиусу // Прикл. математика и механика. 2010. Т. 74, вып. 6. С. 917–927.
6. **Ониашвили О. Д.** Некоторые динамические задачи теории оболочек. М.: Изд-во АН СССР, 1957.
7. **Лехницкий С. Г.** Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977.
8. **Михлин С. Г.** Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
9. **Якубович В. А.** Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения / В. А. Якубович, В. М. Старжинский. М.: Наука, 1972.
10. **Кривошеина М. Н., Радченко А. В., Кобенко С. В.** Разрушение ортотропного и изотропного сферических тел под действием импульса всестороннего сжатия // Механика композиц. материалов и конструкций. 2001. Т. 7, № 1. С. 95–102.
11. **Андреева Л. Е.** Сильфоны. Расчет и проектирование. М.: Машиностроение, 1975.

*Поступила в редакцию 13/VII 2015 г.,
в окончательном варианте — 20/XI 2015 г.*
