УДК 534.222.2:533.6.011

ПОВЕДЕНИЕ ВЕКТОРА ВИХРЯ СКОРОСТИ В СВЕРХЗВУКОВЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАКРУЧЕННЫХ ПОТОКАХ ЗА ДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНОЙ

В. А. Левин, Г. А. Скопина

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, 690041 Владивосток
E-mails: levin@iacp.dvo.ru, gala@vlc.ru

Изучается поведение вектора вихря скорости на поверхности разрыва, возникающей при обтекании тела сверхзвуковым неоднородным потоком горючего газа с образованием ударной или детонационной волны. В общем случае набегающий поток является вихревым, с заданным распределением параметров. Показано, что при переходе через поверхность разрыва отношение касательной компоненты вихря к плотности сохраняется, сами эти величины терпят разрыв. Приведены результаты расчетов завихренности потока за стационарной детонационной волной, находящейся в осесимметричном сверхзвуковом потоке горючей смеси газов.

Ключевые слова: вихрь, ударная волна, волна детонации, осесимметричное течение, поверхность разрыва, закон сохранения.

Формулы для компонент вектора вихря за стационарной ударной волной для течений с постоянными параметрами в общем случае получены в работе [1] в предположении бесконечной интенсивности ударной волны. В работах [2, 3] получены формулы для компонент вектора вихря за ударной волной любой интенсивности в случае однородного набегающего потока. В данной работе определяется завихренность за криволинейной стационарной детонационной волной, находящейся в вихревом сверхзвуковом потоке.

Вычисление завихренности за стационарной детонационной волной. Пусть в стационарном сверхзвуковом вихревом осесимметричном потоке горючего газа расположена детонационная волна. Детонационная волна рассматривается как поверхность сильного разрыва, на которой при сгорании единицы массы газа выделяется количество тепла Q, которое может быть переменной функцией. При $Q = 0$ имеет место обычная ударная волна. В этом случае движение газа описывается следующей системой уравнений:

$$
\begin{gathered}
v\,\frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho\,\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\rho v}{r} + u\,\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\\
\rho\Big(v\,\frac{\partial u}{\partial r} + u\,\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad \rho\Big(v\,\frac{\partial v}{\partial r} + u\,\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{w^2}{r}\Big) + \frac{\partial p}{\partial r} = 0,\\
v\,\frac{\partial w}{\partial r} + u\,\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{vw}{r} = 0, \qquad v\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{p}{\rho^\gamma}\Big) + u\,\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{p}{\rho^\gamma}\Big) = 0.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Здесь $u(x,r)$, $v(x,r)$, $w(x,r)$ — компоненты скорости $\boldsymbol{V}$ в цилиндрической системе координат (x,r,φ); ρ, p — плотность и давление газа.

Работа выполнена при финансовой поддержке Дальневосточного отделения РАН (код проекта 06-II-C0-03-009).

Вектор вихря $2\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \boldsymbol{V}$ имеет компоненты

$$2\omega_r = -\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad 2\omega_x = \frac{1}{r}\,\frac{\partial rw}{\partial r}, \qquad 2\omega_\varphi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r}. \tag{2}$$

Соотношения (1) справедливы во всей области течения газа, при этом на само́й поверхности разрыва выполняются законы сохранения массы, импульса и энергии:

$$\begin{gathered} \rho v_n = \rho_0 v_{0n}, \qquad p + \rho v_n^2 = p_0 + \rho_0 v_{0n}^2, \\ \frac{1}{2}\,v_n^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\,\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}\,v_{0n}^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\,\frac{p_0}{\rho_0} + Q, \\ v_\tau = v_{0\tau}, \qquad v_\varphi = w_0. \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь величины с индексом 0 соответствуют параметрам газа перед волной, величины без индекса — параметрам за волной; $v_n = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\nu}$ — нормальная составляющая скорости; $v_\tau = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\tau}$ и v_φ — касательные составляющие скорости. Вектор $\boldsymbol{\tau}$ расположен в плоскости меридионального сечения.

На поверхности разрыва выполняются геометрические условия совместности

$$f_{,i} = f_{,n}\nu_i + f_{,s}\tau_i, \qquad i \equiv r, x. \tag{4}$$

Здесь запятая обозначает производную по соответствующей координате; ν_r, ν_x — компоненты единичного вектора нормали к поверхности, направление которого совпадает с направлением течения за фронтом; τ_r, τ_x — компоненты единичного касательного вектора к поверхности разрыва $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r}_{,s}$; $\boldsymbol{r} = (x, r, \varphi)$. Условия (4) связывают производные некоторой функции f по пространственным координатам с производной по нормали $f_{,n}$ и производной по поверхностной координате $f_{,s}$; s — естественная координата, введенная на поверхности разрыва вдоль меридионального сечения плоскостью $\varphi = \mathrm{const}$.

Используя условия (4) и тот факт, что касательные составляющие скорости не изменяются при переходе через поверхность разрыва, найдем выражение для компонент вектора вихря (2) непосредственно перед и за волной при $r = R(x)$ ($R(x)$ — уравнение поверхности разрыва). Непосредственно перед волной завихренность равна

$$\begin{gathered} 2\omega_{0x} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial r w_0}{\partial r} = w_{0,n}\nu_r + w_{0,s}\tau_r + \frac{w_0}{r}, \qquad 2\omega_{0r} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} = -w_{0,n}\nu_x - w_{0,s}\tau_x, \\ 2\omega_{0\varphi} = \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial r} = v_{0,n}\nu_x - u_{0,n}\nu_r + v_{0,s}\tau_x - u_{0,s}\tau_r, \end{gathered} \tag{5}$$

за волной —

$$\begin{gathered} 2\omega_x = \frac{1}{r}\,\frac{\partial rw}{\partial r} = w_{,n}\nu_r + w_{0,s}\tau_r + \frac{w_0}{r}, \qquad 2\omega_r = -\frac{\partial w}{\partial x} = -w_{,n}\nu_x - w_{0,s}\tau_x, \\ 2\omega_\varphi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r} = v_{,n}\nu_x - u_{,n}\nu_r + v_{,s}\tau_x - u_{,s}\tau_r. \end{gathered} \tag{6}$$

В эти выражения для компонент вектора вихря входят производные компонент скорости газа по нормали и вдоль естественной координаты. Производные по нормали определяются из уравнений движения (1):

— перед волной

$$\begin{gathered} u_{0,n} = -\frac{1}{v_{0n}}\Big(\frac{1}{\rho_0}\,\frac{\partial p_0}{\partial x} + v_{0\tau}u_{0,s}\Big), \qquad v_{0,n} = -\frac{1}{v_{0n}}\Big(\frac{1}{\rho_0}\,\frac{\partial p_0}{\partial r} + v_{0\tau}v_{0,s} - \frac{w_0^2}{r}\Big), \\ w_{0,n} = -\frac{v_{0\tau}}{v_{0n}}\,w_{0,s} - \frac{w_0}{r}\Big(\nu_r + \frac{v_{0\tau}}{v_{0n}}\,\nu_x\Big); \end{gathered} \tag{7}$$

— за волной

$$u_{,n} = -\frac{1}{v_n}\Big(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + v_{0\tau}u_{,s}\Big), \qquad v_{,n} = -\frac{1}{v_n}\Big(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + v_{0\tau}v_{,s} - \frac{w_0^2}{r}\Big),$$
$$w_{,n} = -\frac{v_{0\tau}}{v_n}\,w_{0,s} - \frac{w_0}{r}\Big(\nu_r + \frac{v_{0\tau}}{v_n}\,\nu_x\Big). \tag{8}$$

Подставив выражения для производных по нормали (7), (8) в (5), (6), получим следующие выражения:

— для компонент вектора вихря перед волной

$$2\omega_{0x} = (w_{0,s} + \nu_x w_0/r)(\nu_x - \nu_r v_{0\tau}/v_{0n}), \qquad 2\omega_{0r} = (w_{0,s} + \nu_x w_0/r)(\nu_r + \nu_x v_{0\tau}/v_{0n}),$$
$$2\omega_{0\varphi} = -p_{0,s}/(\rho_0 v_{0n}) + \nu_x w_0^2/(r v_{0n}) - v_{0\tau,s}v_{0\tau}/v_{0n} - v_{0n,s}; \tag{9}$$

— для компонент вектора вихря за волной (с учетом соотношений на скачке (3))

$$2\omega_x = (w_{0,s} + \nu_x w_0/r)(\nu_x - \nu_r v_{0\tau}/v_n), \qquad 2\omega_r = (w_{0,s} + \nu_x w_0/r)(\nu_r + \nu_x v_{0\tau}/v_n),$$
$$2\omega_\varphi = -p_{,s}/(\rho v_n) + \nu_x w_0^2/(r v_n) - v_{0\tau,s}v_{0\tau}/v_n - v_{n,s}. \tag{10}$$

Разложим вектор завихренности на нормальную ω_n и касательные составляющие ω_τ, ω_φ:

— перед волной

$$2\omega_{0n} = 2(\omega_{0x}\nu_x + \omega_{0r}\nu_r) = w_{0,s} + \nu_x w_0/r,$$
$$2\omega_{0\tau} = 2(\omega_{0x}\tau_x + \omega_{0r}\tau_r) = v_{0\tau}(r w_{0,s} + \nu_x w_0)/(r v_{0n}) = 2\omega_{0n}v_{0\tau}/v_{0n},$$
$$2\omega_{0\varphi} = -p_{0,s}/(\rho_0 v_{0n}) + \nu_x w_0^2/(r v_{0n}) - v_{0\tau}v_{0\tau,s}/v_{0n} - v_{0n,s};$$

— за волной

$$2\omega_n = 2(\omega_x\nu_x + \omega_r\nu_r) = w_{0,s} + \nu_x w_0/r = 2\omega_{0n},$$
$$2\omega_\tau = 2(\omega_x\tau_x + \omega_r\tau_r) = v_{0\tau}(r w_{0,s} + \nu_x w_0)/(r v_n) = 2\omega_{0\tau}v_{0n}/v_n = 2\omega_{0\tau}\rho/\rho_0,$$
$$2\omega_\varphi = -p_{,s}/(\rho v_n) + \nu_x w_0^2/(r v_n) - v_{0\tau}v_{0\tau,s}/v_n - v_{n,s}.$$

Из данных соотношений следует, что нормальная компонента завихренности при переходе через поверхность разрыва остается непрерывной функцией. Из выражения для касательной компоненты вихря ω_τ следует, что величина ω_τ/ρ остается непрерывной при переходе через поверхность разрыва независимо от того, является ли разрыв ударной или детонационной волной:

$$\omega_\tau/\rho = \omega_{0\tau}/\rho_0.$$

Таким образом, для описанного класса течений выполняется закон сохранения величины ω_τ/ρ, хотя сами величины ω_τ и ρ терпят разрыв, как и в случае нестационарных течений [4].

Для нахождения касательной компоненты вихря ω_φ за волной используем законы сохранения массы и импульса на поверхности разрыва (3), а также выражение для $\omega_{0\varphi}$ в (9):

$$\nu_x w_0^2/r - v_{0\tau}v_{0\tau,s} = 2\omega_{0\varphi}v_{0n} - p_{0,s}/\rho_0 + v_{0n}v_{0n,s},$$
$$p_{,s} = p_{0,s} + p_{0,s}v_{0n}(v_{0n} - v_n) + p_0 v_{0n,s}(v_{0n} - v_n) + p_{0,s}v_{0n}(v_{0n,s} - v_{n,s}), \qquad v_n = \rho_0 v_{0n}/\rho.$$

Подставив эти соотношения в выражение (10) для ω_φ, получим

$$\omega_\varphi = \omega_{0\varphi}\,\frac{\rho}{\rho_0} + \frac{v_{0n,s}}{2}\Big(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\Big)^2\Big/\frac{\rho}{\rho_0} - \frac{p_{0,s}}{2\rho_0 v_{0n}}\Big(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\Big) - \frac{v_{0n}\rho_{0,s}}{2\rho_0}\Big(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\Big).$$

Таким образом, в цилиндрической системе координат за волной компоненты завихренности определяются следующим образом:

$$\omega_x = \omega_n\nu_x + \omega_\tau\tau_x = \nu_x\omega_{0n} - \nu_r\omega_{0\tau}\,\frac{\rho}{\rho_0}, \qquad \omega_r = \omega_n\nu_r + \omega_\tau\tau_r = \nu_r\omega_{0n} + \nu_x\omega_{0\tau}\,\frac{\rho}{\rho_0},$$
$$\omega_\varphi = \omega_{0\varphi}\,\frac{\rho}{\rho_0} + \frac{1}{2}\,(u_{0,s}\nu_x + v_{0,s}\nu_r - \varkappa v_{0\tau})\Big(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\Big)^2\Big/\frac{\rho}{\rho_0} - \frac{p_{0,s}}{2\rho_0 v_{0n}}\Big(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\Big) - \frac{v_{0n}\rho_{0,s}}{2\rho_0}\Big(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\Big). \tag{11}$$

Здесь $\varkappa = -(\partial\boldsymbol{\nu}/\partial s)\cdot\boldsymbol{\tau}$ — кривизна поверхности разрыва. Компоненты вектора вихря за волной зависят от завихренности перед волной, от параметров газа и их производных по естественной координате, а также от отношения плотностей и функций $\varkappa$, $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\tau}$, определяющих геометрию поверхности разрыва. При постоянных значениях набегающего потока формулы (11) переходят в известные формулы [1–3].

Завихренность за стационарной детонационной волной для течений с постоянными параметрами. Если компонента скорости в направлении изменения угловой координаты равна нулю ($w_0 = 0$), а начальные параметры газа являются постоянными, то отличной от нуля компонентой вектора вихря (11) является только компонента

$$\omega_\varphi = -\frac{\varkappa v_{0\tau}}{2}\Big(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\Big)^2\Big/\frac{\rho}{\rho_0}$$

($v_{0\tau} = u_0\cos\alpha$ — касательная компонента скорости).

Таким образом, при постоянных значениях набегающего потока завихренность является функцией, зависящей от отношения плотностей ρ/ρ_0, кривизны волны $\varkappa$, угла наклона касательной к поверхности разрыва α и скорости набегающего потока u_0.

В свою очередь, величина ρ/ρ_0 определяется из законов сохранения на поверхности разрыва (3) и является функцией параметров, определяющих состояние среды, и количества тепла, подведенного к единице массы газа $q = 2Q(\gamma^2 - 1)/a_0^2$:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1 + \gamma M_{0n}^2 + \sqrt{(M_{0n}^2 - 1)^2 - qM_{0n}^2}}{(\gamma - 1)M_{0n}^2 + q/(\gamma + 1) + 2}. \tag{12}$$

Здесь $M_{0n} = \mathrm{M}_0\sin\alpha$; $\mathrm{M}_0 = u_0/a_0$ — число Маха; a_0 — скорость звука; γ — показатель адиабаты.

Из условия неотрицательности подкоренного выражения в соотношении (12) следует, что обтекание тела возможно при изменении α в интервале $\alpha_J \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$. Здесь α_J — угол наклона касательной к волне в точке перехода волны в режим Чепмена — Жуге:

$$\alpha_J = \arcsin\Big(\frac{1}{\mathrm{M}_0}\sqrt{\frac{2 + q + \sqrt{q(4 + q)}}{2}}\Big). \tag{13}$$

Соотношение (13) позволяет найти ограничения для параметров задачи: $0 \leqslant q \leqslant q_*$. Здесь $q_* = (\mathrm{M}_0 - 1/\mathrm{M}_0)^2$; $(M_0)_* \leqslant \mathrm{M}_0 \leqslant \infty$; $(M_0)_* = \sqrt{(2 + q + \sqrt{q(4 + q)})/2}$.

Тангенс угла наклона касательной к волне равен

$$\operatorname{tg}\alpha_J = \sqrt{\frac{2 + q + \sqrt{q(4 + q)}}{2(\mathrm{M}_0^2 - 1) - q - \sqrt{q(4 + q)}}}.$$

Для ударной волны $\operatorname{tg}\alpha_J = \sqrt{1/(\mathrm{M}_0^2 - 1)}$. При критических значениях параметров задачи $q = q_*$ или $\mathrm{M}_0 = (M_0)_*$ $\operatorname{tg}\alpha_J = \infty$, $\alpha = \pi/2$. С увеличением M_0 угол наклона касательной к волне уменьшается, а с увеличением тепловыделения — увеличивается.

В работе [5] показано, что для течений с цилиндрической или сферической волной детонации, в отличие от течений с плоскими волнами, переход к режиму Чепмена — Жуге происходит на конечном расстоянии. В точке перехода пересжатой волны в режим Чепмена — Жуге она имеет касание третьего порядка.

Рассмотрим течение за участком волны детонации, предшествующее наступлению режима Чепмена — Жуге, когда параметры газа являются постоянными. В качестве примера предположим, что при обтекании некоего тела образуется волна вида $R^2 = 1/(a-x)-b$, которая в точке x_J (точке перехода в режим Чепмена — Жуге) обладает следующими свойствами (имеет касание третьего порядка): $R(x_J) = \pm \operatorname{tg}\alpha_J x_J$, $R'(x_J) = \pm \operatorname{tg}\alpha_J$, $R''(x_J) = 0$, производная $R'''(x_J)$ существует. Функция R равна нулю в точке $x_0 = a - 1/b$, за точкой $x = x_J$ волна является прямолинейной.

Условия в точке перехода в режим Чепмена — Жуге выполняются при следующих значениях параметров функции: $a = 3\operatorname{tg}^{-2/3}\alpha_J/2$, $b = 3\operatorname{tg}^{2/3}\alpha_J/4$, $x_J = \operatorname{tg}^{-2/3}\alpha_J/2$. Кривизна волны определяется выражением

$$\varkappa = -\frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial s}\boldsymbol{\tau} = -\frac{R''}{(1+(R')^2)^{3/2}} = -\frac{2(a-x)^2(3-4b(a-x))}{(1+4(a-x)^4R^2)^{3/2}}$$

и является положительной функцией на промежутке $[x_0, x_J]$. При $x \geqslant x_J$ кривизна равна нулю. В этом случае во всей области течения волну можно описать следующей функцией:

$$R(x) = \begin{cases} \pm\dfrac{\operatorname{tg}^{1/3}\alpha_J}{2}\sqrt{\dfrac{6\operatorname{tg}^{2/3}\alpha_J x - 1}{3 - 2\operatorname{tg}^{2/3}\alpha_J x}}, & x_0 \leqslant x \leqslant x_J, \\ \pm\operatorname{tg}\alpha_J x, & x \geqslant x_J. \end{cases}$$

Волна детонации $R(x)$ и касательная к волне при $q = 10$, $\gamma = 1{,}4$ и различных значениях числа Маха M_0 показаны на рис. 1. Точки соответствуют переходу волны в режим Чепмена — Жуге. За этими точками волна представляет собой прямую линию. Из рис. 1 следует, что чем больше число Маха, тем меньше угол наклона касательной к волне и тем ближе волна к поверхности тела.

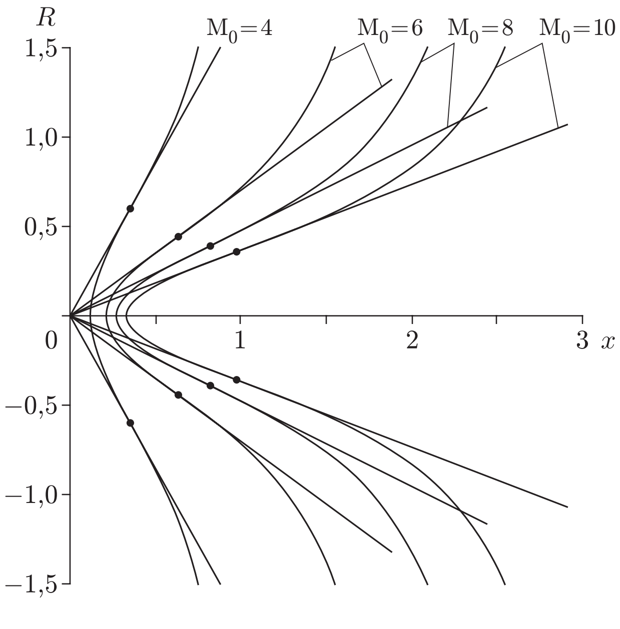

Рис. 1. Волна детонации $R(x)$ и касательная к волне при $q = 10$, $\gamma = 1{,}4$ (точки — переход волны в режим Чепмена — Жуге)

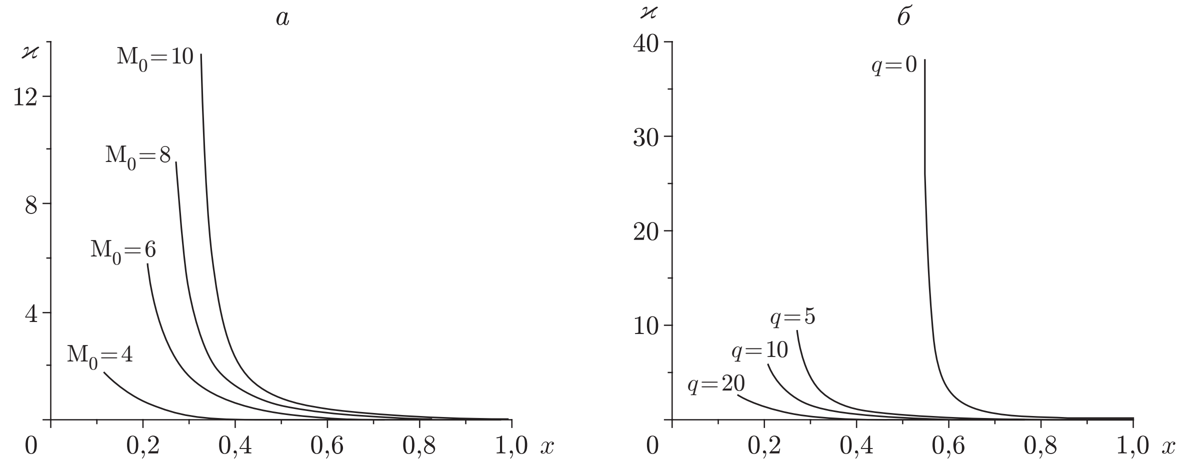

Рис. 2. Изменение кривизны волны $\varkappa$ на промежутке $[x_0, x_J]$ при $\gamma = 1{,}4$:
а — $q = 10$; *б* — $M_0 = 6$

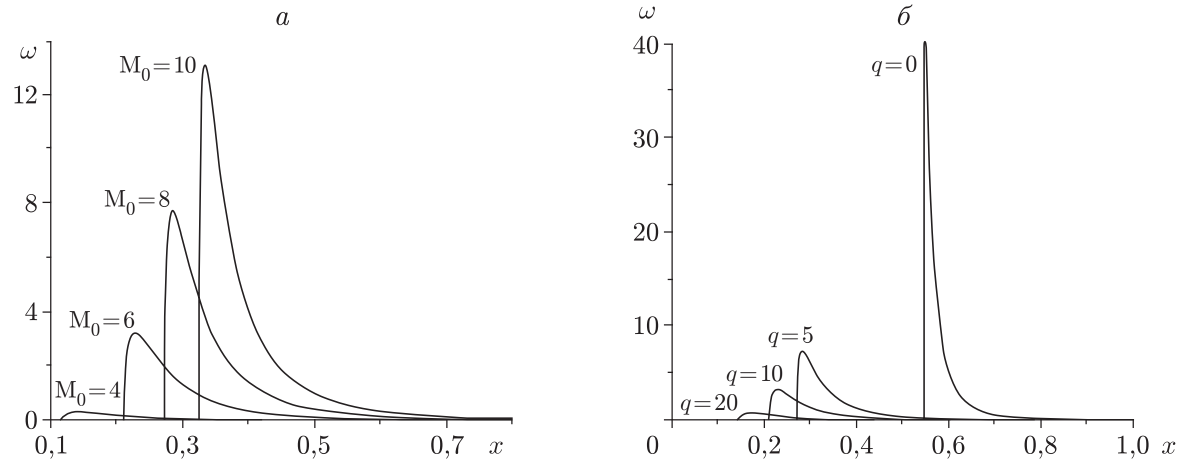

Рис. 3. Изменение завихренности ω при $\gamma = 1{,}4$:
а — $q = 10$; *б* — $M_0 = 6$

На рис. 2,*а,б* показано изменение кривизны волны $\varkappa$ на промежутке $[x_0, x_J]$ при различных значениях числа Маха и тепловыделения соответственно. В точке x_0 кривизна принимает максимальное значение, а в точке перехода в режим Чепмена — Жуге обращается в нуль. Кривизна имеет наибольшее значение для ударной волны ($q = 0$), за волной детонации кривизна волны уменьшается с увеличением энерговыделения в ней.

На рис. 3,*а,б* показано изменение завихренности $\omega = -2\omega_\varphi/u_0$ при различных значениях числа Маха и тепловыделения соответственно. Вихрь равен нулю в точке x_0, где волна является прямой ($\alpha = \pi/2$), и в точке перехода в режим Чепмена — Жуге x_J. Вихрь является максимальным при значениях x, близких к значениям x_0. С увеличением числа Маха завихренность растет (рис. 3,*а*) и достигает наибольшего значения за ударной волной (рис. 3,*б*). Увеличение тепловыделения приводит к значительному уменьшению завихренности за волной детонации.

Таким образом, исследована завихренность закрученного потока непосредственно за стационарной детонационной волной. Обнаружено, что завихренность достигает максимального значения для ударных волн, а для детонационных волн уменьшается с увеличением энерговыделения в волне. При переходе через поверхность разрыва нормальная компонента вихря остается непрерывной функцией. Также показано, что для данного класса течений выполняется закон сохранения величины ω_τ/ρ при любых распределениях параметров газа в набегающем потоке.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лайтхилл М.** Динамика диссоциирующего газа // Вопросы ракетной техники: Сб. науч. тр. М.: Изд-во иностр. лит., 1957. № 6. С. 41–60.
2. **Майкапар Г. И.** Вихри за головной ударной волной // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1968. № 4. С. 162–165.
3. **Русанов В. В.** Производные газодинамических функций за искривленной ударной волной. М., 1973. (Препр. / АН СССР. Ин-т прикл. математики; № 18).
4. **Левин В. А., Скопина Г. А.** Распространение волн детонации в закрученных потоках газа // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 4. С. 3–6.
5. **Левин В. А., Черный Г. Г.** Асимптотические законы поведения детонационных волн // Прикл. математика и механика. 1967. Т. 31, № 3. С. 393–405.

Поступила в редакцию 16/I 2007 г.