

6. Корнев В. М. Об аппроксимации в задачах устойчивости и колебаний упругих оболочек при сгущении собственных значений.—«Изв. АН СССР. МТТ», 1972, № 2.
7. Корнев В. М. Особенности задач выпучивания тонкостенных оболочек.— В кн.: Динамика твердого тела. Вып. 25. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1976.
8. Корнев В. М. О структурных формулах при расчете цилиндрических оболочек на колебания и устойчивость.— ПМ, 1974, т. 10, вып. 4.
9. Корнев В. М. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки, нагруженной внешним поперечным давлением, с учетом краевого эффекта.—«Инж. журн. МТТ», 1967, № 3.
10. Шкутин Л. И., Шубин И. А. Экспериментальное исследование устойчивости пологих конических оболочек при статическом нагружении давлением.— ПМ, 1966, т. 2, № 6.
11. Tenpyson R. C. Buckling modes of circular cylindrical shells under axial compression.—«AIAA J.», 1969, vol. 7, N 8. Рус. пер. «Ракетп. техника и космонавтика», 1969, № 8.
12. Ворович И. И. О некоторых прямых методах в нелинейной теории пологих оболочек.— ПММ, 1956, т. 20, вып. 4.
13. Болотин В. В. Статические методы в строительной механике. Изд. 2-е. М., Стройиздат, 1965.

УДК 539.30 + 620.171.5

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ВБЛИЗИ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ ПО МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПО МЕТОДУ ФОТОУПРУГОСТИ

Я. М. Ширяев

(Ленинград)

Концентрация напряжений вблизи вершины трещины, находящейся в поперечном поле простого растяжения, в рамках моментной теории упругости уже была объектом исследований [1—5]. Из работ [1—3] следует, что наличие моментных напряжений приводит к повышению концентрации напряжений вблизи вершины трещины. Этот результат «противоречит» снижающему эффекту моментных напряжений в известной задаче о концентрации напряжений вблизи кругового отверстия в растянутом поле. В работе [4] говорится, что наличие моментных напряжений не влияет на величину коэффициента интенсивности напряжений, в [5] рассматривается концентрация напряжений вблизи эллиптического отверстия, находящегося в поле простого растяжения. Из анализа результатов данной работы вытекает, что концентрация напряжений уменьшается с увеличением новой упругой постоянной материала l , введенной моментной теорией упругости.

Экспериментальные работы, в которых выявлялся бы эффект влияния моментных напряжений на концентрацию напряжений вблизи трещины, судя по литературе, пока отсутствуют.

Данная работа посвящена выявлению эффекта влияния моментных напряжений на концентрацию напряжений вблизи трещины как аналитически, так и экспериментально методом фотоупругости.

1. Рассматривается концентрация напряжений вблизи вершины трещины, находящейся в поперечном поле простого растяжения в системе координат (фиг. 1).

Для определения коэффициентов интенсивности напряжений по моментной теории упругости полезно ввести в рассмотрение сумму нормальных напряжений (инвариант), которая по классической и моментной тео-

риям имеет одинаковое значение и вы-
является из решения задачи Дирихле
[6, 7]. Из выражений для напряжений
[8] следует

$$(1.1) \quad \sigma_x + \sigma_y = k(2/r)^{1/2} \cos(\theta/2),$$

где k — коэффициент интенсивности
напряжений.

Введем комплексную переменную
 $z = x + iy = z_1 + re^{i\theta}$, где z_1 — вели-
чина, характеризующая положение вер-
шины трещины. Тогда (1.1) можно за-
писать в виде

$$(1.2) \quad \sigma_x + \sigma_y = \operatorname{Re} \left[k \left(\frac{2}{z - z_1} \right)^{1/2} \right].$$

Применим метод комплексной пе-
ременной. Согласно [6, 7], зависимость
между левой частью выражения (1.2)
и функциями напряжений имеет вид

$$(1.3) \quad \sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re}[\varphi'(z)].$$

Сопоставляя (1.2) и (1.3) и имея в
виду, что (1.2) справедливо лишь при
значениях z , близких к z_1 , получим
выражение k в виде

$$(1.4) \quad k = 2 \sqrt{2} \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1)^{1/2} \varphi'(z).$$

Из (1.4) видно, что коэффициенты интенсивности напряжений k опреде-
ляются достаточно просто, если только известна функция $\varphi'(z)$ вблизи
вершины трещины.

В данной задаче целесообразно использование конформного отобра-
жения. Пусть $z = \omega(\zeta)$, тогда

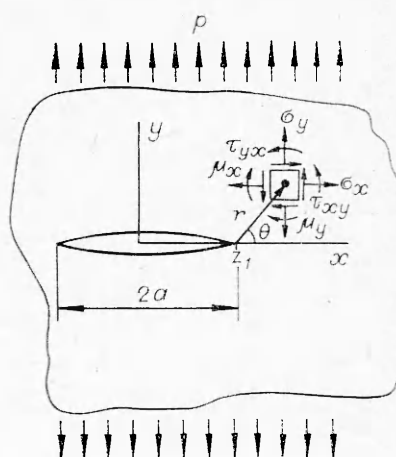
$$\varphi'(z) = \frac{d\varphi}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}.$$

При этом соответствующая вершине трещины точка z_1 на плоскости z пе-
рейдет в точку ζ_1 на плоскости ζ . Выражение (1.4) принимает вид

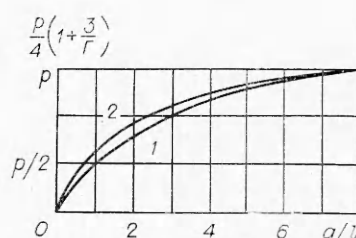
$$(1.5) \quad k = 2 \sqrt{2} \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_1} [\omega(\zeta) - \omega(\zeta_1)]^{1/2} \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}.$$

Возьмем отображение $z = \omega(\zeta) = (a/2)(\zeta + 1/\zeta)$, преобразующее пря-
мую трещину длиной $2a$ по направлению оси x , расположенную в плоско-
сти z центрально относительно начала координат, в круглое отверстие
единичного радиуса на плоскости ζ . При этом точка, соответствующая
вершине трещины $z = a$, перейдет в точку $\zeta = 1$ на плоскости ζ . Выраже-
ние (1.5) преобразуется с учетом, что $\varphi'(\zeta)$ на круговой границе не имеет
особой точки при $\zeta = 1$, и принимает вид

$$(1.6) \quad k = \frac{2}{\sqrt{2}} \varphi'(\zeta) \Big|_{\zeta=1}.$$



Ф и г. 1



Ф и г. 2

Граничные условия задачи на бесконечности: $\sigma_y^{(\infty)} = p$; $\sigma_x^{(\infty)} = \tau_{xy}^{(\infty)} = \tau_{yx}^{(\infty)} = 0$; моментные напряжения с учетом связи между моментными и силовыми напряжениями [7] равны

$$\mu_x^{(\infty)} = \mu_y^{(\infty)} = 0.$$

Граничные условия на окружности единичного радиуса $t = e^{i\theta}$

$$(1.7) \quad \sigma_r - i\tau_{r\theta} = 0, \quad \mu_r = 0.$$

После преобразования переменных граничные условия (1.7) приобретают вид

$$\begin{aligned} \overline{\omega'(t)}\varphi(t) + \omega(t)\overline{\varphi'(t)} + \overline{\omega'(t)}\overline{\psi(t)} + 8(1-\nu)l^2\overline{\varphi''(t)} - 2i\partial H/\partial \bar{t} = 0, \\ \operatorname{Re}\{(i/t)[8(1-\nu)l^2\overline{\varphi''(t)} - 2i\partial H/\partial \bar{t}]\} = 0, \end{aligned}$$

где φ , ψ , H — потенциалы Колосова—Мухелишвили—Миндлина [7]; ν — коэффициент Пуассона; l — новая упругая постоянная, введенная моментной теорией.

Искомая функция напряжений $\varphi(\zeta)$ записывается в виде

$$\varphi(\zeta) = (pa/8)(\zeta - 3/\Gamma\zeta),$$

где $\Gamma = i + \frac{64(1-\nu)K_1(a/2l)}{K_1(a/2l) + K_3(a/2l)} \left(\frac{l}{a}\right)^2$;

$K_1(a/2l)$ и $K_3(a/2l)$ — модифицированные функции Бесселя второго рода (функции Макдональда).

Используя для оценки концентрации напряжений выражение (1.6), получим

$$(1.8) \quad k = (p\sqrt{a}/4)(1 + 3/\Gamma).$$

Проанализируем выражение (1.8). В предельном случае ($l=0$, $\Gamma=1$), тогда $k = (p\sqrt{a}/4)(1 + 3) = p\sqrt{a}$ получаем классическое решение [8]. С ростом l величина Γ увеличивается и коэффициент интенсивности напряжений k уменьшается. В предельном случае $l \rightarrow \infty$, тогда $k = p\sqrt{a}/4$. На фиг. 2 показано изменение $k/\sqrt{a} = (p/4)(1 + 3/\Gamma)$ в зависимости от отношения a/l при значениях коэффициента Пуассона $\nu = 0$ и $0,3$ (кривые 1, 2 соответственно).

2. Как известно, моментная теория упругости дает наиболее ощутимые поправки к решениям классической теории упругости для тех задач, в которых напряженное состояние имеет большие градиенты.

К этому классу задач относится и искомая задача о концентрации напряжений вблизи вершины трещины. Постановка эксперимента и его идея основываются на рассмотрении концентрации напряжений вблизи трещин различной длины в растянутой полосе.

Для определения концентрации напряжений использовался поляризационно-оптический метод при комнатной температуре. Образцы полос изготавливались из эпоксидной смолы ЭД-6, толщиной $1,5 + 2,2$ мм. В образцах острым ножом при температуре высокоэластичного состояния (порядка $100-120^\circ\text{C}$) прорезались трещины различной длины. Трещины были удалены друг от друга и от краев полосы на достаточно большие расстояния, чтобы вдали от трещины осуществлялось равномерно растя-

нудое поле. При механической обработке не допускалось возникновения напряжений. Нагрузочное устройство (специально сконструированный для этих испытаний пресс) может быть установлено для исследований на поляризационно-оптических установках КСП-7 и ППУ-7, изготавливаемых Ленгосуниверситетом им. А. А. Жданова.

Чисто растягивающие силы выбирались так, чтобы образцы, оставаясь в упругой стадии работы, имели достаточные максимальные напряжения; предел пропорциональности материала составлял 550 кг/см^2 , модуль упругости $40\,000 \text{ кг/см}^2$ и коэффициент Пуассона $\nu = 0,40$. При подборе растягивающих сил деформация контролировалась путем ступенчатого роста нагрузки с выдержкой в течение 30 мин в конце каждой ступени. Образец отбраковывался, как только становилось заметным влияние ползучести. Нагружение прекращалось, если наибольшая деформация составляла не более 60% от соответствующей деформации предела пропорциональности.

Вблизи вершины трещины нормальное напряжение σ_y выражается

$$(2.1) \quad \sigma_y = \frac{k}{\sqrt{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right).$$

Из (2.1) коэффициент интенсивности напряжений может быть определен через σ_y при $\theta = 0$, т. е.

$$(2.2) \quad k = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \theta = 0}} \sigma_y \sqrt{2r}.$$

В последнем выражении (2.2) величина σ_y является функцией r . Для трещины с малым, но отличным от нуля радиусом вершины напряжения будут конечны при $r = 0$ и выражение (2.1) не будет удовлетворяться. Однако уже вблизи самой вершины трещины напряжения могут аппроксимироваться выражением (2.1) (см., например, [8]).

Вблизи вершины трещины $\sigma_{y\max}$ может вычисляться из максимального порядка интерференционных полос n_{\max} с использованием основного закона фотоупругости в форме $\sigma_{y\max} = C n_{\max}$, где C — постоянная материала образца данной толщины.

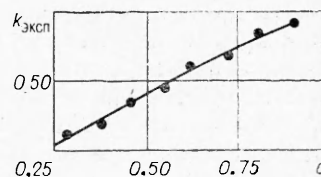
Согласно сравнительной методике данного исследования, испытывается образец, имеющий несколько трещин различной длины. При этом коэффициенты интенсивности напряжений, определенные экспериментально, для любых двух трещин i и j связаны соотношением

$$k_{i\text{эксп}}/k_{j\text{эксп}} = \Delta(n_{\max})_i/\Delta(n_{\max})_j,$$

где $\Delta(n_{\max})$ — приращение порядка изохром на контуре вершины трещины, соответствующее приращению прикладываемой нагрузки.

Высокая точность этого сравнительного метода, примененного автором при исследовании концентрации напряжений вблизи отверстия и неоднородности [9], заключается в использовании отношения $\Delta(n_{\max})_i/\Delta(n_{\max})_j$, благодаря чему ошибки, обусловленные краевыми эффектами, экстраполяционными и другими факторами, могут быть сведены к минимуму.

Различие в приращениях максимального порядка изохром для трещин различной длины находилось путем графического экстраполирования с использованием круговой поляризации при увеличенном изображении интер-



Ф и г. 3

ференциальных полос. Для определения положения порядков и граничных наблюдений применялся оптический компаратор. Использовался в основном монохроматический свет с длиной волны 546,1 мкм.

В результате экспериментального исследования построена зависимость в безразмерной форме коэффициента интенсивности напряжений $k_{\text{эксп}}$ от полудлины трещины a для одного и того же материала полосы (фиг. 3). Из рассмотрения экспериментальной кривой видно, что $k_{\text{эксп}}$ уменьшается с уменьшением длины трещины, причем изменение непропорционально \sqrt{a} , как это вытекает из классической теории.

Поступила 15 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Sternberg E., Muki R. The effect of couple-stresses on the stress concentration around a crack.—Intern. J. Solids and Structures, 1967, vol. 3, p. 69—95.
2. Tiwari G. Effect of couple-stresses on the distribution of stress along a crack.—J. Science Engng Research, 1968, vol. 12, p. 125—138.
3. Hahn H. Rißprobleme im Cosserat-Kontinuum.—ZAMM, 1974, Bd 51, S. 143—145.
4. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Об одном приеме решения задач о трещине и штампе в моментной теории упругости.—Проблемы прочности, 1971, № 3, с. 78—81.
5. Itou S. The effect of couple-stresses on the stress concentration around an elliptic hole.—Acta Mechanica, 1973, vol. 16, p. 289—296.
6. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5-е. М., «Наука», 1966.
7. Mindlin R. Complex representation of displacements and stresses in plane strain with couple-stresses.— В кн.: Труды международного симпозиума в Тбилиси. Т. 1. М., «Наука», 1963.
8. Irwin G. Fracture.— In: Handbuch der Physik. Bd 6. Berlin, Springer, 1958, S. 551—590.
9. Ширяев Я. М. Концентрация напряжений вблизи неоднородности и экспериментальное выявление эффекта моментных напряжений.—ПМТФ, 1976, № 4, с. 142—144.

УДК 539.4

О ПРОЧНОСТИ МАТЕРИАЛОВ НА СЖАТИЕ

М. М. Муздакбаев, В. С. Никифоровский

(Новосибирск)

Состояние сжатия в материале, горных породах, деталях машин и элементах конструкций является, по-видимому, наиболее распространенным. Для оценки этого состояния введено такое понятие, как предел прочности на одноосное сжатие, эта характеристика материала считается одной из основных. Можно также принять, что материал разрушается при достижении максимальными касательными напряжениями предела прочности, причем последний оказывается в два раза меньше предела прочности на сжатие. При этом следует отметить достаточно сильную зависимость предела прочности на сжатие от многих факторов: формы образца, его размеров и объема, от условий на торцах и т. п. [1,2]. Экспериментаторы давно пришли к заключению, что предел прочности на одноосное сжатие