

УДК 539.374

## ПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ПОЛОСЫ ПРИ УСЛОВИИ ТЕКУЧЕСТИ, ЗАВИСЯЩЕМ ОТ СРЕДНЕГО НАПРЯЖЕНИЯ

Е. А. Лямина

Институт проблем механики РАН, 119526 Москва  
E-mail: lyamina@ipmnet.ru

Рассматривается пластический изгиб широкой полосы в условиях плоской деформации в предположении, что материал полосы подчиняется условию текучести Кулона — Мора и двум типам кинематических соотношений, предложенных Спенсером и Хиллом.

Ключевые слова: изгиб, условие Кулона — Мора, пластичность, большие деформации.

Изгиб полосы при больших деформациях в условиях плоской деформации был рассмотрен в рамках нескольких моделей жесткопластического тела [1–6]. Во всех этих случаях предполагалось, что пластическое течение не зависит от среднего напряжения. Такое предположение оправданно для большинства металлических материалов. Модели материалов, учитывающие зависимость условия текучести от среднего напряжения, развивались для гранулированных материалов и грунтов, для которых изгиб не является характерным видом деформации. Обзор таких моделей представлен в [7]. Тем не менее условия текучести современных металлических материалов, таких как некоторые алюминиевые сплавы и марки сталей, проявляют зависимость от среднего напряжения при выполнении условия несжимаемости [8–11]. Для таких материалов вполне подходят модели [7] и изгиб является важным видом деформации, например при обработке давлением. В настоящей работе построено решение для плоского изгиба полосы с использованием моделей, предложенных Хиллом [1] и Спенсером [12]. Показано, что для данного вида деформации эти решения совпадают. Решение является обобщением решения, полученного в [1] для модели идеального жесткопластического материала. Однако новое решение основано на принципиально отличном подходе, изложенном в [13].

При плоской деформации модель материала, предложенная в [12], в полярной системе координат  $(r, \theta)$ , которая будет использована в дальнейшем, определяется уравнениями

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0; \quad (1)$$

$$(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \sin \varphi + [(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 4\sigma_{r\theta}^2]^{1/2} = 2k \cos \varphi; \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0; \quad (3)$$

$$\sin 2\psi \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \cos 2\psi \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) + \sin \varphi \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - 2 \frac{d\psi}{dt} \right) = 0. \quad (4)$$

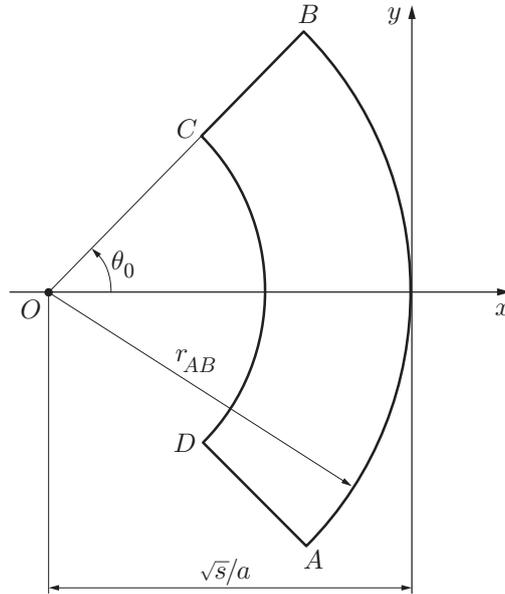


Рис. 1. Геометрическая схема процесса

Здесь (1) — уравнения равновесия, (2) — условие текучести Кулона — Мора, (3) — уравнение несжимаемости и (4) — уравнение, связывающее напряженное и деформированное состояния;  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  и  $\sigma_{r\theta}$  — компоненты тензора напряжений;  $u$  и  $v$  — проекции вектора скорости на направления  $r$  и  $\theta$  соответственно;  $\psi$  — угол между наибольшим главным напряжением и осью  $r$ , отсчитываемый от оси против хода часовой стрелки;  $\varphi$  — угол внутреннего трения;  $k$  — коэффициент сцепления;  $d/dt$  обозначает полную производную по времени. В модели, предложенной в [1], уравнение (4) замещается следующим уравнением:

$$\sin 2\psi \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \cos 2\psi \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) = 0. \quad (5)$$

Уравнения классической пластичности получаются при  $\varphi = 0$ . При этом  $k$  — предел текучести при чистом сдвиге.

Толщину полосы в начале процесса обозначим  $H_0$ , длину —  $2L_0$ . Конечная и все промежуточные формы деформируемой области при чистом изгибе определяются двумя дугами окружностей —  $AB$  и  $CD$ , и двумя прямыми —  $AD$  и  $CB$  (рис. 1). Процесс симметричен относительно оси  $x$ , а ось  $y$  совпадает с касательной к дуге  $AB$  в каждый момент времени. В дальнейшем будет рассмотрена только область  $y \geq 0$ . Угол наклона прямой  $CB$  к оси  $x$  обозначим  $\theta_0$ , а радиусы дуг  $AB$  и  $CD$  —  $r_{AB}$  и  $r_{CD}$  соответственно. В начальный момент времени ( $\theta_0 = 0$ )  $r_{AB} \rightarrow \infty$ ,  $r_{CD} \rightarrow \infty$ , длины дуг  $AB$  и  $CD$  равны  $2L_0$ , а прямых  $CB$  и  $AD$  —  $H_0$ . В [13] были введены лагранжевы координаты  $\zeta$  и  $\eta$ , совпадающие по предположению с траекториями главных напряжений, по формулам

$$\frac{x}{H_0} = \sqrt{\frac{\zeta}{a} + \frac{s}{a^2}} \cos(2a\eta) - \frac{\sqrt{s}}{a}, \quad \frac{y}{H_0} = \sqrt{\frac{\zeta}{a} + \frac{s}{a^2}} \sin(2a\eta), \quad (6)$$

где  $a$  — произвольная монотонно возрастающая функция времени;  $s$  — произвольная функция  $a$ . Причем  $a = 0$  при  $t = 0$ . В [13] показано, что преобразование (6) удовлетворяет уравнению несжимаемости (3) при любой функции  $s(a)$  и в начальный момент времени  $x = \zeta H_0$  и  $y = \eta H_0$ , если

$$s = 1/4 \quad (7)$$

при  $a = 0$ . Таким образом, при выполнении соотношения (7) и в соответствии с выбранной системой координат  $(x, y)$  (см. рис. 1)  $\zeta = 0$  на  $AB$ ,  $\zeta = -1$  на  $CD$ ,  $\eta = 0$  на оси симметрии и  $\eta = L_0/H_0$  на  $BC$ . Для удобства введем полярную систему координат, движущуюся вдоль оси  $x$ , с центром в точке  $x = -\sqrt{s}/a$  и  $y = 0$  (см. рис. 1). Используя (6), получим

$$\frac{r}{H_0} = \sqrt{\frac{\zeta}{a} + \frac{s}{a^2}}, \quad \theta = 2a\eta. \quad (8)$$

Отсюда для  $r_{AB}$ ,  $r_{CD}$ ,  $\theta_0$  и текущей толщины  $h$  имеем выражения

$$\frac{r_{AB}}{H_0} = \frac{\sqrt{s}}{a}, \quad \frac{r_{CD}}{H_0} = \sqrt{\frac{s}{a^2} - \frac{1}{a}}, \quad \theta_0 = \frac{2aL_0}{H_0}, \quad \frac{h}{H_0} = \frac{\sqrt{s} - \sqrt{s-a}}{a}. \quad (9)$$

Таким образом, функция  $s(a)$  полностью определяет геометрию деформируемой области. При чистом изгибе полосы из жесткопластических материалов существует нейтральная линия, на которой напряжения терпят разрыв, а скорости деформации обращаются в нуль. Скорости деформации могут быть определены из (6) непосредственным дифференцированием. В частности, эквивалентная скорость деформации (второй инвариант тензора скоростей деформации) будет равна

$$\xi_{eq} = \frac{|\zeta + ds/da| da}{\sqrt{3}(\zeta a + s)} dt. \quad (10)$$

Уравнение (10) определяет положение нейтральной линии в лагранжевых координатах

$$\zeta = \zeta_n = -\frac{ds}{da}. \quad (11)$$

Из (8) следует, что в каждый момент времени координатные линии лагранжевой системы  $(\zeta, \eta)$  совпадают с координатными линиями системы  $(r, \theta)$ . Таким образом,  $\sigma_{r\theta} = 0$  во всех точках деформируемой области, и в частности на ее границе, что является одним из краевых условий при чистом изгибе полосы. Кроме того, напряжения  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{\theta\theta}$  главные, причем  $\sigma_{rr} < \sigma_{\theta\theta}$  (и  $\psi = \pi/2$ ) в интервале  $\zeta_n < \zeta \leq 0$  и  $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta}$  (и  $\psi = 0$ ) в интервале  $-1 \leq \zeta < \zeta_n$ . Тогда условие текучести (2) принимает вид

$$(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \sin \varphi \mp (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 2k \cos \varphi, \quad (12)$$

где верхний знак относится к области  $\zeta_n < \zeta \leq 0$ , а нижний — к области  $-1 \leq \zeta < \zeta_n$ . Второе из уравнений равновесия (1) и условие (12) показывают, что напряжения не зависят от  $\theta$ . Используя (8), найдем

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial \zeta}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{2ar}{H_0^2} \frac{\partial}{\partial \zeta}. \quad (13)$$

Переходя в первом из уравнений равновесия (1) к дифференцированию по  $\zeta$  с помощью (13), исключая  $r$  с помощью (8) и учитывая, что  $\sigma_{r\theta} = 0$ , найдем

$$2(\zeta a + s) \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \zeta} + a(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0. \quad (14)$$

Исключая в этом уравнении  $\sigma_{\theta\theta}$  с помощью (12) и интегрируя в областях  $\zeta_n < \zeta \leq 0$  и  $-1 \leq \zeta < \zeta_n$  при краевых условиях  $\sigma_{rr} = 0$  при  $\zeta = 0$  и  $\zeta = -1$ , получим

$$\sigma_{rr} = k \operatorname{ctg} \varphi [1 - s^{n_1} (\zeta a + s)^{-n_1}], \quad n_1 = \sin \varphi / (1 + \sin \varphi) \quad (15)$$

в области  $\zeta_n < \zeta \leq 0$  и

$$\sigma_{rr} = k \operatorname{ctg} \varphi [1 - (s - a)^{-n_2} (\zeta a + s)^{n_2}], \quad n_2 = \sin \varphi / (1 - \sin \varphi) \quad (16)$$

в области  $-1 \leq \zeta < \zeta_n$ . Так как напряжение  $\sigma_{rr}$  должно быть непрерывным при  $\zeta = \zeta_n$ , а  $\zeta_n$  определяется уравнением (11), то из (15) и (16) следует уравнение для  $s$

$$(s - a)^{-n_2} \left( s - a \frac{ds}{da} \right)^{n_2} = s^{n_1} \left( s - a \frac{ds}{da} \right)^{-n_1},$$

которое может быть преобразовано к виду

$$a \frac{ds}{da} = s - s^{n_3} (s - a)^{n_4}, \quad n_3 = \frac{\cos^2 \varphi}{2(1 + \sin \varphi)}, \quad n_4 = \frac{\cos^2 \varphi}{2(1 - \sin \varphi)}. \quad (17)$$

Решение этого уравнения должно быть получено численно при условии (7). После этого все геометрические параметры процесса могут быть определены из (9). Ясно, что уравнение (17) имеет решение при  $s \geq a$ . Физический смысл этого неравенства состоит в том, что  $r_{CD} = 0$  при  $s = a$ , как следует из (9). Заметим также, что в начальный момент времени правая и левая части уравнения (17) обращаются в нуль. Определим производную  $ds/da$  при  $a = 0$  из условия, что главный вектор внешних сил, приложенных на участке границы  $CB$  (см. рис. 1), равен нулю. В начальный момент времени напряжение  $\sigma_{xx}$  в декартовой системе координат, показанной на рис. 1, равно нулю во всех точках. Тогда из условия текучести (12), в котором  $\sigma_{rr}$  должно быть заменено на  $\sigma_{xx}$ , а  $\sigma_{\theta\theta}$  — на  $\sigma_{yy}$ , получим

$$\sigma_{yy} = 2k \cos \varphi / (1 + \sin \varphi) \quad (18)$$

при  $\zeta_n < \zeta \leq 0$  и

$$\sigma_{yy} = -2k \cos \varphi / (1 - \sin \varphi) \quad (19)$$

при  $-1 \leq \zeta < \zeta_n$ . Приравнивая главный вектор внешних сил к нулю, из (18) и (19) найдем

$$\frac{2k \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \zeta_n = \frac{2k \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} (1 + \zeta_n)$$

или с учетом (11)

$$\frac{ds}{da} = -\zeta_n = \frac{1 + \sin \varphi}{2} \quad (20)$$

при  $a = 0$ . Условие (20) используется при численном решении уравнения (17).

Изгибающий момент определяется как

$$M = \int_{r_{CD}}^{r_{AB}} \sigma_{\theta\theta} r \, dr. \quad (21)$$

Переходя в (21) к лагранжевой переменной с помощью (8), представляя  $\sigma_{\theta\theta}$  как функцию  $a$  и  $\zeta$  с помощью (12), (15) и (16) и интегрируя, получим

$$m = \frac{M}{kH_0^2} = \frac{\cos \varphi}{2a^2} \left[ 2s - a \cos \varphi + \frac{s^{n_1} (\zeta_n a + s)^{1-n_1}}{n_2} - \frac{(s - a)^{-n_2} (\zeta_n a + s)^{1+n_2}}{n_1} \right]. \quad (22)$$

Здесь  $s$  и  $\zeta_n$  являются известными функциями  $a$  вследствие численного решения уравнения (17) и соотношения (11). При  $a = 0$  изгибающий момент определяется с помощью (18) и (19) в виде

$$m = \frac{M}{kH_0^2} = \frac{\cos \varphi}{2}. \quad (23)$$

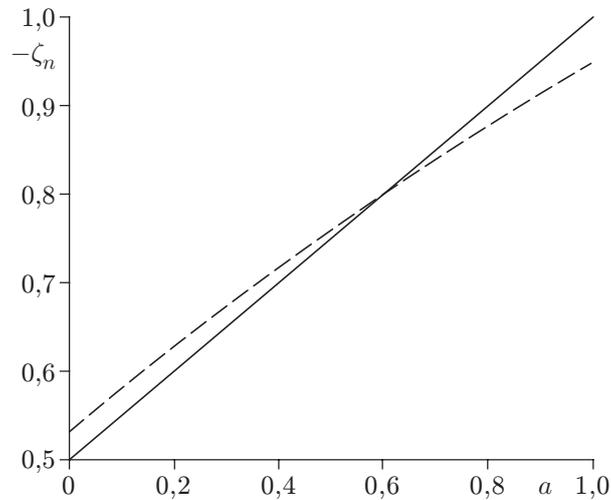
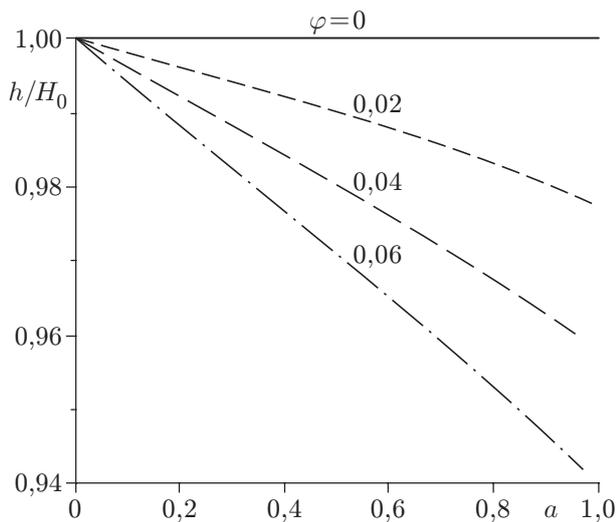
Рис. 2. Влияние угла  $\varphi$  на положение нейтральной линии

Рис. 3

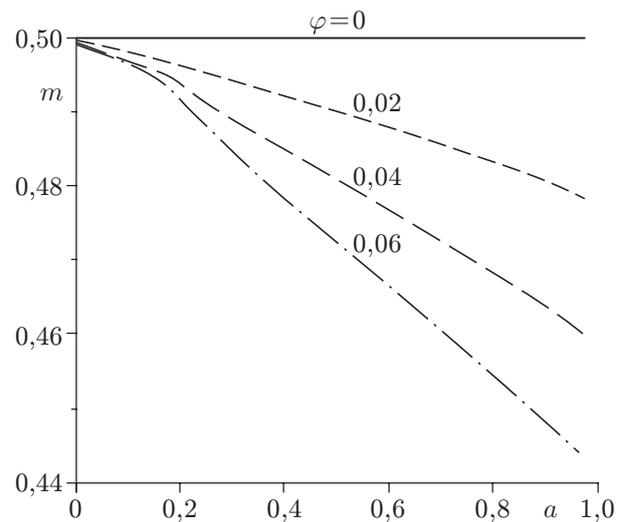
Рис. 3. Влияние угла  $\varphi$  на текущую толщину полосы

Рис. 4

Рис. 4. Влияние угла  $\varphi$  на величину безразмерного изгибающего момента

Осталось показать, что выполняются уравнения (4) и (5). Так как напряжения и скорости деформации не зависят от  $\theta$ , то достаточно рассмотреть решение на линии  $\theta = 0$ . Вследствие симметрии на этой линии  $v = 0$  и  $\partial u / \partial \theta = 0$ . Следовательно,  $\partial v / \partial r = 0$ . Кроме того,  $\psi = 0$  или  $\psi = \pi/2$ . Подставляя эти соотношения в (4) и (5), можно убедиться, что уравнения удовлетворяются. Таким образом, в рассматриваемом случае решения по обеим моделям совпадают.

В [9] величина  $\varphi$  была определена экспериментально для нескольких марок стали. В обозначениях данной работы интервал значений  $\varphi$  может быть представлен в виде  $0,014 < \varphi < 0,064$ . На рис. 2 для этих материалов показаны зависимости положения нейтральной линии от параметра  $a$  для двух значений угла  $\varphi$  (сплошная кривая соответствует  $\varphi = 0$ , штриховая —  $\varphi = 0,064$ ). Эти зависимости определены из решения уравнения (17) с использованием соотношения (11). Интересно отметить, что в начале процесса

нейтральная линия в материале, условие текучести которого зависит от среднего напряжения, располагается ближе к вогнутой поверхности  $CD$  (см. рис. 1), чем в материале, подчиняющемся условию Мизеса, а после определенного уровня деформации — ближе к выпуклой поверхности  $AB$ . Толщина полосы, определенная из (9), и безразмерный изгибающий момент, найденный по (22) и (23), показаны на рис. 3 и 4 соответственно для некоторых значений  $\varphi$ . На обоих рисунках при  $\varphi = 0$  кривые соответствуют решению по классической теории пластичности, полученному в [1]. Заметим, что в соответствии с (9) величина  $a$ , использованная на рисунках в качестве независимой переменной, прямо пропорциональна углу  $\theta_0$ , который имеет ясный физический смысл. Из рис. 4 следует, что изгибающий момент уменьшается в процессе деформирования полосы (за исключением решения, полученного по классической теории пластичности).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.
2. Малинин Н. Н., Ширшов А. А. Исследование больших деформаций при пластическом изгибе полосы с учетом упрочнения // Изв. вузов. Машиностроение. 1965. № 2. С. 165–172.
3. Малинин Н. Н. Большие деформации при пластическом изгибе // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 2. С. 120–123.
4. Малинин Н. Н., Ширшов А. А. Пластический изгиб листа при больших деформациях // Изв. вузов. Машиностроение. 1965. № 8. С. 187–192.
5. Verguts H., Sowerby R. The pure plastic bending of laminated sheet metals // Intern. J. Mech. Sci. 1975. V. 17, N 1. P. 31–51.
6. Dadras P., Majless S. A. Plastic bending of work hardening materials // Trans. ASME. J. Engng Ind. 1982. V. 104, N 3. P. 224–230.
7. Ostrowska-Maciejewska J., Harris D. Three-dimensional constitutive equations for rigid/perfectly plastic granular materials // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1990. V. 108. P. 153–169.
8. Drucker D. C. Plasticity theory, strength-differential (SD) phenomenon, and volume expansion in metals and plastics // Metallurg. Trans. 1973. V. 4A, N 3. P. 667–673.
9. Spitzig W. A., Sober R. J., Richmond O. The effect of hydrostatic pressure on the deformation behavior of maraging and HY-80 steels and its implications for plasticity theory // Metallurg. Trans. 1976. V. 7A, N 11. P. 1703–1710.
10. Brownrigg A., Spitzig W. A., Richmond O., et al. The influence of hydrostatic pressure on the flow stress and ductility of a spherodized 1045 steel // Acta Metall. 1983. V. 31, N 8. P. 1141–1150.
11. Spitzig W. A., Richmond O. The effect of pressure on the flow stress of metals // Acta Metall. 1984. V. 32, N 3. P. 457–463.
12. Spencer A. J. M. A theory of the kinematics of ideal soils under plane strain conditions // J. Mech. Phys. Solids. 1964. V. 12, N 5. P. 337–351.
13. Alexandrov S., Dixon G. A theory of bending and its application to axial crushing of square tubes // Proc. of the 4th Intern. ESAFORM conf. material forming, Liege (Belgium), 23–25 Apr. 2001. Liege: Univ. of Liege, 2001. V. 2. P. 765–768.

*Поступила в редакцию 26/VII 2004 г.,  
в окончательном варианте — 1/VII 2005 г.*