УДК 532.526+517.946

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФУЗИОННО-ДИНАМИЧЕСКИХ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ

О. А. Фроловская

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Исследуются краевые задачи для диффузионно-динамических пограничных слоев, возникающих вблизи вертикальной стенки при больших числах Шмидта, и динамических пограничных слоев, сопрягающихся на внутренней границе с диффузионно-динамическими слоями. Построены точные решения для пограничных слоев при малых и больших временах. Исследована корректность краевой задачи для стационарного диффузионно-динамического слоя.

Рассмотрим задачу о свободной конвекции вязкой жидкости вблизи вертикальной стенки (подложки) и переносе примеси при росте тонкой пленки из раствора-расплава полупроводниковых материалов. При этом геометрию области можно считать неизменной, так как предполагается, что скорость роста пренебрежимо мала (в реальных условиях за 1 ч толщина пленки увеличивается на 10 мкм). Если средняя концентрация примеси в растворе не равна равновесной, то вблизи подложки образуется зона пониженной концентрации примеси (при растворении образуется зона повышенной концентрации). Считаем, что плотность раствора зависит от концентрации примеси, а кинематический коэффициент вязкости ν и коэффициент диффузии D связаны соотношением $D \ll \nu$. Например, при росте тонких пленок из раствора-расплава полупроводниковых материалов величина ν порядка $10^{-2} \div 10^{-3}$ см^2/с, а D порядка 10^{-5} см^2/с. Это приводит к тому, что движение жидкости сосредоточено в тонком слое, примыкающем к подложке, а концентрация примеси отлична от средней в еще более тонком слое. При больших числах Шмидта $\mathrm{Sc} = \nu/D$ в области течения выделяется диффузионно-динамический пограничный слой толщиной порядка $(\mathrm{Re}^2\mathrm{Sc})^{-1/4}$, где Re — число Рейнольдса. В работе [1] получены уравнения особых диффузионно-динамических пограничных слоев при свободной конвекции вблизи вертикальной стенки для случаев, когда движение описывается классической моделью Обербека — Буссинеска и моделью микроконвекции. Модель микроконвекции разработана в [2] для исследования конвекции в областях малой протяженности, в слабых гравитационных или быстропеременных температурных полях. В этих пограничных слоях оказались существенными вязкие силы и силы плавучести, а силы инерции и продольный градиент давления пренебрежимо малы. При этом на число Рейнольдса не налагается никаких ограничений.

Вне диффузионно-динамического пограничного слоя концентрация примеси мало отличается от средней, а характер течения зависит от числа Рейнольдса. Если $\mathrm{Re} \ll \sqrt{\mathrm{Sc}}$, то вне диффузионного слоя можно использовать приближение Стокса. При $\mathrm{Re} \sim \sqrt{\mathrm{Sc}}$ течение описывается уравнениями Навье — Стокса. Если $\mathrm{Re} \gg \sqrt{\mathrm{Sc}}$, то в области движения образуется еще один чисто динамический пограничный слой толщиной порядка $(\mathrm{Sc}/\mathrm{Re}^2)^{1/4}$,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01-01-00782) и Совета поддержки ведущих научных школ (код проекта 00-15-96162).

сопрягающийся на внутренней границе с диффузионно-динамическим слоем, а на внешней — с областью состояния покоя.

Таким образом, получаем следующую картину течения. К подложке примыкает сверхтонкий диффузионно-динамический пограничный слой, в котором концентрация не равна средней, на удалении от стенки имеется слой жидкости, находящийся в равновесии, а между ними — тонкий динамический слой, в котором концентрация примеси мало отличается от средней, но еще имеет место движение жидкости. Для определения полей скорости, концентрации и давления нужно сначала решить задачу для диффузионно-динамического слоя (без уравнения для давления), вычислить внешнее представление скорости, затем, используя это представление как граничное условие, решить задачу для внешней асимптотики (для данного случая), определить давление в динамическом слое и, наконец, вычислить давление в диффузионно-динамическом слое.

Вывод уравнений пограничных слоев в моделях Обербека — Буссинеска и микроконвекции приведен в [1]; там же построены автомодельные решения и рассмотрены начальные асимптотики для диффузионно-динамических пограничных слоев, получены формулы для массообмена. В [3] исследованы нестационарные пограничные слои, построены их автомодельные решения, а также показано, что в чисто динамическом пограничном слое возникает зона противотока. В отличие от случая классического пограничного слоя [4] внешнее представление скорости в диффузионно-динамическом слое определяется в процессе решения задачи, а не из условия сращивания с внешним решением. Задача для динамического слоя отличается от классической тем, что значение продольной скорости задается на внутренней, а не на внешней границе. Все полученные системы уравнений являются нестандартными. Поэтому возникает вопрос о корректности основных краевых задач.

В данной работе строятся автомодельные решения нестационарного диффузионно-динамического пограничного слоя; рассматриваются начальные асимптотики в задаче о движении жидкости в динамическом пограничном слое, сопрягающемся на внутренней границе с диффузионно-динамическим слоем; исследуется разрешимость краевой задачи для стационарного диффузионно-динамического пограничного слоя.

Автомодельные решения нестационарного пограничного слоя. Задача для нестационарного диффузионно-динамического пограничного слоя в модели Обербека — Буссинеска состоит в нахождении компонент u, v вектора скорости $\boldsymbol{v}$, концентрации c и отклонения от гидростатического давления p в области $y > 0$, удовлетворяющих начально-краевой задаче [3]

$$\begin{gathered}
\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g\beta(c - c_\infty), \qquad \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2},\\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial c}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial x} + v\frac{\partial c}{\partial y} = D\frac{\partial^2 c}{\partial y^2},\\
c\big|_{t=0} = c_\infty, \qquad c\big|_{y=0} = f(t,x), \qquad u\big|_{y=0} = v\big|_{y=0} = 0,\\
c \underset{y\to\infty}{\longrightarrow} c_\infty, \qquad u \underset{y\to\infty}{\longrightarrow} u_\infty(t,x).
\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\beta = \mathrm{const} > 0$; ρ_0, c_∞ — средние плотность и концентрация раствора соответственно; $f(t,x)$ — заданная функция; $u_\infty(t,x)$ определяется в процессе решения задачи. Видно, что компоненты вектора скорости и концентрация находятся независимо от давления.

В задаче (1) можно построить автомодельные решения, если $f(t,x) = c_\infty - \alpha t^{-2}$ ($\alpha = \mathrm{const} > 0$). В этом случае решение будем искать в виде

$$u = \alpha \frac{g\beta D}{\nu t} U(\xi), \quad v = 0, \quad c - c_\infty = \alpha t^{-2}(C(\xi) - 1), \quad \xi = \frac{y}{\sqrt{Dt}}.$$

Для определения $U(\xi)$, $C(\xi)$ получаем задачу

$$U'' = C - 1, \qquad C'' + (\xi/2)C' + 2(C-1) = 0,$$
$$U(0) = 0, \qquad C(0) = 0, \qquad U' \underset{\xi\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad C \underset{\xi\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

решение которой записывается в виде

$$C(\xi) = 1 + \xi(\xi^2 - 6)\mathrm{e}^{-\xi^2/4}\left(\gamma + 6\int\limits_{\xi}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\eta^2/4}}{\eta^2(\eta^2-6)^2}\,d\eta\right),$$

где γ — произвольная постоянная;

$$U(\xi) = \int\limits_0^{\xi}\int\limits_{\eta}^{\infty}(1 - C(\omega))\,d\omega\,d\eta.$$

Отсюда для внешнего представления скорости имеем

$$u_\infty(t) = \alpha\,\frac{g\beta D}{\nu t}\,U_\infty, \qquad U_\infty = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_{\eta}^{\infty}(1 - C(\omega))\,d\omega\,d\eta.$$

Движение жидкости при малых временах. Рассмотрим начальный процесс роста пленки. В [1] изучена асимптотика задачи на интервале времени $[0,\tau]$ при $\tau \to 0$ для моделей Обербека — Буссинеска и модели микроконвекции. При этом компоненты скорости u, v и концентрация c находились в виде $u = u(t,y)$, $v \equiv 0$, $c = c(t,y)$ в предположении, что при малых временах они не зависят от продольной координаты (зависимость от x может развиться только со временем). В этом случае решение записывается в квадратурах.

В модели Обербека — Буссинеска при больших числах Рейнольдса в области течения образуется также чисто динамический пограничный слой, сопрягающийся на внутренней границе с диффузионно-динамическим слоем, а на внешней — с областью состояния покоя. При малых временах движение в динамическом слое толщиной порядка $\sqrt{\nu t}$ описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{2}$$

Начально-краевые условия ставятся в виде

$$u\big|_{t=0} = 0, \qquad u\big|_{y=0} = u_\infty(t,x), \qquad u \underset{y\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3}$$

Функция $u_\infty(t,x)$ — внешнее представление скорости, которое определяется из решения задачи для диффузионно-динамического слоя [1]:

$$u_\infty(t) = \frac{4Dg\beta(c_\infty - c_*)}{\nu}\,t\hat{U}_\infty, \qquad \hat{U}_\infty = -\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{\omega}^{\infty}\hat{c}(\alpha)\,d\alpha\,d\omega,$$

где D, g, β, c_∞, c_* — положительные постоянные ($c_* < c_\infty$); $\hat{c} = (c - c_\infty)/(c_\infty - c_*)$.

В задаче для динамического слоя также считаем, что решение не зависит от продольной компоненты x. В этом случае задача сводится к задаче о развитии пограничного слоя во времени для постепенного разгона с постоянным ускорением. Решение задачи (2), (3) будем искать в виде

$$u = \frac{4Dg\beta(c_\infty - c_*)\hat{U}_\infty}{\nu}\,tU(\zeta), \qquad v \equiv 0, \qquad \zeta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}.$$

Тогда для определения $U(\zeta)$ получаем задачу

$$U'' + 2\zeta U' - 4U = 0,$$
$$U(0) = 1, \qquad \lim_{\zeta\to\infty} U(\zeta) = 0.$$

Решением этой задачи является функция

$$U(\zeta) = (2\zeta^2 + 1)\Big(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\zeta \mathrm{e}^{-\alpha^2}\, d\alpha\Big) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\zeta \mathrm{e}^{-\zeta^2}.$$

Разрешимость краевой задачи. Исследуем вопрос о разрешимости краевой задачи для системы уравнений стационарного диффузионно-динамического пограничного слоя.

Наиболее полное исследование с использованием математической теории пограничного слоя несжимаемой жидкости представлено в [5]. Задачи для температурного пограничного слоя изучались в работах [6, 7]. В [6] рассматривалась краевая задача о продолжении стационарного пограничного слоя несжимаемой жидкости при вынужденном конвективном течении. В [7] доказано существование решения системы уравнений температурного пограничного слоя для несжимаемой жидкости с учетом подъемной силы.

Уравнения пограничного слоя для модели Обербека — Буссинеска имеют вид [1]

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad \nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g\beta(c - c_\infty), \qquad u\,\frac{\partial c}{\partial x} + v\,\frac{\partial c}{\partial y} = D\,\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}. \tag{4}$$

Основная краевая задача состоит в отыскании решения системы (4) в области $G = \{0 < x < A,\ 0 < y < \infty\}$ по условиям

$$\begin{gathered} c\big|_{x=0} = c_0(y), \qquad c\big|_{y=0} = c_*, \qquad u\big|_{y=0} = v\big|_{y=0} = 0, \\ u \underset{y\to\infty}{\longrightarrow} u_\infty(x), \qquad c \underset{y\to\infty}{\longrightarrow} c_\infty. \end{gathered} \tag{5}$$

В переменных Мизеса

$$x = x, \quad \psi = \psi(x, y), \quad u = \psi_y, \quad v = -\psi_x, \quad \psi(x, 0) = 0$$

(ψ — функция тока) основная краевая задача для системы уравнений диффузионно-динамического пограничного слоя (4), (5) состоит в следующем: в области $R = \{0 < x < A,$ $0 < \psi < \infty\}$ требуется найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\sqrt{\omega}\,\omega_{\psi\psi} = \chi(c - c_\infty), \qquad c_x = D(\sqrt{\omega}\,c_\psi)_\psi, \tag{6}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{gathered} c\big|_{x=0} = c_0(\psi), \qquad \omega\big|_{\psi=0} = 0, \qquad c\big|_{\psi=0} = c_*, \\ \omega(x, \psi) \underset{\psi\to\infty}{\longrightarrow} \omega_\infty(x), \qquad c(x, \psi) \underset{\psi\to\infty}{\longrightarrow} c_\infty. \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь $\omega(x, \psi) = u^2(x, y)$; $c(x, \psi) = c(x, y)$. Положительные величины χ, D, c_*, c_∞ полагаются постоянными ($c_* < c_\infty$).

В отличие от системы уравнений, рассмотренной в [7], система уравнений (6) нестандартна. В ней одно из уравнений является квазилинейным параболическим, вырождающимся на границе области, другое — обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка, при этом одна из независимых переменных рассматривается как параметр. Кроме того, скорость во внешнем потоке $\omega_\infty(x)$ не задается, а определяется в процессе решения задачи. Поэтому может оказаться, что внешнее представление решения не ограничено, что физически нереально. Системы такого вида ранее не исследовались.

Пусть начальное распределение концентрации $c_0(\psi)$ удовлетворяет следующим условиям:

— $c_0(\psi) > c_*$ при $\psi > 0$, $c_0(0) = c_*$, $c_0(\psi) \to c_\infty$ при $\psi \to \infty$, $c_0'(\psi) > 0$,

$$N/(1+\psi)^{2+\alpha} \leqslant c_\infty - c_0(\psi) \leqslant K/(1+\psi)^{2+\alpha},$$

где $0 < \alpha < 1$; N, K — положительные постоянные;

— $c_0(\psi)$, $c_0'(\psi)$, $c_0''(\psi)$ ограничены при $0 \leqslant \psi < \infty$ и удовлетворяют условию Гёльдера, и выполняется условие согласования

$$\frac{\partial}{\partial\psi}\,(\sqrt{\omega}\,c_0'(\psi)) = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ \psi = 0.$$

Введем обозначения: $\bar{R}$ — замыкание области R, $L(h) \equiv D(\sqrt{\omega}\,h_\psi)_\psi - h_x$, $\Gamma = (\partial R \cap \{x = 0\}) \cup (\partial R \cap \{\psi = 0\})$.

Теорема. *В области R при любом конечном $A > 0$ существует решение ω, c краевой задачи* (6), (7), *обладающее следующими свойствами: $c(x,\psi)$, $\omega(x,\psi)$, $\omega_\psi(x,\psi)$ непрерывны и ограничены в $\bar{R}$; $\omega(x,\psi) > 0$ при $\psi > 0$; $k_1\psi \leqslant \omega(x,\psi) \leqslant k_2\psi$ при $0 \leqslant \psi \leqslant \psi_0$; $0 < \omega_\psi < k_3$, $-k_4 < \sqrt{\omega}\,\omega_{\psi\psi} < 0$, $0 < c(x,\psi) < k_5$ в R; $\omega(x,\psi)$ ограничено при $\psi \to \infty$; c_x, c_ψ, $c_{\psi\psi}$, $\omega_{\psi\psi}$ ограничены в любой внутренней замкнутой подобласти области R, где постоянные k_i $(i = 1,\ldots,5)$ зависят от данных задачи; ψ_0 — малая постоянная.*

Уравнение (6) для c в области R является параболическим, вырождающимся при $\psi = 0$. Для доказательства существования решения задачи (6), (7) рассмотрим следующий итерационный процесс. Пусть известна начальная функция $\omega^{(0)}(x,\psi) = \varepsilon + \operatorname{th}\psi$ $(\varepsilon > 0)$. Зная $\omega^{(0)}(x,\psi)$, определяем $c^{(0)}(x,\psi)$, удовлетворяющее уравнению $c_x^{(0)} = D(\sqrt{\omega^{(0)}}\,c_\psi^{(0)})_\psi$ и граничным условиям $c^{(0)}(0,\psi) = c_0(\psi)$, $c^{(0)}(x,0) = c_*$. Затем переходим к следующему шагу итерации. Находим $\omega^{(n)}(x,\psi)$ по формуле

$$\omega^{(n)}(x,\psi) = \frac{1}{n} - \chi\int\limits_0^\psi\int\limits_z^\infty \frac{c^{(n-1)}(x,t) - c_\infty}{\sqrt{\omega^{(n-1)}(x,t)}}\,dt\,dz \tag{8}$$

и определяем $c^{(n)}(x,\psi)$ как решение уравнения

$$c_x^{(n)} = D(\sqrt{\omega^{(n)}}\,c_\psi^{(n)})_\psi, \tag{9}$$

удовлетворяющее условиям

$$c^{(n)}\big|_{x=0} = c_0(\psi), \qquad c^{(n)}\big|_{\psi=0} = c_*, \tag{10}$$

где $n = 1, 2, \ldots$.

Покажем, что решения $c^{(n)}(x,\psi)$, $\omega^{(n)}(x,\psi)$ задачи (8)–(10) существуют в области R и при $n \to \infty$ функции $c^{(n)}(x,\psi)$ и $\omega^{(n)}(x,\psi)$ сходятся к решению задачи (6), (7). Обозначим через M_i положительные постоянные, не зависящие от n.

Существование решения задачи (8)–(10) со свойствами, указанными в теореме, докажем индукцией по n. Предположим, что при $n < m$ существует решение $c^{(m-1)}(x,\psi)$, $\omega^{(m-1)}(x,\psi)$ задачи (8)–(10) и выполнены неравенства

$$\omega^{(m-1)}(x,\psi) > 0 \text{ при } \psi \geqslant 0, \qquad \omega_{\psi\psi}^{(m-1)}(x,\psi) < 0,$$

$$1/(m-1) + M_1\psi \leqslant \omega^{(m-1)}(x,\psi) \leqslant 1/(m-1) + M_2\psi \quad (0 < \psi \leqslant \psi_0),$$

$$M_3 < \omega^{(m-1)}(x,\psi) < M_4 \quad (\psi \geqslant \psi_0), \qquad 0 < \omega_\psi^{(m-1)}(x,\psi) < M_5, \tag{11}$$

$$c_* + \varphi(\psi)\mathrm{e}^{-\beta x} \leqslant c^{(m-1)}(x,\psi) \leqslant c_\infty,$$
$$-\frac{M_6 \mathrm{e}^{1/(1-\lambda x)}}{(1+\psi)^{2+\alpha}} \leqslant c^{(m-1)}(x,\psi) - c_\infty \leqslant -\frac{M_7(1+x)^{-\gamma}}{(1+\psi)^{2+\alpha}},$$
$$c^{(m-1)}(x,\psi) \leqslant c_* + M_8\sqrt{\psi} \quad (0 < \psi < \psi_0)$$

($\varphi(\psi)$, α, β, λ, γ определены ниже). Покажем, что эти оценки справедливы и при $n = m$.

С учетом оценок (11) из (8) получаем, что $\omega^{(m)} \geqslant 1/m > 0$ при $\psi \geqslant 0$.

Лемма 1. *Для функции* $\omega^{(m)}(x,\psi)$ *справедливо неравенство*

$$1/m + M_1\psi \leqslant \omega^{(m)}(x,\psi) \leqslant 1/m + M_2\psi \tag{12}$$

при $0 \leqslant \psi \leqslant \psi_0$.

Доказательство. С учетом (11) из (8) получаем

$$\omega^{(m)}(x,\psi) \geqslant \frac{1}{m} + \chi\int\limits_0^\psi\int\limits_z^\infty \frac{M_7(1+x)^{-\gamma}}{\sqrt{\omega^{(m-1)}(x,t)}(1+t)^{2+\alpha}}\,dt\,dz \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{m} + \frac{\chi M_7(1+x)^{-\gamma}}{\sqrt{M_4}}\int\limits_0^\psi\int\limits_z^\infty \frac{1}{(1+t)^{2+\alpha}}\,dt\,dz \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{m} + \frac{\chi M_7(1+A)^{-\gamma}}{\sqrt{M_4}\alpha(1+\alpha)}\Big(1 - \frac{1}{(1+\psi)^\alpha}\Big) \geqslant \frac{1}{m} + M_1\psi$$

при малых ψ,

$$\omega^{(m)}(x,\psi) \leqslant \frac{1}{m} + \chi\int\limits_0^\psi\int\limits_z^\infty \frac{M_6\mathrm{e}^{1/(1-\lambda x)}}{\sqrt{\omega^{(m-1)}(x,t)}(1+t)^{2+\alpha}}\,dt\,dz \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{m} + \frac{\chi M_6\mathrm{e}^{1/(1-\lambda x)}}{\sqrt{M_3}}\int\limits_0^\psi\int\limits_z^\infty \frac{1}{(1+t)^{2+\alpha}}\,dt\,dz \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{m} + \frac{\chi M_6\mathrm{e}}{\sqrt{M_3}\alpha(1+\alpha)}\Big(1 - \frac{1}{(1+\psi)^\alpha}\Big) \leqslant \frac{1}{m} + M_2\psi$$

при $0 \leqslant \psi \leqslant \psi_0$. Лемма доказана.

Из (12) следует, что $\omega^{(m)} > M_3$ при $\psi \geqslant \psi_0$. Из (8) с учетом этой оценки и (11) получаем $\omega^{(m)} < M_4$. Действительно,

$$\omega^{(m)}(x,\psi) \leqslant \frac{1}{m} + \chi\int\limits_0^\psi\int\limits_z^\infty \frac{M_6\mathrm{e}^{1/(1-\lambda x)}}{\sqrt{\omega^{(m-1)}(x,t)}(1+t)^{2+\alpha}}\,dt\,dz \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{m} + \frac{\chi M_6\mathrm{e}}{\sqrt{M_3}}\int\limits_0^\psi\int\limits_z^\infty \frac{1}{(1+t)^{2+\alpha}}\,dt\,dz = \frac{1}{m} + \frac{\chi M_6\mathrm{e}}{\alpha(1+\alpha)\sqrt{M_3}}\Big(1 - \frac{1}{(1+\psi)^\alpha}\Big) \leqslant$$
$$\leqslant 1 + \frac{\chi M_6\mathrm{e}}{\alpha(1+\alpha)\sqrt{M_3}}\Big(1 - \frac{1}{(1+\psi)^\alpha}\Big) < M_4.$$

Таким образом, $M_3 < \omega^{(m)}(x,\psi) < M_4$ при $\psi \geqslant \psi_0$, т. е. функция $\omega^{(m)}(x,\psi)$ принимает конечные значения при $\psi \to \infty$.

Из оценок (11) также следует, что $\omega_\psi^{(m)} > 0$ и $\omega_{\psi\psi}^{(m)} < 0$. Покажем, что $\omega_\psi^{(m)}(x,\psi)$ ограничено сверху. С учетом оценок (11) из (8) получаем

$$\omega_\psi^{(m)}(x,\psi) = -\chi \int\limits_\psi^\infty \frac{c^{(m-1)}(x,t) - c_\infty}{\sqrt{\omega^{(m-1)}(x,t)}}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \chi \int\limits_\psi^\infty \frac{M_6 \mathrm{e}^{1/(1-\lambda x)}}{\sqrt{\omega^{(m-1)}(x,t)}(1+t)^{2+\alpha}}\,dt \leqslant \frac{\chi M_6 \mathrm{e}}{(1+\alpha)\sqrt{M_3}}\,\frac{1}{(1+\psi)^{1+\alpha}} < M_5.$$

Лемма 2. *Если положительное решение $c^{(m)}(x,\psi)$ задачи* (9), (10) *существует в области R, то выполняется априорная оценка*

$$c^{(m)}(x,\psi) \geqslant c_* + \varphi(\psi)\mathrm{e}^{-\beta x}, \tag{13}$$

где

$$\varphi(\psi) = \begin{cases} A_1\psi & \textit{при} \quad \psi \in (0,1), \\ A_1(1 + \operatorname{th}(\psi - 1)) & \textit{при} \quad \psi \in (1,\infty); \end{cases}$$

$A_1 = \min\{c_0(1)/3, c_0'(0)/3\}$; $\beta = \mathrm{const} > 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $Q^{(m)} = c^{(m)}(x,\psi) - c_* - \varphi(\psi)\mathrm{e}^{-\beta x}$. Выражая отсюда $c^{(m)}(x,\psi)$ и подставляя в (9), получаем уравнение для $Q^{(m)}$

$$L(Q^{(m)}) = -\mathrm{e}^{-\beta x}\big[\beta\varphi(\psi) + D\sqrt{\omega^{(m)}}\,\varphi''(\psi) + D\omega_\psi^{(m)}\varphi'(\psi)/(2\sqrt{\omega^{(m)}})\big]. \tag{14}$$

При $0 < \psi \leqslant \psi_0 < 1$

$$L(Q^{(m)}) = -\mathrm{e}^{-\beta x}A_1\big[\beta\psi + D\omega_\psi^{(m)}/(2\sqrt{\omega^{(m)}})\big].$$

При $\psi > 1$ функция $\varphi(\psi) > A_1 > 0$, $0 < \varphi'(\psi) < A_1$, $-A_1 < \varphi''(\psi) \leqslant 0$. Если β достаточно велико, то выражение, стоящее в (14) в квадратных скобках, положительное. Поэтому $L(Q^{(m)}) \leqslant 0$. На границе $\Gamma = \{x = 0,\ \psi = 0\}$ имеем

$$Q^{(m)}\big|_{x=0} = c_0(\psi) - c_* - \varphi(\psi) \geqslant 0, \qquad Q^{(m)}\big|_{\psi=0} = 0.$$

Если $c^{(m)}(x,\psi)$ существует в области R, то $Q^{(m)}|_\Gamma \geqslant 0$, $|Q^{(m)}| < M_0$ и $L(Q^{(m)}) \leqslant 0$. Неотрицательная на Γ функция $Q^{(m)}(x,\psi)$ удовлетворяет в R линейному параболическому уравнению $L(Q^{(m)}) = F$, где $F \leqslant 0$. Согласно принципу максимума [5, 8] $Q^{(m)} \geqslant 0$ всюду в R, и, следовательно, выполняется оценка (13). Лемма доказана.

В силу оценки $\omega^{(m)}(x,0) > 0$ уравнение (9) для $c^{(m)}(x,\psi)$ является линейным параболическим уравнением, к которому применимы известные теоремы существования решения первой краевой задачи [8]. Это решение имеет первые производные по ψ и x и вторую производную по ψ, удовлетворяющие условию Гёльдера в замкнутой области $\bar{R}$. Установим оценки для $c^{(m)}(x,\psi)$ в области R, равномерные относительно m.

Лемма 3. *В области R имеет место оценка*

$$c^{(m)}(x,\psi) \leqslant c_\infty.$$

Доказательство. Сделаем в уравнении (9) замену $c^{(m)}(x,\psi) = c_\infty + \bar{c}^{(m)}\mathrm{e}^{\alpha x}$, где $\alpha = \mathrm{const} > 0$. Тогда $\bar{c}^{(m)}$ удовлетворяет уравнению $L(\bar{c}^{(m)}) = \alpha\bar{c}^{(m)}$. В точке положительного максимума функции $\bar{c}^{(m)} = (c^{(m)} - c_\infty)\mathrm{e}^{-\alpha x}$, если он достигается внутри области R, выполняется неравенство $\bar{c}^{(m)} \leqslant 0$. На границе Γ имеем

$$\bar{c}^{(m)}\big|_{x=0} = c_0(\psi) - c_\infty \leqslant 0, \qquad \bar{c}^{(m)}\big|_{\psi=0} \leqslant 0.$$

Следовательно, $\bar{c}^{(m)}(x,\psi) \leqslant 0$ всюду в R, поэтому $c^{(m)}(x,\psi) \leqslant c_\infty$ всюду в R. Лемма доказана.

Лемма 4. *В области R при $\psi \geqslant \psi_0$ выполняются оценки*

$$-\frac{M_6\mathrm{e}^{1/(1-\lambda x)}}{(1+\psi)^{2+\alpha}} \leqslant c^{(m)}(x,\psi) - c_\infty \leqslant -\frac{M_7(1+x)^{-\gamma}}{(1+\psi)^{2+\alpha}}, \tag{15}$$

где $0 < \alpha < 1$; $\lambda = \mathrm{const} > 0$ $(\lambda \neq 1/x)$; $\gamma = \mathrm{const} > 0$.

Доказательство. Положим $S^{(m)}(x,\psi) = c^{(m)}(x,\psi) - c_\infty$. Тогда $S^{(m)}(x,\psi)$ удовлетворяет уравнению $L(S^{(m)}) = 0$. Рассмотрим функцию

$$Q^{(m)}(x,\psi) = S^{(m)}(x,\psi) + M_6\mathrm{e}^{1/(1-\lambda x)}/(1+\psi)^{2+\alpha}$$

и

$$L(Q^{(m)}) = \Big[\frac{D(2+\alpha)(3+\alpha)\sqrt{\omega^{(m)}}}{(1+\psi)^2} - \frac{D(2+\alpha)\omega_\psi^{(m)}}{2(1+\psi)\sqrt{\omega^{(m)}}} - \frac{\lambda}{(1-\lambda x)^2}\Big]\frac{M_6\mathrm{e}^{1/(1-\lambda x)}}{(1+\psi)^{2+\alpha}}.$$

Если λ достаточно велико, то $L(Q^{(m)}) \leqslant 0$. На границе $\Gamma_1 = \{x = 0,\ \psi = \psi_0\}$ имеем

$$Q^{(m)}\big|_{x=0} = c_0(\psi) - c_\infty + \frac{M_6\mathrm{e}}{(1+\psi)^{2+\alpha}} \geqslant 0, \quad Q^{(m)}\big|_{\psi=\psi_0} = c(x,\psi_0) - c_\infty + \frac{M_6\mathrm{e}^{1/(1-\lambda x)}}{(1+\psi_0)^{2+\alpha}} \geqslant 0$$

для большого M_6. Тогда в силу неравенств $Q^{(m)}|_{\Gamma_1} \geqslant 0$, $|Q^{(m)}| \leqslant M_9$, $L(Q^{(m)}) \leqslant 0$, $(x,\psi) \in R$ функция $Q^{(m)}(x,\psi)$ неотрицательна всюду в области R.

Докажем теперь оценку сверху. Рассмотрим функцию

$$P^{(m)}(x,\psi) = S^{(m)}(x,\psi) + M_7(1+x)^{-\gamma}/(1+\psi)^{2+\alpha},$$

$$L(P^{(m)}) = \Big[\frac{D(2+\alpha)(3+\alpha)\sqrt{\omega^{(m)}}}{(1+\psi)^2} - \frac{D(2+\alpha)\omega_\psi^{(m)}}{2(1+\psi)\sqrt{\omega^{(m)}}} + \frac{\gamma}{1+x}\Big]\frac{M_7(1+x)^{-\gamma}}{(1+\psi)^{2+\alpha}}.$$

При достаточно большом γ $L(P^{(m)}) \geqslant 0$. Если $1/\gamma$ и M_7 достаточно малы, то $P^{(m)} \leqslant 0$ при $x = 0$ и $\psi = \psi_0$. Действительно,

$$P^{(m)}\big|_{x=0} = c_0(\psi) - c_\infty + \frac{M_7}{(1+\psi)^{2+\alpha}} \leqslant 0, \quad P^{(m)}\big|_{\psi=\psi_0} = c(x,\psi_0) - c_\infty + \frac{M_7(1+x)^{-\gamma}}{(1+\psi_0)^{2+\alpha}} \leqslant 0.$$

Так как $P^{(m)}\big|_{\Gamma_1} \leqslant 0$, $|P^{(m)}| \leqslant M_{10}$, $L(P^{(m)}) \geqslant 0$, согласно принципу максимума $P^{(m)}(x,\psi) \leqslant 0$ всюду в R, и, следовательно, справедливы оценки (15). Лемма доказана.

Лемма 5. *В области $R_1 = \{0 < x < A, 0 < \psi < \psi_0)$ справедлива оценка*

$$c^{(m)}(x,\psi) \leqslant c_* + M_8\sqrt{\psi}. \tag{16}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $S^{(m)}(x,\psi) = c^{(m)}(x,\psi) - c_* - M_8\sqrt{\psi}$, удовлетворяющую уравнению

$$L(S^{(m)}) = \frac{D}{4\sqrt{\omega^{(m)}}}\Big[\frac{\omega^{(m)}}{\psi^2} - \frac{\omega_\psi^{(m)}}{\psi}\Big]M_8\sqrt{\psi}.$$

Покажем, что выражение в квадратных скобках неотрицательное. Разложим функции $\omega^{(m)}(x,\psi)$ и $\omega_\psi^{(m)}(x,\psi)$ в окрестности нуля в ряд Тейлора

$$\omega^{(m)}(x,\psi) = \omega^{(m)}(x,0) + \omega_\psi^{(m)}(x,0)\psi + \omega_{\psi\psi}^{(m)}(x,0)\psi^2/2 + o(\psi^2),$$
$$\omega_\psi^{(m)}(x,\psi) = \omega_\psi^{(m)}(x,0) + \omega_{\psi\psi}^{(m)}(x,0)\psi + o(\psi).$$

Тогда

$$\omega^{(m)}(x,\psi) - \psi\omega_\psi^{(m)}(x,\psi) = 1/m - \omega_{\psi\psi}^{(m)}(x,0)\psi^2/2 + o(\psi^2) \geqslant 0,$$

так как $\omega_{\psi\psi}^{(m)} < 0$. Поэтому при малых ψ $L(S^{(m)}) \geqslant 0$. На границе имеем

$$S^{(m)}\big|_{x=0} = c_0(\psi) - c_* - M_8\sqrt{\psi} \leqslant 0,$$
$$S^{(m)}\big|_{\psi=0} = 0, \qquad S^{(m)}\big|_{\psi=\psi_0} = c^{(m)}(x,\psi_0) - c_* - M_8\sqrt{\psi_0} \leqslant 0,$$

если M_8 достаточно велико.

Поскольку $S^{(m)}\big|_{\partial R_1} \leqslant 0$, $|S^{(m)}| \leqslant M_{11}$, $L(S^{(m)}) \geqslant 0$, по принципу максимума $S^{(m)}(x,\psi) \leqslant 0$ в R_1, т. е. справедлива оценка (16). Лемма доказана.

Итерационный процесс может продолжаться сколь угодно долго. На каждом шаге итерации существует решение задачи (8)–(10) с требуемыми свойствами.

Пусть $\delta > 1$ — произвольное число. Рассмотрим область $R_\delta = \{0 < x < A,\ 1/\delta < \psi < \delta\}$. В этой области $K_1 < \sqrt{\omega^{(n)}} < K_2$, где K_i — положительные постоянные, зависящие от δ, но не зависящие от n, и $\omega_\psi^{(n)}$ равномерно ограничено по n. Так как коэффициенты уравнения (9) равномерно по n отделены от нуля и бесконечности, последовательность $\{c^{(n)}(x,\psi)\}$ компактна. Поэтому можно выделить подпоследовательность $\{c^{(n_k)}(x,\psi)\}$, равномерно сходящуюся к непрерывной в R_δ функции $c(x,\psi)$ при $n_k \to \infty$. Производные $\partial c^{(n)}/\partial x$, $\partial c^{(n)}/\partial\psi$, $\partial^2 c^{(n)}/\partial\psi^2$ равномерно сходятся к соответствующим производным функции $c(x,\psi)$ в каждой конечной области $[0,A]\times[1/\delta,\delta]$. В силу произвольности δ предельная функция $c(x,\psi)$ будет удовлетворять второму уравнению (6) во всей области R.

Остается доказать, что $c(x,\psi)$ удовлетворяет условиям (7). Согласно оценкам (13), (16) имеем

$$c_* \leqslant c(x,\psi) \leqslant c_* + M_8\sqrt{\psi}. \tag{17}$$

Переходя в неравенстве (17) к пределу при $\psi \to 0$, получим, что существует $\lim\limits_{\psi\to 0} c(x,\psi) = c_*$. Так же как и в работе [6], можно показать, что функция $c(x,\psi)$ удовлетворяет и последнему условию (7).

Из оценок $M_1\psi \leqslant \omega(x,\psi) \leqslant M_2\psi$ следует, что $\lim\limits_{\psi\to 0}\omega(x,\psi) = 0$.

Итак, функции $\omega(x,\psi)$, $c(x,\psi)$ являются решением краевой задачи (6), (7). Непрерывность функции $c(x,\psi)$ вплоть до границы следует из оценок (17). Непрерывность и ограниченность производных c_x, c_ψ, $c_{\psi\psi}$ в любой внутренней подобласти области R следует из свойств решений линейных параболических уравнений. Непрерывность ω, ω_ψ вплоть до границы и ограниченность $\omega_{\psi\psi}$ в любой внутренней замкнутой подобласти области R следует из определения функции $\omega(x,\psi)$ (8) и свойств функции $c(x,\psi)$. Справедливость теоремы установлена. Решение в переменных Мизеса после перехода к физическим переменным (x,y) будет обладать всеми необходимыми свойствами [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кузнецов В. В., Фроловская О. А.** Пограничные слои при свободной конвекции // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 3. С. 92–100.
2. **Пухначев В. В.** Модель конвективного движения при пониженной гравитации // Моделирование в механике. 1992. Т. 6, № 4. С. 47–56.
3. **Фроловская О. А.** Структура течения жидкости при свободной конвекции с большими числами Шмидта // Тр. Междунар. конф. "Математические модели и методы их исследования", г. Красноярск, 16–21 авг. 2001 г. Красноярск: Ин-т вычисл. моделирования СО РАН, 2001. Т. 2. С. 237–239.
4. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
5. **Олейник О. А., Самохин В. Н.** Математические методы в теории пограничного слоя. М.: Наука, 1997.
6. **Джураев Т. Д.** О системе уравнений температурного пограничного слоя для несжимаемой жидкости // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1971. № 3. С. 64–68.
7. **Хуснутдинова Н. В.** Краевая задача для системы уравнений температурного пограничного слоя // Докл. АН СССР. 1972. Т. 206, № 1. С. 64–67.
8. **Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию 26/X 2001 г.