ЛИТЕРАТУРА

1. Коробейников В. П. Об инвариантных решениях уравнений магнитной гидродинамики. Магнитная гидродинамика, 1967, № 3.
2. Пащенко Н. Т., Сыровой В. А. Исследование групповых свойств уравнений движения несжимаемой проводящей жидкости. Магнитная гидродинамика, 1967, № 4.
3. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1962.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Заклязьминский Л. А. Нелинейный эффект образования самоподдерживающегося высокотемпературного электропроводного слоя газа в нестационарных процессах магнитной гидродинамики. Докл. АН СССР, 1967, т. 3, № 4.
5. Волосевич П. П., Соколов В. С. Автомодельная задача о разлете электропроводного газа в среду с заданным осевым магнитным полем. Магнитная гидродинамика, 1967, № 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЖОУЛЕВОЙ ДИССИПАЦИИ ПРИ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. А. Бучин

(Москва)

Имеется обширный класс проводников, в которых проводимость нельзя считать не зависящей от плотности тока. Она отлична от константы, прежде всего в таких средах, как плазма и полупроводники. В работах [1,2] исследована физическая сущность этого явления. В них получено, что проводимость есть функция модуля плотности тока. Зависимость тока от напряженности электрического поля в законе Ома становится нелинейной. Как следствие этого становятся нелинейными уравнения электродинамики, причем для разных видов зависимости проводимости от тока эти уравнения могут быть как эллиптическими, так и гиперболическими. В работе [3] показано, что зависимости $\sigma = \sigma(j)$, которые приводят ко второму случаю, не имеют физического смысла. Уравнения электродинамики будут эллиптическими, если функция $\sigma = \sigma(j)$ удовлетворяет следующему условию:

$$\sigma - j\frac{d\sigma}{dj} > 0$$

Во многих случаях на практике проводимость слабо зависит от тока, так что эту зависимость можно представить в виде

$$\sigma = \sigma_0 + \varepsilon\sigma_1(j), \quad \sigma_0 = \text{const} \tag{0.1}$$

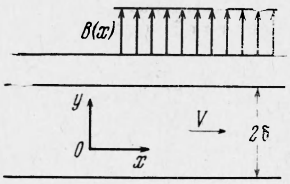
Здесь $\sigma(j)$ — диффференцируемая функция, ε — некоторый малый параметр. В этом случае для нахождения искомых величин можно применять метод малого параметра. Так, в работе [4], используя этот метод и предполагая слабую зависимость проводимости от тока, автор исследует вопрос о первом приближении по ε для джоулевых потерь в проэлектродной зоне при постоянном магнитном поле. Кроме этих потерь возможны потери еще и за счет концевых эффектов. В каналах МГД-генератора могут реализоваться условия, когда однородное магнитное поле достаточно далеко выходит за электродную зону, а затем его величина резко уменьшается до нуля. В области входа и выхода электропроводной среды из зоны магнитного поля возникают замкнутые токи, которые и приводят к дополнительным потерям. Если длина участка однородного поля вне электродной зоны более чем в два раза превосходит ширину канала, то с большой степенью точности эффекты входа и выхода среды в канале генератора можно изучать, рассматривая задачу о распределении тока в проводящей среде, движущейся в бесконечно длинном канале с диэлектрическими стенками при наличии магнитного поля, постоянного в одной половине канала и равного нулю в другой. Расчет джоулевых потерь для канала с параллельными стенками в случае постоянной проводимости дан в работе [5].

Ниже рассмотрена эта же задача, но в предположении, что проводимость слабо зависит от тока. При этом получена формула, дающая первое приближение по ε, для этих потерь, в выражение для которой входит только нулевое приближение для тока. В случае проводимости, слабо зависящей от тока, уравнения электродинамики всегда эллиптические. Далее, в работе приведен численный расчет по полученной формуле для конкретного вида проводимости (0.1), а именно

$$\sigma_1 (j) = \sigma_1 j^2 / j_*^2, \quad \upsilon_1 = \mathrm{const}$$

Здесь j_* — некоторое характерное значение тока.

1. Имеется двумерное установившееся течение проводящей жидкости в канале со стенками-изоляторами (фигура). В правой части канала приложено постоянное магнитное поле $\mathbf{B} = (0,\ 0,\ B_0)$, вектор которого направлен на читателя. В левой части канала магнитное поле равно нулю. Объединяя эти два условия, получаем



$$\mathbf{B} = (0,\ 0,\ B), \qquad B = B_0\,\theta(x), \qquad B_0 = \mathrm{const},$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \tag{1.1}$$

Жидкость течет в канале с постоянной скоростью

$$\mathbf{V} = (u_0,\ 0,\ 0), \quad u_0 = \mathrm{const} \tag{1.2}$$

Задача решается в приближении, когда гидродинамические величины можно считать известными.

Используя закон Ома, потенциальность электрического поля, а также наличие функции тока ψ у плотности тока $\mathbf{j}$

$$\mathbf{j} = (\sigma_0 + \varepsilon\sigma_1(j))\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,\mathbf{V}\times\mathbf{B}\right) \qquad \left(j_x = \frac{\partial\psi}{\partial y},\ j_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi \tag{1.3}$$

можно получить уравнение для функции ψ

$$\operatorname{div}\left[\frac{1}{\sigma_0 + \varepsilon\sigma_1(j)}\operatorname{grad}\psi\right] = -\frac{u_0 B_0 \delta(x)}{c} \tag{1.4}$$

Здесь $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

На стенках канала (изоляторы) имеем граничное условие $j_n = 0$. На бесконечности токи не текут $\mathbf{j}\,|_{x=\pm\infty} = 0$. Для функции ψ будем иметь

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{y=\pm\delta} = 0, \qquad \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x=\pm\infty} = 0, \tag{1.5}$$

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{x=\pm\infty} = 0$$

Решение уравнения (1.4) с граничными условиями (1.5) ищем в виде

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,\psi_k\,\varepsilon^k \qquad \left(\psi_k = \left.\frac{\partial^k\psi}{\partial\varepsilon^k}\right|_{\varepsilon=0},\ j_{xk} = \frac{\partial\psi_k}{\partial y},\ j_{yk} = -\frac{\partial\psi_k}{\partial x}\right)$$

Здесь ψ_0 — нулевое приближение для ψ, $\psi_0 + \varepsilon\psi_1$ — первое приближение для ψ. Полагая $\varepsilon = 0$ в уравнении (1.4) и граничных условиях (1.5), получим уравнение и граничные условия для ψ_0

$$\Delta\psi_0 = -\frac{\sigma_0 u_0 B_0 \delta(x)}{c} \tag{1.6}$$

$$\left.\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\right|_{y=\pm\delta} = 0, \qquad \left.\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\right|_{x=\pm\infty} = 0, \qquad \left.\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\right|_{x=\pm\infty} = 0 \tag{1.7}$$

Дифференцируя уравнение (1.4) и граничные условия (1.5) по ε и полагая его равным нулю, получим уравнение и граничные условия для функции ψ_1

$$\Delta\psi_1 = \operatorname{div}\left(\frac{\sigma_1(j_0)}{\sigma_0}\operatorname{grad}\psi_0\right) \tag{1.8}$$

$$\left.\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right|_{y=\pm\delta} = 0, \qquad \left.\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right|_{x=\pm\infty} = 0, \qquad \left.\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right|_{x=\pm\infty} = 0 \tag{1.9}$$

Решая (1.6) с граничными условиями (1.7), находим нулевое приближение для плотности тока $\mathbf{j}_0$

$$j_{x0} = -\frac{\sigma_0 u_0 B_0}{2\pi c}\ln\frac{\operatorname{ch}\pi x/2\delta + \sin\pi y/2\delta}{\operatorname{ch}\pi x/2\delta - \sin\pi y/2\delta}$$

$$j_{y0} = -\frac{\sigma_0 u_0 B_0}{\pi c}\operatorname{arctg}\left[\operatorname{sh}\frac{\pi x}{2\delta}\sec\frac{\pi y}{2\delta}\right] + \frac{\sigma_0 u_0 B_0}{c}\left(\theta(x) - \frac{1}{2}\right) \tag{1.10}$$

Заметим еще, что при $|x| \to \infty$ точное решение уравнения (1.4) с граничными условиями (1.5) стремится к константе (а, следовательно, плотность тока стремится к нулю), так как при достаточно больших $|x|$ влиянием неоднородности магнитного поля можно пренебречь.

Теперь перейдем к вычислению джоулевой диссипации Q в первом приближении. Точное значение Q дается формулой

$$Q = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{j^2}{\sigma(j)}\, dydx$$

Отсюда получаем, что в первом приближении джоулева диссипация равна

$$P = Q_0 + \varepsilon Q_1$$

$$\begin{aligned} &Q_0 = Q\,|_{\varepsilon=0}, && Q_0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\delta}^{\delta} j_0^2/\sigma_0 dydx \\ &Q_1 = \left.\frac{\partial Q}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}, && Q_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \left[\frac{2}{\sigma_0}(\mathbf{j}_0,\ \mathbf{j}_1) - \frac{\sigma_1(j_0)}{\sigma_0^2} j_0^2\right] dydx \end{aligned} \tag{1.11}$$

Дифференцируя (1.3) по ε и полагая $\varepsilon = 0$, получаем

$$\frac{1}{\sigma_0}\mathbf{j}_1 - \frac{\sigma_1(j_0)}{\sigma_0^2}\mathbf{j}_0 = -\operatorname{grad}\varphi_1$$

а также используя (1.8), будем иметь

$$Q_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \left[\frac{2}{\sigma_0}(\operatorname{grad}\psi_0,\ \operatorname{grad}\psi_1) - \frac{\sigma_1(j_0)}{\sigma_0^2} j_0^2\right] dydx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \left[\frac{2}{\sigma_0}\operatorname{div}(\psi_0 \operatorname{grad}\psi_1) - \frac{2}{\sigma_0}\psi_0\Delta\psi_1 - \frac{\sigma_1(j_0)}{\sigma_0^2} j_0^2\right] dydx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \left[\frac{2}{\sigma_0}\operatorname{div}(\psi_0 \operatorname{grad}\psi_1) - \frac{2}{\sigma_0}\psi_0 \operatorname{div}\left(\frac{\sigma_1(j_0)}{\sigma_0}\operatorname{grad}\psi_0\right) - \frac{\sigma_1(j_0)}{\sigma_0^2} j_0^2\right] dydx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \operatorname{div}\left[2\psi_0\left(\frac{1}{\sigma_0}\operatorname{grad}\psi_1 - \frac{\sigma_1(j_0)}{\sigma_0^2}\operatorname{grad}\psi_0\right)\right] dydx + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{\sigma_1(j_0)}{\sigma_0^2} j_0^2\, dydx =$$

$$= 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \operatorname{div}\left[-\frac{\partial(\psi_0\varphi_1)}{\partial y}\mathbf{Э}_x + \frac{\partial(\psi_0\varphi_1)}{\partial x}\mathbf{Э}_y\right] dydx +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \operatorname{div}(2\varphi_1\mathbf{j}_0)\, dydx + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{\sigma_1(j_0)}{\sigma_0^2} j_0^2 dydx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{\sigma_1(j_0)}{\sigma_0^2} j_0^2 dydx$$

Здесь $\mathbf{Э}_x$ и $\mathbf{Э}_y$ — единичные базисные векторы.

Можно показать, что

$$2\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \operatorname{div}(\varphi_1\mathbf{j}_0)\, dydx = 0$$

Действительно, используя теорему Грина для прямоугольника с вершинами A $(-a, -\delta)$, B $(a, -\delta)$, C (a, δ) и D $(-a, \delta)$, (1.7) и тот факт, что $\mathbf{j}_0 \to 0$ при $x \to \pm\infty$

$$2\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \operatorname{div}(\varphi_1\mathbf{j}_0)\, dydx = \lim_{a\to\infty} 2\int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \operatorname{div}(\varphi_1\mathbf{j}_0)\, dydx =$$

$$= 2\lim_{a\to\infty}\left[\int\limits_{AB}(-\varphi_1 j_{y0})\, dx + \int\limits_{BC}\varphi_1 j_{x0} dy + \int\limits_{CD}(-\varphi_1 j_{y0})\, dx + \int\limits_{DA}\varphi_1 j_{x0} dy\right] = 0$$

так как интегралы по AB и CD равны нулю вследствие граничного условия $j_{y0}|_{y=\pm\delta} = 0$, а пределы интегралов по BC и DA при $a \to \infty$ равны нулю, так как $\mathbf{j}_0 \to 0$ при $x \to \pm\infty$.

Таким образом, формула для джоулевой диссипации в первом приближении имеет вид

$$P = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sigma_0 + \varepsilon\sigma_1(j_0)}{\sigma_0^2} j_0^2 dy dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sigma(j_0)}{\sigma_0^2} j_0^2 dy dx \qquad (1.12)$$

Для того, чтобы найти P, нужно знать только нулевое приближение для плотности тока $\mathbf{j}_0$.

Подобные формулы могут быть получены аналогичным способом в случае двумерного или трехмерного канала произвольного конечного сечения, произвольного поля скоростей и произвольного магнитного поля (интегрирование производится по области, занятой жидкостью), если на все эти величины наложено только одно условие: токи на бесконечности должны быть равными нулю.

2. В качестве примера рассмотрим частный случай формулы (0.1)

$$\sigma = \sigma_0 + \varepsilon\sigma_1 j^2 / j_*^2$$

Здесь j_* — некоторое характерное значение плотности тока,

$$\sigma_1 = \mathrm{const}, \qquad P = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{\sigma_0} j_0^2 dy dx + \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sigma_1}{\sigma_0^2 j_*^2} j_0^4 dy dx \qquad (2.1)$$

Значение первого интеграла вычислено в работе [5]

$$Q_0 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{\sigma_0} j_0^2 dy dx = \frac{16\sigma_0\delta^2}{c^2\pi^3} u_0^2 B_0^2\ 1.052, \qquad Q_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0^2 j_*^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\delta}^{\delta} j_0^4 dy dx$$

Делаем замену переменных по формулам

$$\tau = \frac{1}{2} \ln \frac{\mathrm{ch}(\pi x / 2\delta) + \sin(\pi y / 2\delta)}{\mathrm{ch}(\pi x / 2\delta) - \sin(\pi y / 2\delta)}, \qquad \omega = -\,\mathrm{arc\,tg}\left[\mathrm{sh}\,\frac{\pi x}{2\delta}\sec\frac{\pi y}{2\delta}\right] \qquad (2.2)$$

выносим размерный множитель за знак двойного интеграла, тогда Q_1 преобразуется к следующему виду:

$$Q_1 = \frac{\sigma_1\sigma_0^2 4\delta^2 u_0^4 B_0^4}{j_*^2\pi^2 c^4} K, \qquad Q_1 = \frac{\sigma_1\sigma_0^2 4\delta^2 u_0^4 B_0^4}{j_*^2\pi^2 c^4} 3.019 \qquad (2.3)$$

$$K = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty}\int_0^{1/2\pi} (\tau^2 + \omega^2)^2 \frac{d\omega d\tau}{\mathrm{ch}^2\tau - \cos^2\omega} \qquad (2.4)$$

$$K = \frac{93}{16\pi}\zeta(3) + \frac{5\pi^2 G}{12} - \frac{\pi^3}{24} 2.06355 \approx 3.019$$

Окончательно получаем, что

$$P = \frac{16\sigma_0\delta^2}{c^2\pi^3} u_0^2 B_0^2\ 1.052 + \varepsilon \frac{\sigma_1\sigma_0^2 4\delta^2 u_0^4 B_0^4}{j_*^2\pi^2 c^4} 3.019 \qquad (2.5)$$

Поступила 18 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Емец Ю. П. Метод годографа в электродинамике сплошных нелинейнопроводящих сред. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6, стр. 1077—1080.
2. Sherman A. Magnetohydrodynamic flous of non-equilibrium plasmas. Y. Fluid Mech., August 1966, vol. 25, pt. 4.
3. Куликовский А. Г., Регирер С. А. Об устойчивости и эволюционности распределения электрического тока в среде с нелинейной проводимостью. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4, стр. 761—762.
4. Lo Surdo C. Current and potential distribution in a Faraday — type segmented electrode generator (SM-74/22). Electr. from MHD, Proc. simpos. Salzburg, July, 1966, vol. 2.
5. Ватажин А. Б. Определение джоулевой диссипации в канале с диэлектрическими стенками и одной непроводящей перегородкой при течении по нему проводящей среды в неоднородном магнитном поле. ПМТФ, 1964, № 4, стр. 122—123.