

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ САМОФУКУСИРОВКИ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ В СРЕДЕ СО СТРИКЦИОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

А. Ф. Мاستрюков, В. С. Сынах

(Новосибирск)

При распространении мощных лазерных импульсов во многих средах (например, в кристаллах и плазме) существенна нелинейная добавка к диэлектрической проницаемости, связанная с возникновением звуковых возмущений. Стрикционная нелинейность может приводить к самофокусировке лазерных импульсов, которая, в свою очередь, может сопровождаться, например, возникновением больших упругих напряжений в кристаллах.

В данной работе численно исследуется распространение аксиально-симметричных волновых пакетов в среде со стрикционной нелинейностью в рамках уравнений [1, 2]

$$(1) \quad \begin{aligned} i(u_t + vu_z) + \Delta_{\perp} u + \sigma \rho u &= 0, \\ \rho_{tt} - c_s^2 \Delta_{\perp} \rho &= -\Delta |u|^2 \end{aligned}$$

с естественными граничными условиями

$$\begin{aligned} \partial u / \partial r |_{r=0} &= \partial \rho / \partial r |_{r=0} = 0, \\ u(r = \infty) &= \rho(r = \infty) = 0, \\ u(|z| = \infty) &= \rho(|z| = \infty) = 0, \end{aligned}$$

где u — огибающая волнового пакета; v и c_s — групповая скорость света и скорость звука в среде; ρ — возмущение плотности среды; σ — постоянная, определяемая конкретным механизмом возбуждения стрикционной нелинейности; $\Delta_{\perp} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)$. Все величины соответствующим образом обезразмерены.

В (1), согласно [3], опущен член, описывающий дисперсию ($\sim u_{zz}$).

Конкретные численные эксперименты проводились для начальных условий

$$\begin{aligned} u(t=0) &= A \exp(-r^2/l^2 - (z-a)^2/L^2), \\ \rho(t=0) &= |u(t=0)|^2 / c_s^2, \quad \rho_t(t=0) = 0. \end{aligned}$$

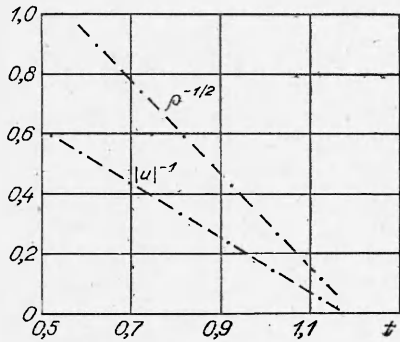
Рассмотрим вначале распространение импульсов большой протяженности L . В этом случае в (1) можно пренебречь продольными производными. В результате получим

$$(2) \quad iu_t + \Delta_{\perp} u + \sigma \rho u = 0, \quad \rho_{tt} - c_s^2 \Delta_{\perp} \rho = -\Delta |u|^2.$$

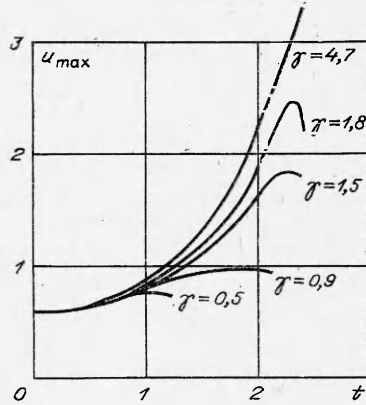
Можно убедиться непосредственной подстановкой, что система (2) удовлетворяется асимптотически при $t \rightarrow t_0$ автомодельной подстановкой, аналогичной приведенной в [4]:

$$(3) \quad \rho = (\lambda^2 / (t_0 - t)^2) R(\lambda r / (t_0 - t)), \quad u = (\lambda / (t_0 - t)) U(\lambda r / (t_0 - t)).$$

Поскольку решение (3) обладает особенностью при $t \rightarrow t_0$, это означает, что для протяженных импульсов (пучков) возможно образование коллапса за конечное время t_0 . Возможность выхода решения (2) на автомодельный режим подтверждается численным экспериментом. На фиг. 1 приведены максимальные значения ρ и $|u|$ как функций t , рассчитанные для пучка ($L = \infty$) с параметрами $A = 1$; $l = 3$ при $\sigma = 5$.



Ф и г. 1



Ф и г. 2

Приведем некоторые оценки для условий возникновения такого коллапса и времени его развития t_0 . Для этого рассмотрим устойчивость стационарного решения системы (2) вида

$$\rho = \rho_0, \quad u = a_0 \exp(i\varphi),$$

где ρ_0, a_0 — постоянные; $\varphi = \sigma_0 \rho_0 t$. Подставляя в (2) $\rho = \rho_0 + \delta\rho, u = (u_0 + \delta a) \exp(i\varphi + i\delta\varphi)$, где $\delta\varphi, \delta a, \delta\rho$ — малые добавки, линеаризуя получающиеся для них уравнения и полагая затем, что эти добавки пропорциональны $\exp(ikr - i\omega t)$, получим соотношения

$$\begin{aligned} i\omega\delta a + k^2 a_0 \delta\varphi &= 0, \quad k^2 \delta a + i\omega a_0 \delta\varphi - \sigma a_0 \delta\varphi = 0, \\ -2k^2 a_0 \delta a + (c_s^2 k^2 - \omega^2) \delta\rho &= 0. \end{aligned}$$

Эти соотношения приводят к дисперсионному уравнению

$$(4) \quad 2\omega_{\pm}^2 = k^4 + c_s^2 k^2 \pm [(k^4 + k^2 c_s^2)^2 - 4(c_s^2 k^6 - 2\sigma a_0^2 k^4)]^{1/2}.$$

Из (4) видно, что решение неустойчиво при условии

$$(5) \quad k^2 c_s^2 - 2\sigma a_0^2 < 0.$$

Величину a_0 можно отождествить с характерной начальной амплитудой, а k считать равным $1/l$, где l — характерный начальный поперечный размер пучка. Тогда a_0^2/k^2 имеет смысл мощности P . Отсюда можно записать приближенно условия самофокусировки волновых пучков в среде со стрикционной нелинейностью

$$P > c_s^2 / 2\sigma.$$

При выполнении этого условия величина $1/\text{Im}(\omega)$ представляет оценку для времени развития коллапса t_0 . Если $k \ll 1$, то

$$(6) \quad t_0 \sim \sqrt{2} l / \left(\sqrt{c_s^4 + 8\sigma a_0^2} - c_s^2 \right)^{1/2}.$$

Численные эксперименты подтверждают оценки (5), (6).

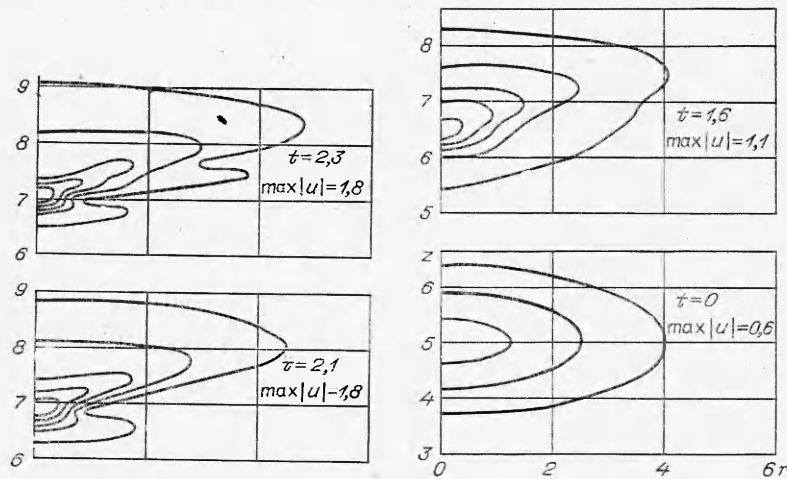
Для импульса начальной длины L разумно предположить, что коллапс образуется, если время нелинейного взаимодействия импульса со средой $t_1 = L/v(1 - c_s/v)$ много больше времени t_0 :

$$(7) \quad \gamma \equiv t_1/t_0 \gg 1.$$

Если условие (7) не выполняется, то следует ожидать, что после точки максимального стягивания волнового пакета происходит его дифракционное и дисперсионное расплывание. В приближении геометрической оптики время достижения максимума t_{max} может быть оценено следующим образом:

$$t_{\text{max}} \sim |t_1 t_0 / (t_1 - t_0)|.$$

Фиг. 2 иллюстрирует именно такую закономерность, наблюдавшуюся в численных экспериментах. Здесь показано поведение $u_{\text{max}} = \max |u(0, z, t)|$ как функции t для импульсов с параметрами $A = 0,6$; $l = 3$; $L = 1$; $c_s = 1$ при $\sigma = 5$, варьируемым же параметром является v . Входящая в выражение для γ величина a_0 полагалась равной $1/2 A$. Сле-



Фиг. 3

дует заметить, что конкретное значение коэффициента (здесь $1/2$) мало влияет на величину γ .

Численные эксперименты проводились в следующем диапазоне изменения параметров начального импульса: $0,5 \leq A \leq 1$; $l = 3$; $L = 1, \infty$; $c_s = 1$; $1 \leq v \leq 4$ при $\sigma = 5$, а также при $v/c_s \gg 1$ (вплоть до 10^2). Качественно картина при этом не менялась.

На фиг. 3, 4 приведена типичная картина эволюции начального импульса в случае отсутствия коллапса. Обращают на себя внимание следующие особенности:

1. При достаточно больших временах t возникают нарастающие пространственные осцилляции поля $|u|$ и возмущения плотности ρ . В передней части импульса ρ становится отрицательным, что приводит к «выбрасыванию» поля на периферию.

2. На поздней стадии в распространении плотности возникает второй максимум, который сначала отстает от основного, останавливается и затем движется в обратном направлении со скоростью c_s . Последнее обстоятельство является следствием того, что в этой области поле $|u|$ мало, и второе из уравнений (1) становится чисто волновым.

3. С течением времени скорость движения области максимального поля падает, а крутизна переднего фронта волны плотности нарастает. Это может приводить к возникновению в среде больших упругих напряжений. Такая ситуация возможна, например, при движении лазерного фокуса в нелинейной среде, когда скорость фокуса приближается к звуковой [5].

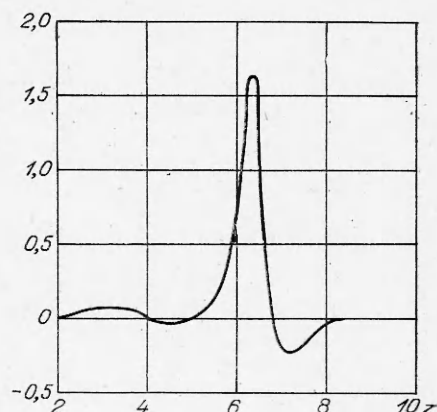
Для численных экспериментов применялась неявная разностная схема второго порядка точности по всем переменным с неравномерной пространственной сеткой. Типичный шаг по времени составлял примерно 0,01, а при $v/c_s \gg 1$ уменьшался до $5 \cdot 10^{-4}$. Пространственные шаги составляли около 0,01. Устойчивость схемы при различных значениях параметров проверялась повторным счетом с измененными шагами.

Авторы выражают благодарность В. Е. Захарову за обсуждение постановки задачи.

Поступила 30 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973.
2. Шуберт М., Вильгельми Б. Введение в нелинейную оптику. М., «Мир», 1973.
3. Захаров В. Е., Рубенчик А. М. Неустойчивость волноводов и солитонов в нелинейных средах.— ЖЭТФ, 1973, т. 65, вып. 9.
4. Захаров В. Е., Мاستрюков А. Ф., Сынах В. С. О динамике коллапса лэнгмюровых волн в высокотемпературной плазме.— «Физика плазмы», 1975, т. 1, вып. 4.
5. Луговой В. И., Стрельцов В. Н. Звуковые возмущения в среде при движении светового фокуса.— ЖЭТФ, 1973, т. 65, вып. 4.



Ф и г. 4