

УДК 539.3

О ТЕОРИЯХ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ С СИНГУЛЯРНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ТЕКУЧЕСТИ

Б. Д. Аннин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Обсуждаются особенности теорий идеальной пластичности, основанных на критериях текучести Треска и максимального приведенного напряжения. Рассмотрение ведется в каноническом базисе деватора тензора напряжений.

1. Известно следующее утверждение. Для того чтобы действительная симметрическая матрица A была ортогонально подобна матрице, у которой все элементы главной диагонали равны нулю, необходимо и достаточно, чтобы след матрицы A был равен нулю. В частности, для вещественной симметрической матрицы размером 3×3 это ортогональное преобразование подобия не единственно и зависит от одного параметра [1, 2]. Исследуем этот вопрос подробно, используя результаты работ [1, 2].

Пусть D обозначает симметричный тензор второго ранга в трехмерном пространстве с нулевым следом, d_{ij} — компоненты этого тензора в произвольной декартовой системе с базисом $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$. Рассмотрим площадки с единичной нормалью $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, для которых выполнено условие

$$d_n \equiv d_{ij}n_i n_j = 0.$$

Здесь и ниже по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 3. Совокупность этих площадок образует конус N второго порядка. Для каждого вектора $\mathbf{n} \in N$ можно найти векторы $\mathbf{n}', \mathbf{n}'' \in N$ такие, что тройка векторов $\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{n}''$ образует ортогональный базис. В этом базисе все диагональные элементы матрицы D равны нулю [1]. Такое представление деватора называется каноническим, а ортонормированный базис $\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{n}''$ — каноническим базисом [2]. Построим примеры таких базисов.

Обозначим через $\mathbf{k}_1^*, \mathbf{k}_2^*, \mathbf{k}_3^*$ базис главных осей деватора. В этом базисе

$$D \sim \begin{vmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{vmatrix},$$

причем главные значения записываются в виде [3]

$$d_1 = d \cos \theta, \quad d_2 = d \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right), \quad d_3 = d \cos \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right),$$

где $d = (2/\sqrt{3})\sqrt{J_2^D}$, $\cos 3\theta = (3\sqrt{3}/2)J_3^D/(J_2^D)^{3/2}$, а $J_2^D = (1/2)d_{ij}d_{ij}$, $J_3^D = (1/3)d_{ij}d_{jk}d_{ki}$ — второй и третий инварианты деватора. Очевидно,

$$\frac{\partial J_2^D}{\partial \sigma_{ij}} = d_{ij}, \quad \frac{\partial J_3^D}{\partial \sigma_{ij}} = d_{ik}d_{kj} - \frac{2}{3}J_2^D \delta_{ij}, \quad (1.1)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера; $d_{ij} = \sigma_{ij} - (1/3)(\sigma_{kl}\delta_{kl})\delta_{ij}$.

Пусть ортонормированный базис $\mathbf{k}_1^I, \mathbf{k}_2^I, \mathbf{k}_3^I$ определяется через базис $\mathbf{k}_1^*, \mathbf{k}_2^*, \mathbf{k}_3^*$ с помощью матрицы $M = \|m_{ij}\|$:

$$\mathbf{k}_i^I = m_{ij}\mathbf{k}_j^*,$$

где $m_{11} = m_{12} = m_{13} = 1/\sqrt{3}$, $m_{21} = \sqrt{2/3} \cos \alpha$, $m_{22} = \sqrt{2/3} \cos(\alpha - 2\pi/3)$, $m_{23} = \sqrt{2/3} \cos(\alpha - 4\pi/3)$, $m_{31} = \sqrt{2/3} \cos \beta$, $m_{32} = \sqrt{2/3} \cos(\beta - 2\pi/3)$, $m_{33} = \sqrt{2/3} \cos(\beta - 4\pi/3)$, $\alpha = -\theta/2 - \pi/4$, $\beta = -\theta/2 + \pi/4$. В этом базисе

$$D \sim \frac{\sqrt{J_2^D}}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2} \cos\left(\frac{3}{2}\theta + \frac{\pi}{4}\right) & \sqrt{2} \sin\left(\frac{3}{2}\theta + \frac{\pi}{4}\right) \\ \sqrt{2} \cos\left(\frac{3}{2}\theta + \frac{\pi}{4}\right) & 0 & 1 \\ \sqrt{2} \sin\left(\frac{3}{2}\theta + \frac{\pi}{4}\right) & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Данное представление девиатора назовем *основным каноническим*, а базис $\mathbf{k}_1^I, \mathbf{k}_2^I, \mathbf{k}_3^I$ — *основным каноническим базисом*.

Очевидно, что вращением базиса вокруг главных осей на угол $\pm\pi/2$ всегда можно добиться того, чтобы девиатор имел вид

$$D \sim \begin{vmatrix} d_{\max} & 0 & 0 \\ 0 & d_{\text{ср}} & 0 \\ 0 & 0 & d_{\min} \end{vmatrix},$$

где $|d_{\max}| \geq |d_{\text{ср}}| \geq |d_{\min}|$, $d_{\max} + d_{\text{ср}} + d_{\min} = 0$. Указанную систему главных осей девиатора D будем называть упорядоченной, а ее ортонормированный базис обозначим $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Рассмотрим базис $\mathbf{e}_1^I, \mathbf{e}_2^I, \mathbf{e}_3^I$, определяемый следующим образом:

$$\mathbf{e}_i^I = l_{ij}^I \mathbf{e}_j, \quad L^I = \|l_{ij}^I\|,$$

$$L^I = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta/\sqrt{2} & -\alpha/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -\beta/\sqrt{2} & \alpha/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{vmatrix}, \quad \alpha = \sqrt{-d_{\text{ср}}/(d_{\max} - d_{\text{ср}})},$$

$$\beta = \sqrt{d_{\max}/(d_{\max} - d_{\text{ср}})}.$$

Используя формулы преобразования $d_{ij}^I = l_{ip}^I l_{jq}^I \hat{d}_{pq}$, где $\hat{d}_{11} = d_{\max}$, $\hat{d}_{22} = d_{\text{ср}}$, $\hat{d}_{33} = d_{\min}$, $\hat{d}_{12} = \hat{d}_{13} = \hat{d}_{23} = 0$, находим, что в базисе $\mathbf{e}_1^I, \mathbf{e}_2^I, \mathbf{e}_3^I$ девиатор D приводится к виду

$$D \sim \begin{vmatrix} 0 & b & -b \\ b & 0 & a \\ -b & a & 0 \end{vmatrix}, \quad b = \varepsilon \sqrt{-d_{\text{ср}} d_{\max}/2},$$

$$a = d_{\min}, \quad \varepsilon = \text{sign}(d_{\max}).$$

Данное представление девиатора назовем *первым каноническим*, а ортонормированный базис $\mathbf{e}_1^I, \mathbf{e}_2^I, \mathbf{e}_3^I$ — *первым каноническим базисом*.

Рассмотрим ортонормированный базис $\mathbf{e}_1^\varphi, \mathbf{e}_2^\varphi, \mathbf{e}_3^\varphi$:

$$\mathbf{e}_i^\varphi = l_{ij}^\varphi \mathbf{e}_j^I, \quad L^\varphi = \|l_{ij}^\varphi\|, \quad l_{11}^\varphi = \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \sin \chi, \quad l_{12}^\varphi = \sin \psi \cos \chi,$$

$$l_{13}^\varphi = -\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \sin \chi, \quad l_{21}^\varphi = -\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \sin \chi, \quad (1.2)$$

$$l_{22}^\varphi = \cos \psi \cos \chi, \quad l_{23}^\varphi = \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \sin \chi, \\ l_{31}^\varphi = \sin \varphi \cos \chi, \quad l_{32}^\varphi = -\sin \chi, \quad l_{33}^\varphi = \cos \varphi \cos \chi.$$

Здесь $0 \leq \varphi < 2\pi$,

$$\operatorname{tg} \chi = -\frac{\sin \varphi}{\omega + \operatorname{tg} \varphi}, \quad \operatorname{ctg} 2\psi = \frac{\cos^3 \varphi \sin^2 \chi - \cos \varphi \sin^2 \varphi - \cos \chi \sin \chi}{2 \cos^2 \varphi \sin \varphi \sin \chi}, \\ \omega = \frac{\varepsilon \sqrt{2} d_{\min}}{\sqrt{-d_{\max} d_{\text{cp}}}}, \quad \varepsilon = \operatorname{sign}(d_{\max}). \tag{1.3}$$

В ортонормированном базисе $e_1^\varphi, e_2^\varphi, e_3^\varphi$ при любом $0 \leq \varphi < 2\pi$ девиатор D имеет вид

$$D \sim \begin{vmatrix} 0 & d_{12}^\varphi & d_{13}^\varphi \\ d_{12}^\varphi & 0 & d_{23}^\varphi \\ d_{13}^\varphi & d_{23}^\varphi & 0 \end{vmatrix}; \tag{1.4}$$

$$(d_{12}^\varphi)^2 + (d_{13}^\varphi)^2 + (d_{23}^\varphi)^2 = (J_2^D)^2, \quad d_{12}^\varphi d_{13}^\varphi d_{23}^\varphi = J_3^D/2. \tag{1.5}$$

Рассмотрим базис $e_1^\Pi, e_2^\Pi, e_3^\Pi$, определяемый следующим образом:

$$e_i^\Pi = l_{ij}^\Pi e_j, \quad L^\Pi = \|l_{ij}^\Pi\|, \\ L^\Pi = \begin{vmatrix} \gamma & 0 & \delta \\ \delta/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -\gamma/\sqrt{2} \\ -\delta/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & \gamma/\sqrt{2} \end{vmatrix}, \quad \gamma = \sqrt{-d_{\min}/(d_{\max} - d_{\min})}, \\ \delta = \sqrt{d_{\max}/(d_{\max} - d_{\min})}.$$

В базисе $e_1^\Pi, e_2^\Pi, e_3^\Pi$ девиатор D приводится к виду

$$D \sim \begin{vmatrix} 0 & c & -c \\ c & 0 & f \\ -c & f & 0 \end{vmatrix}, \quad c = \varepsilon \sqrt{-d_{\max} d_{\min}/2}, \\ \varepsilon = \operatorname{sign}(d_{\max}) = \pm 1, \\ f = d_{\text{cp}}.$$

Данное представление девиатора назовем вторым каноническим, а ортонормированный базис $e_1^\Pi, e_2^\Pi, e_3^\Pi$ — вторым каноническим базисом.

Очевидно, что построенное выше ортонормированное семейство канонических базисов можно получить также, если заменить в (1.3) ω на $\omega_1 = \varepsilon \sqrt{2} d_{\text{cp}} / \sqrt{-d_{\max} d_{\min}}$, $\varepsilon = \operatorname{sign}(d_{\max})$ и в (1.2) e_j^I на $e_j^\Pi, j = 1, 2, 3$.

2. Пусть S — девиатор тензора напряжений, e_1, e_2, e_3 — его произвольный канонический базис, в котором девиатор имеет вид

$$S \sim \begin{vmatrix} 0 & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & 0 & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & 0 \end{vmatrix}.$$

Условие пластичности Мизеса $J_2^s = k_*^2$, где k_* — постоянная пластичности, в пространстве s_{12}, s_{13}, s_{23} представляет сферу:

$$s_{12}^2 + s_{13}^2 + s_{23}^2 = k_*^2.$$

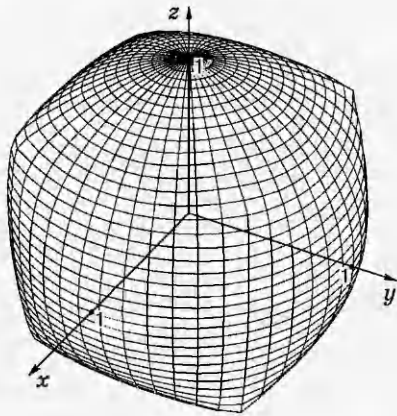


Рис. 1

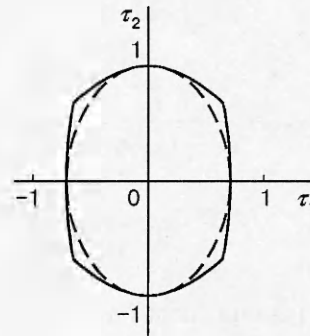


Рис. 2

Условие пластичности Треска [4] имеет вид

$$8(2k_*^2 - J_2^s)^3 - 4(J_2^s)^2(3k_*^2 - J_2^s) + 27(J_3^s)^2 = 0; \quad (2.1)$$

$$J_2^s = s_{12}^2 + s_{13}^2 + s_{23}^2, \quad J_3^s = 2s_{12}s_{13}s_{23}. \quad (2.2)$$

Выпуклая область, ограниченная этой поверхностью, изображена на рис. 1 в осях xuz , где

$$x = s_{12}/k_*, \quad y = s_{13}/k_*, \quad z = s_{23}/k_*. \quad (2.3)$$

Условие пластичности Мизеса в этих осях представляет собой единичную сферу, вписанную в поверхность Треска. Точки, где $x^2 = y^2 = z^2$, есть особые (конические) точки. В частности, в точке $x = y = z = 2/3$ ось кругового конуса касательных раствора $2 \arctg(3/\sqrt{2}) \simeq 130^\circ$ равнонаклонена к осям координат. Заметим, что напряженное состояние, соответствующее особым точкам, имеет равные по модулю касательные напряжения

$$|s_{12}| = |s_{13}| = |s_{23}| = 2k_*/3. \quad (2.4)$$

Для поверхности Треска, исключая ее особые точки, справедлива параметризация

$$s_{12} = k_* r(\psi, \theta) \cos \psi \cos \theta, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 0 \leq \psi < 2\pi, \quad s_{13} = k_* r(\psi, \theta) \sin \psi \cos \theta, \\ \theta \neq \pm \arccos(1/\sqrt{3}), \quad s_{23} = k_* r(\psi, \theta) \sin \theta, \quad \psi \neq (\pi/4)j, \quad j = 1, 3, 5, 7, \quad (2.5)$$

$$\text{где } r(\psi, \theta) = \left(\frac{3}{a} - \frac{-81 - 72a}{9a(-27 - 36a - 8a^2 + 8a^{3/2}\sqrt{1+a})^{1/3}} + \frac{(-27 - 36a - 8a^2 + 8a^{3/2}\sqrt{1+a})^{1/3}}{a} \right)^{1/2},$$

$$a = 27(\cos^2 \psi \sin^2 \psi \cos^4 \theta \sin^2 \theta) - 1; \quad -1 \leq a < 0.$$

В первом и втором канонических базисах девиатор тензора напряжений имеет вид

$$S \sim \begin{vmatrix} 0 & \tau_1 & -\tau_1 \\ \tau_1 & 0 & \tau_2 \\ -\tau_1 & \tau_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Условие пластичности Треска (2.1) в плоскости (τ_1, τ_2) запишется следующим образом:

$$(-2k_*^2 + \tau_1^2 - 3\tau_2 k_* - \tau_2^2)(-2k_*^2 + \tau_1^2 + 3\tau_2 k_* - \tau_2^2)(8\tau_1^2 + \tau_2^2 - 4k_*^2) = 0.$$

Данная кусочно-гладкая кривая, состоящая из частей эллипса (боковые стороны) и частей гипербол, при $k_* = 1$ представлена на рис. 2 сплошной линией, штриховой линией изображен эллипс Мизеса:

$$2\tau_1^2 + \tau_2^2 = k_*^2.$$

Обозначим через \dot{E}^p тензор скоростей пластической деформации, ξ_{ij} — его компоненты в каноническом базисе тензора S , и пусть

$$\xi_{11} + \xi_{22} + \xi_{33} = 0. \tag{2.6}$$

Считая справедливым ассоциированный закон пластического течения, принимая правую часть равенства (2.1) за пластический потенциал и учитывая (1.1), получим

$$\xi_{11} = \frac{\Lambda}{3} \nu (s_{12}^2 + s_{13}^2 - 2s_{23}^2), \quad \begin{matrix} \nearrow 1 \\ 3 \leftarrow 2 \end{matrix} \quad \xi_{12} = \Lambda (\mu s_{12} + \nu s_{13} s_{23}), \tag{2.7}$$

где Λ — произвольный множитель; символ $\begin{matrix} \nearrow 1 \\ 3 \leftarrow 2 \end{matrix}$ означает круговую перестановку индексов; $\mu = -12[(J_2^s)^2 - 6k_*^2 J_2^s + 8k_*^4]$; $\nu = 54J_3^s$.

Для неособых точек поверхности Треска (2.1) условие (2.4) не выполняется, поэтому компоненты тензора пластических деформаций ξ_{11} , ξ_{22} , ξ_{33} не могут быть равны нулю одновременно. Значит, канонический базис тензора напряжений не является каноническим базисом тензора пластических деформаций. При этом согласно равенству (1.1) тензоры S и \dot{E}^p соосны. Из (2.5) и (2.7) следует, что для всех неособых точек поверхности Треска справедливо равенство

$$\det \|\xi_{ij}\| = 0. \tag{2.8}$$

Отсюда одно из собственных значений тензора \dot{E}^p равно нулю, а два других равны ω и $-\omega$ в силу (2.6), причем $\omega \neq 0$ вследствие (2.7), поэтому реализуется состояние плоской деформации [5]. Таким образом, тензор $(\dot{E}^p)^2$ имеет некратное нулевое собственное значение и кратное собственное значение ω^2 . Пусть \mathbf{r} — единичный собственный вектор тензора $(\dot{E}^p)^2$, соответствующий нулевому собственному значению. Справедливо представление [6]

$$(\dot{E}^p)^2 = \omega^2 (I - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}), \tag{2.9}$$

где I — единичный тензор, символ \otimes означает диадное умножение.

В особых точках поверхности Треска выполняется условие (2.4), поэтому два из главных напряжений совпадают, следовательно, только одна из главных осей S определена однозначно. Потребуем, чтобы эта главная ось совпадала с одной из главных осей тензора \dot{E}^p , что и является условием, связывающим тензоры S и \dot{E}^p в особых точках поверхности Треска. Рассмотрим для примера случай

$$s_{12} = s_{13} = s_{23} = 2k_*/3. \tag{2.10}$$

Собственные значения тензора S равны $\lambda_1^s = 4k_*/3$, $\lambda_2^s = -2k_*/3$, $\lambda_3^s = -2k_*/3$. Собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_1^s , имеет вид $\mathbf{n} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Для тензора S , имеющего кратное собственное значение, справедливо представление [6]

$$S = 2k_* \left(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \frac{1}{3} I \right). \tag{2.11}$$

Пусть λ — некратное собственное значение тензора \dot{E}^p , тогда из равенства

$$\dot{E}^p \cdot \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n} \tag{2.12}$$

имеем $\xi_{11} + \xi_{12} + \xi_{13} = \lambda$, $\xi_{12} + \xi_{22} + \xi_{23} = \lambda$, $\xi_{13} + \xi_{23} + \xi_{33} = \lambda$. Из условия положительности диссипации $s_{ij}\xi_{ij} > 0$ и (2.8) следует, что $\lambda > 0$.

Равенства (2.11), (2.12) справедливы в произвольных системах координат, в работе [5] они получены из других предположений.

Заметим, что в случае, определяемом равенством (2.10), имеют место соотношения $|\lambda_1^s - \lambda_2^s| = 2k_*$, $|\lambda_1^s - \lambda_3^s| = 2k_*$. Это означает, что реализуется условие полной пластичности Хаара — Кармана [7], которое также выполняется во всех особых точках (см. (2.4)) поверхности Треска.

3. Исследуем вопрос о реализации условий полной пластичности (2.10) в некоторой области тела. Вследствие равенства (2.11) тензор напряжений в произвольной декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3) представляется в виде $\sigma_{ij} = 2k_*(p\delta_{ij} + n_i n_j)$. Используя уравнения равновесия, имеем следующую систему для определения функций $p = p(x_1, x_2, x_3)$, $n_i = n_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$:

$$p_{,i} + n_j n_{i,j} + n_i n_{s,s} = 0 \quad (i, j, s = 1, 2, 3); \quad (3.1)$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1. \quad (3.2)$$

Здесь и ниже запятая обозначает производную по координатам. Ряд свойств системы (3.1), (3.2) рассмотрен в [5], групповой анализ этой системы методом Ли — Овсянникова [8] дан в [9]. Представим полное описание частично инвариантного решения, для которого

$$n_i = N_i(p), \quad p = p(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в (3.1), найдем

$$(p\delta_{ij} + N_i N_j)' p_{,i} = 0. \quad (3.4)$$

Здесь и ниже штрих обозначает производную по p . Из условия совместности системы (3.4) следует

$$(N_1')^2 + (N_2')^2 + (N_3')^2 = 1. \quad (3.5)$$

Пусть $M = M(t)$ ($0 \leq t \leq T$) — произвольная дважды дифференцируемая функция, причем $M^2 + \dot{M}^2 < 1$, $M + \ddot{M} \neq 0$. Здесь и ниже точка обозначает дифференцирование по t . Соотношения (3.2) и (3.5) будут удовлетворены, если принять

$$\begin{aligned} N_1 = \nu_1(t) &= \dot{M} \cos t + M \sin t, & N_2 = \nu_2(t) &= \dot{M} \sin t - M \cos t, \\ N_3 = \nu_3(t) &= (1 - M^2 - \dot{M}^2)^{1/2}, & p = P(t) &= \int_0^t \frac{(M + \ddot{M})(1 - M^2)^{1/2}}{(1 - M^2 - \dot{M}^2)^{1/2}} dt. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в (3.1) и интегрируя первые два уравнения, получим

$$x_1 l_1(t) + x_2 l_2(t) + x_3 l_3(t) = g(t), \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned} l_1(t) &= (\nu_1 \nu_3)'(P + \nu_2^2) - (\nu_1 \nu_2)'(\nu_2 \nu_3), & l_2(t) &= (\nu_2 \nu_3)'(P + \nu_1^2) - (\nu_1 \nu_2)'(\nu_1 \nu_3), \\ l_3(t) &= -(P + \nu_1^2)'(P + \nu_2^2) + (\nu_1 \dot{\nu}_2 + \dot{\nu}_2 \nu_1)^2, \end{aligned}$$

а $g(t)$ — произвольная дифференцируемая функция. Равенство (3.7) определяет неявно функцию $t = t(x_1, x_2, x_3)$.

Построенное решение зависит от двух произвольных функций одной переменной.

Если в (3.7) положить $t = t_0 = \text{const}$, то это уравнение определяет в пространстве x_1, x_2, x_3 плоскость, на которой все компоненты тензора напряжений постоянны. В частности,

для случая $g(p) \equiv 0$ эта плоскость проходит через начало координат. Построенное решение может быть использовано для описания предельного состояния тела, ограниченного плоскостями.

4. Рассмотрим условие пластичности максимального приведенного напряжения [10] $|s_{\max}| = k_*$, где s_{\max} — максимальное по модулю собственное значение девiatorа тензора напряжений S . Подставив k_*^2 в кубическое уравнение, корни которого суть квадраты собственных значений S , получим

$$(J_3^S + J_2^S k_* - k_*^3)(J_3^S - J_2^S k_* + k_*^3) = 0. \tag{4.1}$$

Выпуклая область, ограниченная данной поверхностью, изображена на рис. 3 в осях xuz (см. (2.3)). Поверхность (4.1) вписана в сферу Мизеса. Точки пересечения этой поверхности с осями координат — особые. Соответствующие им конические поверхности распадаются на пары плоскостей.

В первом и втором каноническом базисе (см. (2.5)) условие максимального приведенного напряжения запишется следующим образом:

$$(2\tau_1^2\tau_2 + 2\tau_1^2k_* + \tau_2^2k_* - k_*^3)(2\tau_1^2\tau_2 - 2\tau_1^2k_* - \tau_2^2k_* + k_*^3) = 0.$$

Данная кусочно-гладкая кривая (при $k_* = 1$) представлена на рис. 4. Штриховой линией изображен эллипс Мизеса.

Ассоциированный закон пластического течения с потенциалом (4.1) приводит к равенствам (2.7), где $\mu = -2k_*(J_2^S - k_*^2)$ и $\nu = 2J_3^S$.

Для неособых точек поверхности (4.1) тензоры S и \dot{E}^p соосны, а для неособых точек, для которых выполняется условие $|s_{12}| = |s_{13}| = |s_{23}| = k_*$, канонический базис тензора напряжений будет и каноническим базисом тензора пластических деформаций.

Установим связь между тензорами S и \dot{E}^p в особых точках поверхности (4.1). Рассмотрим для примера случай $s_{12} = k_*$; $s_{13} = 0$; $s_{23} = 0$. Тензор S имеет собственные значения k_* , $-k_*$, 0 .

Примем, что тензор скоростей пластической деформации \dot{E}^p удовлетворяет условию несжимаемости (2.6) и соосен тензору S . Тогда справедливо представление [11]

$$\dot{E}^p = \alpha S + \beta \left(S^2 - \frac{2k_*^2}{3} I \right),$$

где α, β — произвольные постоянные, причем $\alpha > 0$ вследствие условия положительности диссипации.

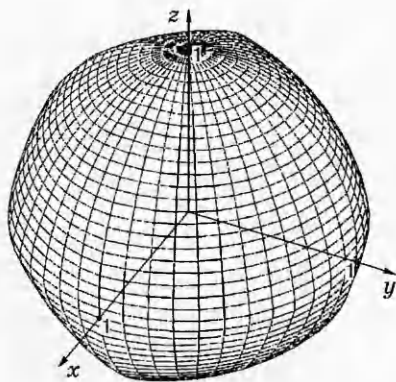


Рис. 3

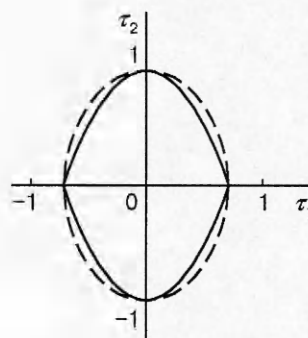


Рис. 4

Заметим в заключение, что подробное описание множества девиаторов с одним общим главным направлением (см. п. 2) содержится в работе [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицено К. Б., Граммель Р. Техническая динамика. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. Т. 1.
2. Зубов Л. М., Рудев А. Н. О каноническом представлении девиатора симметричного тензора // Докл. РАН. 1998. Т. 358, № 1. С. 44–47.
3. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
4. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1950.
5. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966.
6. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965.
7. Хаар А., Карман Т. К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах // Теория пластичности. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. С. 41–56.
8. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
9. Аннин Б. Д., Бытев В. О., Сенашов С. Н. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.
10. Ишлинский А. Ю. Гипотеза прочности формоизменения // Учен. зап. МГУ. 1940. Вып. 46. С. 117–124.
11. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962.
12. Новожилов В. В. О формах связи между напряжениями и деформациями в первоначально изотропных неупругих телах (геометрическая сторона вопроса) // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, вып. 5. С. 194–812.

Поступила в редакцию 29/VI 1998 г.
