УДК 539.3:534.1

О НЕЛИНЕЙНЫХ ФОРМАХ ДВИЖЕНИЯ ТОНКИХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Г. С. Лейзерович

Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет,
681013 Комсомольск-на-Амуре

В рамках нелинейной теории гибких пологих оболочек изучаются свободные изгибные колебания оболочки, шарнирно опертой по торцам. Предполагается, что возбуждение изгибных колебаний с большими амплитудами приводит к возникновению радиальных колебаний оболочки. Модальные уравнения получены методом Бубнова — Галеркина. Периодические решения найдены методом Крылова — Боголюбова. Полученная на основе нелинейной конечномерной модели оболочки скелетная кривая мягкого типа согласуется с известными экспериментальными данными.

Введение. Несмотря на большое количество работ по нелинейной динамике оболочек [1], ряд задач остается нерешенным. В частности, не решена задача об изгибных колебаниях шарнирно опертой оболочки конечной длины с большими амплитудами. Использование традиционных нелинейных конечномерных моделей оболочки [1–5], приводящее к скелетной кривой мягкого типа, не позволяет удовлетворить граничному условию по изгибающему моменту. Поэтому эти модели справедливы только для длинной оболочки. Попытки решить эту задачу с помощью конечномерных моделей, позволяющих удовлетворить всем граничным условиям, оказались безуспешными [2, 3]. Использование таких моделей приводит к скелетной кривой жесткого типа, качественно не согласующейся с известными экспериментальными данными.

В настоящей работе предлагается нелинейная конечномерная модель оболочки, использование которой приводит к скелетной кривой мягкого типа, и решена задача о нелинейных изгибных колебаниях шарнирно опертой оболочки конечной длины.

Уравнения движения. Математическая модель основывается на уравнениях нелинейной теории гибких пологих оболочек [5]

$$\frac{1}{E}\,\nabla^4\Phi = -\frac{1}{2}\,L(w,w) - \frac{1}{R}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad \frac{D}{h}\,\nabla^4 w = L(w,\Phi) + \frac{1}{R}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \rho\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{1}$$

где ∇^4, L — известные дифференциальные операторы; $w(x,y,t)$ — упругий прогиб; $\Phi(x,y,t)$ — функция напряжений в срединной поверхности; R — радиус оболочки; $D = Eh^3/(12(1-\mu^2))$ — цилиндрическая жесткость; E — модуль Юнга; h — толщина; μ — коэффициент Пуассона; ρ — плотность; t — время.

Пусть оболочка длиной l шарнирно оперта по краям, а точки ее контура свободно смещаются в продольном и окружном направлениях:

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = N_x = T = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = l, \tag{2}$$

где N_x, T — погонные продольное и касательное усилия соответственно.

Формы нелинейных колебаний. Прогиб оболочки при колебаниях с частотой основного тона может быть аппроксимирован выражением [1–5]

$$w(x,y,t) = h\{[f_1(t)\sin(\beta y) + f_2(t)\cos(\beta y)]\sin(\alpha x) + \Psi(x,t)\}, \quad \alpha = \pi/l, \quad \beta = n/R, \tag{3}$$

где n — число волн в окружном направлении, а сопряженные изгибные формы $\sin(\beta y)\sin(\alpha x)$, $\cos(\beta y)\sin(\alpha x)$ являются формами малых колебаний оболочки.

Как известно, характер нелинейного поведения оболочки существенно зависит от формы осесимметричной составляющей прогиба $\Psi(x,t)$, которая при построении конечномерной модели (3) принимается в виде $\Psi(x,t) = f_3(t)\sin^2(\alpha x)$ [1–5]. Однако при использовании такого подхода, основанного на геометрических модельных представлениях о деформировании оболочки ("преимущественное выпучивание вовнутрь", нерастяжимость контура), невозможно удовлетворить краевым условиям (2) и, следовательно, получить приемлемое решение для оболочки конечной длины.

В то же время использование функции $\Psi(x,t) = f_3(t)\sin(\alpha x)$, удовлетворяющей всем условиям шарнирного опирания, не рекомендуется [1–3], так как в этом случае одномодовый режим движения оболочки получается жестким.

В настоящей работе предлагается иной подход к построению нелинейной конечномерной модели (3). Будем полагать, что возбуждение изгибных колебаний оболочки с большими амплитудами приводит к возникновению радиальных колебаний (в линейной постановке эти колебания, как известно, происходят независимо). Осесимметричная часть прогиба $\Psi(x,t)$ может быть получена "суммированием" форм малых радиальных колебаний. Удерживая в этом разложении два члена ряда, представим прогиб в виде

$$w(x,y,t) = h\{[f_1(t)\sin(\beta y) + f_2(t)\cos(\beta y)]\sin(\alpha x) + f_3(t)\sin(\alpha x) + f_4(t)\sin(3\alpha x)\}.$$

Модальные уравнения. Уравнения (1) решаются по схеме П. Ф. Папковича. Сначала определяется функция напряжений Φ. Тангенциальные граничные условия $N_x = T = 0$, как и в [2–5], удовлетворяются "в среднем". Методом Бубнова — Галеркина получена система четырех нелинейных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат. Затем по аналогии с [2, 5] она упрощается. Окончательно система сводится к двум дифференциальным уравнениям для функций f_1 и f_2

$$\ddot f_1 + f_1 + c_1 f_1(\ddot f_1 f_1 + \ddot f_2 f_2 + \dot f_1^2 + \dot f_2^2) + c_2 f_1(f_1^2 + f_2^2) = 0,$$
$$\ddot f_2 + f_2 + c_1 f_2(\ddot f_1 f_1 + \ddot f_2 f_2 + \dot f_1^2 + \dot f_2^2) + c_2 f_2(f_1^2 + f_2^2) = 0.$$

Здесь точки обозначают дифференцирование по безразмерному времени $\tau = \lambda t$ (λ — собственная частота),

$$c_1 = \frac{32\varepsilon}{9\pi^2 p_1^2}\Big[\Big(1 + \frac{2\theta^4}{(1+\theta^2)^2}\Big)\Big(1 + \frac{\theta^4}{(1+\theta^2)^2} + \frac{\theta^4}{(1+4\theta^2)^2}\Big) + {}$$
$$+ \frac{p_1^2}{25p_2^2}\Big(1 + \frac{18\theta^4}{(1+\theta^2)^2}\Big)\Big(1 + \frac{9\theta^4}{(1+\theta^2)^2} + \frac{45\theta^4}{(1+4\theta^2)^2} - \frac{36\theta^4}{(1+16\theta^2)^2}\Big)\Big],$$

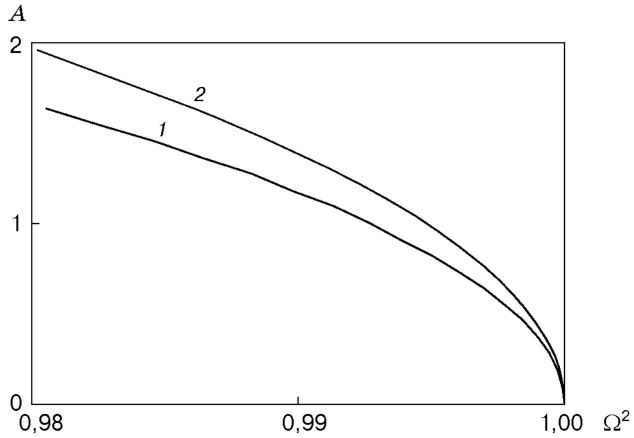
$$c_2 = \frac{\varepsilon}{16\omega^2}\Big(3 + \theta^4 - \frac{8}{\varepsilon}\,c_1\Big), \qquad p_1^2 = 1 + \frac{\varepsilon\theta^4}{12(1-\mu^2)}, \qquad p_2^2 = 1 + \frac{81\varepsilon\theta^4}{12(1-\mu^2)},$$

$$\omega^2 = \frac{\rho R^2}{E}\,\lambda^2 = \frac{\varepsilon(1+\theta^2)^2}{12(1-\mu^2)} + \frac{\theta^4}{(1+\theta^2)^2}, \qquad \varepsilon = \Big(\frac{n^2 h}{R}\Big)^2, \qquad \theta = \frac{\pi R}{nl}.$$

Результаты и выводы. Уравнения скелетных кривых, соответствующих режимам стоячей волны ($f_1 = A\cos(\Omega\tau)$, $f_2 \equiv 0$) и бегущей волны ($f_1 = A\cos(\Omega_{\text{c}}\tau)$, $f_2 = A\sin(\Omega_{\text{c}}\tau)$), получены методом Крылова — Боголюбова:

$$\Omega^2 = (\tilde\omega/\omega)^2 = 1 - (2c_1 - 3c_2)A^2/4, \qquad \Omega_{\text{c}}^2 = (\tilde\omega_{\text{c}}/\omega)^2 = 1 + c_2 A^2, \tag{4}$$

где $\tilde\omega$ и $\tilde\omega_{\text{c}}$ — безразмерные частоты нелинейных свободных колебаний.



Для контроля правильности полученных выше зависимостей сделан предельный переход к бесконечно длинной оболочке. При $\theta \to 0$ $c_1 = 832\varepsilon/(225\pi^2) \approx 3\varepsilon/8$, $c_2 = 9(1 - 6656/(675\pi^2))/4 \approx 0$, $\Omega^2 = 1 - 3\varepsilon A^2/16$, $\Omega_c^2 = 1$. Эти соотношения эквивалентны соотношениям в работе [6].

На рисунке представлены скелетные кривые мягкого типа одномодового режима движения относительно длинной оболочки с параметрами $l/R = 2{,}5$; $R/h = 320$ при $\mu = 0{,}3$ и $n = 6$ ($\varepsilon = 0{,}0127$; $\theta = 0{,}21$). Кривая *1* соответствует результатам вычислений по первой формуле в (4), кривая *2* — результатам работы [2], в которой осесимметричная составляющая прогиба принята в виде $\Psi(x,t) = f_3(t)\sin^2(\alpha x)$. Кривая *2* лежит выше кривой *1*, поскольку использование традиционного подхода приводит к завышению обобщенной изгибной жесткости шарнирно опертой оболочки. Расчеты показывают, что с уменьшением относительной длины оболочки погрешность решения, полученного на основе традиционного подхода, значительно увеличивается.

В заключение рассмотрим аппроксимацию прогиба, при которой $\Psi(x,t) = f_3(t)\sin(\alpha x)$ ($f_4(t) \equiv 0$). В этом случае при $\theta \to 0$ коэффициент $c_1 = 32\varepsilon/(9\pi^2)$, а коэффициент $c_2 = 9(1 - 256/(27\pi^2))/4$ не только не равен нулю, но и становится положительным. Разность $1 - 256/(27\pi^2) \approx 0{,}04$ обусловлена погрешностью первого приближения для радиальной формы колебаний. По этой причине для относительно длинных оболочек в работах [2, 3] получена скелетная кривая жесткого типа.

Выполненное исследование показало, что результаты, полученные на основе предложенного подхода к построению нелинейной динамической конечномерной модели оболочки, удовлетворительно соответствуют известным теоретическим и экспериментальным результатам [1–5], полученным для относительно длинных оболочек. Этот подход, в отличие от традиционного, позволяет удовлетворить всем граничным условиям задачи, в том числе тангенциальным, поэтому на его основе могут быть рассчитаны нелинейные динамические характеристики оболочки любой длины.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кубенко В. Д., Ковальчук П. С.** Нелинейные задачи колебаний тонких оболочек (Обзор) // Прикл. механика. 1998. Т. 34, № 8. С. 3–31.
2. **Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Краснопольская Т. С.** Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. Киев: Наук. думка, 1984.
3. **Варадан Т. К., Пратхап Дж., Рамани Х. В.** Нелинейные свободные изгибные колебания тонкостенных круговых цилиндрических оболочек // Аэрокосм. техника. 1990. № 5. С. 21–24.

4. **Ладыгина Е. В., Маневич А. И.** Нелинейные свободные изгибные колебания цилиндрической оболочки с учетом взаимодействия сопряженных форм // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1997. № 3. С. 169–175.
5. **Вольмир А. С.** Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.
6. **Evensen D. A.** Nonlinear flexural vibrations of thin circular rings // J. Appl. Mech. E. 1965. V. 33, N 3. P. 553–560.

Поступила в редакцию 12/II 1999 г.,
в окончательном варианте — 13/III 2001 г.