

УДК 532.591:539.3:534.1

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПЛАВАЮЩЕЙ НА МЕЛКОВОДЬЕ УПРУГОЙ БАЛКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ

И. В. Стурова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Построено решение двумерной нестационарной задачи о поведении плавающей на свободной поверхности жидкости упругой балки конечных размеров под действием внешней нагрузки. Предполагается, что жидкость идеальная и несжимаемая и ее глубина мала по сравнению с продольным размером балки. Совместное движение балки и жидкости рассмотрено в рамках линейной теории, течение жидкости предполагается потенциальным. Исследовано поведение балки при различных нагрузках с учетом и без учета инерционности груза.

Результаты исследования гидроупругого поведения плавающих тел (ледяного покрова, волноломов, плавучих платформ) имеют широкий круг приложений. Поведение безграничного ледяного покрова при движении по нему внешней нагрузки изучено достаточно полно [1–3]. В последнее время задачи о нестационарном поведении плавающих упругих тел актуальны в связи с появлением проектов создания искусственных платформ различного назначения. Эти конструкции имеют большую ширину и длину, относительно малую изгибную жесткость, поэтому изучение их гидроупругого поведения более важно, чем изучение их движения как твердого тела. При эксплуатации таких платформ необходимо определение динамической прочности конструкции по отношению к воздействию внешней нестационарной нагрузки, вызванной движением транспорта, перемещением груза, посадкой и взлетом самолета, стартом ракеты и т. п. Обычно рассматривается прямоугольная форма этих искусственных сооружений с большим отношением длины к ширине и очень малым отношением толщины к длине и ширине, так что платформа моделируется тонкой упругой пластиной.

Решение нестационарной трехмерной гидроупругой задачи даже в линейной постановке является достаточно сложным и требует больших вычислительных затрат [4]. В данной работе предложена упрощенная модель, в которой удлиненная прямоугольная пластина заменяется упругой балкой и задача сводится к двумерной. Глубина жидкости предполагается малой по сравнению с длиной балки, и задача решается в приближении мелкой воды.

1. Постановка задачи. Пусть на поверхности слоя идеальной несжимаемой жидкости глубины H плавает упругая балка длиной $2L$. Поверхность жидкости, не закрытая балкой, является свободной. Течение жидкости полагается потенциальным. Потенциалы скоростей, описывающие движение жидкости в области под балкой и вне этой области, обозначим соответственно $\varphi_1(x, t)$ и $\varphi_2(x, t)$ (x — горизонтальная координата, $x = 0$ соответствует середине балки; t — время).

Работа выполнена в рамках Интеграционного проекта № 1 СО РАН и программы “Ведущие научные школы” (код проекта 00-15-96162) при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-00739).

Нормальный прогиб упругой балки Эйлера $w(x, t)$ описывается уравнением

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + g \rho w + \rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = -P(x, t) \quad (|x| \leq L), \quad (1.1)$$

где $D = Eh_1^3/[12(1-\nu^2)]$; E , ρ_1 , h_1 , ν — модуль упругости, плотность, толщина и коэффициент Пуассона балки; ρ — плотность воды; g — ускорение свободного падения. Функция $P(x, t)$ может быть заданной и описывать внешнее давление, действующее на балку и не зависящее от движения самой балки (так называемая безынерционная нагрузка). Однако в общем случае движения массивного груза по балке следует учитывать также силы инерции груза, возникающие за счет его колебаний вместе с балкой (инерционная нагрузка). В этом случае

$$P(x, t) = M \left(g + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) Q(x, t), \quad (1.2)$$

где M — погонная масса груза; $Q(x, t)$ — заданная функция.

Согласно линейной теории мелкой воды справедливо соотношение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -h \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \quad (|x| \leq L), \quad h = H - d, \quad (1.3)$$

где $d = \rho_1 h_1 / \rho$ — осадка балки.

В области чистой воды потенциал скоростей $\varphi_2(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} = \frac{1}{gH} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \quad (|x| > L). \quad (1.4)$$

Возвышение свободной поверхности $\eta(x, t)$ определяется из соотношения

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}. \quad (1.5)$$

Представляет также интерес построение решения данной задачи в предположении, что жидкость при $|x| > L$ является невесомой. Такая модель используется в теории удара при исследовании кратковременного внешнего воздействия на плавающее упругое тело [5]. Для невесомой жидкости в приближении мелкой воды вместо уравнения (1.4) имеем

$$\varphi_2(x, t) = 0 \quad (|x| > L). \quad (1.6)$$

При $|x| = L$ должны выполняться следующие условия согласования (непрерывности давления и потока массы):

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{H}{h} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}. \quad (1.7)$$

На краях балки ставятся условия свободного края — равенство нулю изгибающего момента и перерезывающей силы

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad (|x| = L). \quad (1.8)$$

Предположим, что в начальный момент жидкость и балка покоятся:

$$w = \frac{\partial w}{\partial t} = \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = 0 \quad (t = 0). \quad (1.9)$$

Прогиб пластины $w(x, t)$, возвышение свободной поверхности $\eta(x, t)$ и потенциалы скоростей $\varphi_{1,2}(x, t)$ ищем в виде суммы четных и нечетных по x составляющих. Тогда исходная задача (1.1)–(1.5), (1.7)–(1.9) разделяется на две части относительно соответствующих

составляющих искомым функций. При этом область, в которой ищется решение, может быть уменьшена до полуполосы $x \geq 0$.

Перейдем к безразмерным переменным, отмеченным штрихами:

$$(x', H', h') = \frac{1}{L} (x, H, h), \quad t' = \sqrt{\frac{g}{L}} t, \quad (w', \eta') = \frac{1}{a} (w, \eta), \quad \varphi'_{1,2} = \frac{1}{a\sqrt{gL}} \varphi_{1,2}, \quad P' = \frac{P}{a\rho g}.$$

Здесь a — множитель, имеющий размерность длины. Для инерционной нагрузки множитель a определим в виде $a = M/(l\rho)$, $Q' = Q/l$, где l — полудлина участка приложения нагрузки. Далее используются следующие безразмерные коэффициенты:

$$\alpha = \frac{a}{L}, \quad \beta = \frac{H}{h}, \quad \gamma = \frac{d}{L}, \quad \delta = \frac{D}{\rho g L^4}.$$

Ниже решение задачи строится для инерционной нагрузки, более простое решение для безынерционной нагрузки можно рассматривать как частный случай при $\alpha = 0$.

2. Четная часть решения. В безразмерных переменных (штрихи далее опущены) исходная задача для четных (симметричных) составляющих (с верхним индексом s) имеет вид

$$\delta \frac{\partial^4 w^s}{\partial x^4} + \gamma \frac{\partial^2 w^s}{\partial t^2} + w^s + \frac{\partial \varphi_1^s}{\partial t} = - \left(1 + \alpha \frac{\partial^2 w^s}{\partial t^2} \right) Q(x, t), \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial w^s}{\partial t} = -h \frac{\partial^2 \varphi_1^s}{\partial x^2} \quad (0 \leq x \leq 1);$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2^s}{\partial t^2} = H \frac{\partial^2 \varphi_2^s}{\partial x^2}, \quad \eta^s = -\frac{\partial \varphi_2^s}{\partial t} \quad (x > 1); \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial w^s}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1^s}{\partial x} = 0 \quad (x = 0); \quad (2.3)$$

$$\varphi_1^s = \varphi_2^s, \quad \frac{\partial \varphi_1^s}{\partial x} = \beta \frac{\partial \varphi_2^s}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 w^s}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w^s}{\partial x^3} = 0 \quad (x = 1); \quad (2.4)$$

$$w^s = \frac{\partial w^s}{\partial t} = \varphi_1^s = \varphi_2^s = \frac{\partial \varphi_2^s}{\partial t} = 0 \quad (t = 0). \quad (2.5)$$

Прогиб пластины $w^s(x, t)$ будем искать в виде разложения по четным собственным формам колебаний балки со свободными краями в вакууме

$$w^s(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \psi_n^s(x), \quad (2.6)$$

где $\psi_n^s(x)$ — решение спектральной задачи

$$\psi_n^{s(\text{IV})} = (\lambda_n^s)^4 \psi_n^s \quad (0 \leq x \leq 1),$$

$$\psi_n^{s'} = 0 \quad (x = 0), \quad \psi_n^{s''} = \psi_n^{s'''} = 0 \quad (x = 1). \quad (2.7)$$

Это решение имеет вид (см., например, [6])

$$\psi_1^s(x) = 1/\sqrt{2}, \quad \psi_n^s = D_n^s (\cos \lambda_n^s x + S_n^s \operatorname{ch} \lambda_n^s x),$$

$$D_n = 1/\sqrt{1 + (S_n^s)^2}, \quad S_n^s = \cos \lambda_n^s / \operatorname{ch} \lambda_n^s \quad (n \geq 2). \quad (2.8)$$

Собственные числа λ_n^s ($\lambda_{n+1}^s > \lambda_n^s$) определяются из дисперсионного соотношения $\operatorname{tg} \lambda_n^s = -\operatorname{th} \lambda_n^s$, $\lambda_1^s = 0$. Такие функции $\psi_n^s(x)$ образуют полную ортогональную систему

$$\int_{-1}^1 \psi_n^s(x) \psi_m^s(x) dx = \delta_{mn}, \quad (2.9)$$

где δ_{mn} — символ Кронекера.

Подставим разложения (2.6) в первое уравнение (2.1) и начальные условия (2.5), умножим полученные соотношения на $\psi_m^s(x)$ и проинтегрируем их по x от -1 до 1 . Используя свойства функций $\psi_m^s(x)$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (точка сверху обозначает производную по времени)

$$\gamma \ddot{a}_m + [1 + \delta(\lambda_m^s)^4] a_m + f_m(t) = -[Z_m(t) + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{a}_n(t) \chi_{mn}(t)] \quad (2.10)$$

с начальными условиями

$$a_m(0) = \dot{a}_m(0) = 0. \quad (2.11)$$

Здесь

$$f_m(t) = \int_{-1}^1 \frac{\partial \varphi_1^s}{\partial t} \psi_m^s(x) dx, \quad Z_m(t) = \int_{-1}^1 Q(x, t) \psi_m^s(x) dx,$$

$$\chi_{mn}(t) = \int_{-1}^1 Q(x, t) \psi_m^s(x) \psi_n^s(x) dx.$$

Решение для $\varphi_1^s(x, t)$ ищем в виде

$$\varphi_1^s(x, t) = -\frac{1}{h} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \dot{a}_n(t) \Phi_n^s(x) + q^s(x, t) \right), \quad (2.12)$$

где функции $\Phi_n^s(x)$ удовлетворяют уравнению

$$\Phi_n^{s''}(x) = \psi_n^s(x) \quad (2.13)$$

и имеют вид

$$\Phi_1^s(x) = x^2/(2\sqrt{2}), \quad \Phi_n^s(x) = D_n^s (S_n^s \operatorname{ch} \lambda_n^s x - \cos \lambda_n^s x) / (\lambda_n^s)^2 \quad (n \geq 2). \quad (2.14)$$

Функция q^s неизвестна и требует определения. Согласно уравнению (2.1), граничному условию (2.3) и начальному условию (2.5) функция q^s зависит только от времени и удовлетворяет начальному условию $q^s(0) = 0$. Эта функция определяется из условия согласования потенциалов $\varphi_1^s(x, t)$ и $\varphi_2^s(x, t)$, а также их производных по x при $x = 1$. Согласно (2.4) и (2.12)

$$\varphi_2^s|_{x=1} = -\frac{1}{h} \left(\frac{\dot{a}_1(t)}{2\sqrt{2}} + q^s(t) \right), \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \Big|_{x=1} = -\frac{\dot{a}_1(t)}{H\sqrt{2}}. \quad (2.15)$$

Решение первого уравнения в (2.2) со вторым граничным условием в (2.15) и начальными условиями (2.5) имеет вид

$$\varphi_2^s(x, t) = \begin{cases} a_1(t - (x-1)/\sqrt{H})/\sqrt{2H}, & (x-1)/\sqrt{H} < t < \infty, \\ 0, & 0 < t < (x-1)/\sqrt{H}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$q^s(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\dot{a}_1(t)}{2} + \frac{h a_1(t)}{\sqrt{H}} \right), \quad f_m(t) = -\frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{a}_n(t) C_{mn} + \frac{\ddot{a}_1(t)}{2h} + \frac{\dot{a}_1(t)}{\sqrt{H}}, \quad (2.16)$$

$$C_{mn}^s = \int_{-1}^1 \psi_m^s(x) \Phi_n^s(x) dx.$$

С учетом (2.8) и (2.14) имеем

$$\begin{aligned} C_{11}^s &= 1/6, \quad C_{1n}^s = C_{n1}^s = -2\sqrt{2}D_n^s \sin \lambda_n^s / (\lambda_n^s)^3, \\ C_{nm}^s &= C_{mn}^s = 8D_n^s D_m^s (\lambda_m^s \cos \lambda_n^s \sin \lambda_m^s - \lambda_n^s \sin \lambda_n^s \cos \lambda_m^s) / ((\lambda_n^s)^4 - (\lambda_m^s)^4) \\ &\quad (n \neq m, \quad n, m \geq 2), \\ C_{nn}^s &= -2(D_n^s)^2 \sin \lambda_n^s (\sin \lambda_n^s + \cos \lambda_n^s / \lambda_n^s) / (\lambda_n^s)^2. \end{aligned}$$

Подставляя (2.16) в (2.10), получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для определения функций $a_n(t)$ с начальными условиями (2.11):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{a}_n \left(\gamma \delta_{mn} - \frac{C_{mn}^s}{h} + \frac{1}{2h} \delta_{1m} + \alpha \chi_{mn}(t) \right) + \frac{\dot{a}_1}{\sqrt{H}} \delta_{1m} + a_m [1 + \delta(\lambda_m^s)^4] = -Z_m(t). \quad (2.17)$$

Определив $a_n^s(t)$, можно найти все характеристики симметричного движения жидкости и балки. Например, возвышение свободной поверхности жидкости при $x > 1$ равно

$$\eta^s(x, t) = \begin{cases} -\dot{a}_1(t - (x-1)/\sqrt{H})/\sqrt{2H}, & (x-1)/\sqrt{H} < t < \infty, \\ 0, & 0 < t < (x-1)/\sqrt{H}. \end{cases}$$

В предположении невесомости жидкости при $|x| > 1$ с учетом (1.6) имеем

$$q^s(t) = -\dot{a}_1(t)/(2\sqrt{2}),$$

при этом в системе уравнений (2.17) отсутствует слагаемое $\dot{a}_1 \delta_{1m} / \sqrt{H}$.

3. Нечетная часть решения. Нечетные (антисимметричные) составляющие (с верхним индексом a) являются решением уравнений (2.1), (2.2), (2.4), (2.5) с граничным условием

$$w^a = \varphi_1^a = 0 \quad (x = 0).$$

Прогиб балки $w^a(x, t)$ будем искать в виде разложения по нечетным собственным формам колебаний

$$w^a(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \psi_n^a(x), \quad (3.1)$$

где $\psi_n^a(x)$ — решение уравнения, аналогичного (2.7), с граничными условиями

$$\psi_n^a = 0 \quad (x = 0), \quad \psi_n^{a''} = \psi_n^{a'''} = 0 \quad (x = 1).$$

Нечетные собственные функции имеют вид [6]

$$\begin{aligned} \psi_1^a(x) &= \sqrt{3/2} x, \quad \psi_n^a(x) = D_n^a (\sin \lambda_n^a x + S_n^a \operatorname{sh} \lambda_n^a x), \\ D_n^a &= 1/\sqrt{1 - (S_n^a)^2}, \quad S_n^a = \cos \lambda_n^a / \operatorname{ch} \lambda_n^a \quad (n \geq 2). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Собственные числа λ_n^a определяются из дисперсионного соотношения $\operatorname{tg} \lambda_n^a = \operatorname{th} \lambda_n^a$. Функции $\psi_n^a(x)$ также образуют полную ортонормированную систему, и для них справедливо соотношение, аналогичное (2.9).

Так же как в п. 2, получим систему ОДУ

$$\gamma \ddot{b}_m + [1 + \delta(\lambda_m^a)^4] b_m + v_m(t) = - \left(Y_m(t) + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{b}_n(t) \Lambda_{mn}(t) \right)$$

с начальными условиями

$$b_m(0) = \dot{b}_m(0) = 0,$$

где

$$v_m(t) = \int_{-1}^1 \frac{\partial \varphi_1^a}{\partial t} \psi_m^a(x) dx, \quad Y_m(t) = \int_{-1}^1 Q(x, t) \psi_m^a(x) dx,$$

$$\Lambda_{mn}(t) = \int_{-1}^1 Q(x, t) \psi_m^a(x) \psi_n^a(x) dx.$$

Решение для $\varphi_1^a(x, t)$ ищем в виде

$$\varphi_1^a(x, t) = -\frac{1}{h} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \dot{b}_n(t) \Phi_n^a(x) + q^a(x, t) \right),$$

где функции $\Phi_n^a(x)$ удовлетворяют уравнению, аналогичному (2.13), и имеют вид

$$\Phi_1^a(x) = x^3/(2\sqrt{6}), \quad \Phi_n^a(x) = D_n^a (S_n^a \operatorname{sh} \lambda_n^a x - \sin \lambda_n^a x) / (\lambda_n^a)^2 \quad (n \geq 2). \quad (3.3)$$

Функция $q^a(x, t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 q^a}{\partial x^2} = 0$$

с граничным условием $q^a(0, t) = 0$, следовательно,

$$q^a(x, t) = xu(t), \quad u(0) = 0,$$

где $u(t)$ — неизвестная функция. В отличие от симметричной части решения при определении $u(t)$ из условий согласования потенциалов $\varphi_1^a(x, t)$, $\varphi_2^a(x, t)$ и их производных по x при $x = 1$ в основной системе

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{b}_n \left(\gamma \delta_{mn} - \frac{C_{mn}^a}{h} + \frac{1}{6h} \delta_{1m} + \alpha \Lambda_{mn}(t) \right) + \frac{\dot{b}_1}{2\sqrt{H}} \delta_{1m} + b_m [1 + \delta(\lambda_m^a)^4] + \sqrt{2/(3H)} u \delta_{1m} = -Y_m(t), \quad (3.4)$$

где $C_{mn}^a = \int_{-1}^1 \psi_m^a(x) \Phi_n^a(x) dx$, появляется дополнительное дифференциальное уравнение

$$\dot{u} + hu/\sqrt{H} = -(\ddot{b}_1/\sqrt{3} + h\sqrt{3/H} \dot{b}_1)/(2\sqrt{2}).$$

С учетом (3.2) и (3.3) имеем

$$\begin{aligned} C_{11}^a &= 1/10, \quad C_{1n}^a = C_{n1}^a = 2\sqrt{6} D_n^a (\cos \lambda_n^a - \sin \lambda_n^a / \lambda_n^a) / (\lambda_n^a)^3, \\ C_{nm}^a &= C_{mn}^a = 8D_n^a D_m^a (\lambda_n^a \cos \lambda_n^a \sin \lambda_m^a - \lambda_m^a \sin \lambda_n^a \cos \lambda_m^a) / ((\lambda_n^a)^4 - (\lambda_m^a)^4) \\ &\quad (n \neq m, \quad n, m \geq 2), \\ C_{nn}^a &= 2(D_n^a)^2 \cos \lambda_n^a (\sin \lambda_n^a / \lambda_n^a - \cos \lambda_n^a) / (\lambda_n^a)^2. \end{aligned}$$

Возвышение свободной поверхности при $x > 1$ имеет вид

$$\eta^a(x, t) = \begin{cases} -[u(\xi) + \sqrt{3} \dot{b}_1(\xi)/(2\sqrt{2})]/\sqrt{H}, & (x-1)/\sqrt{H} < t < \infty, \\ 0, & 0 < t < (x-1)/\sqrt{H}, \end{cases}$$

где $\xi = t - (x-1)/\sqrt{H}$.

В предположении невесомости жидкости при $|x| > 1$ функция $u(t)$ имеет вид

$$u(t) = -\dot{b}_1(t)/(2\sqrt{6}),$$

и система ОДУ сводится к системе (3.4) без членов $b_1\delta_{1m}/(2\sqrt{H})$, $\sqrt{2/(3H)}u\delta_{1m}$.

4. Численные расчеты. Для тестирования вычислительного алгоритма использованы результаты решения задачи о воздействии периодического поверхностного давления на плавающую упругую балку [7]. Распределение внешнего давления в размерных переменных задавалось в виде

$$P(x, t) = a\rho g F(x) \sin \omega t; \quad (4.1)$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - ((x - l_1)/l)^2, & |x - l_1| \leq l, \\ 0, & |x - l_1| > l \end{cases} \quad (l, l_1 > 0, l_1 + l < L). \quad (4.2)$$

Расчеты, выполненные при $l_1 = 0$, $L/2$ для безразмерной частоты $\omega\sqrt{H/g}$ в диапазоне $0,1 \div 0,5$, показали, что колебания балки и окружающей жидкости примерно через 2–3 периода колебаний $2\pi/\omega$ выходят на установившийся периодический режим. Амплитуды поверхностных волн и прогибов балки в установившемся режиме совпали с амплитудами, полученными в [7].

Для исследования нестационарного безынерционного воздействия на балку выбрана внешняя нагрузка вида

$$P(x, t) = a\rho g F(x) B(t), \quad (4.3)$$

где функция $F(x)$ задана выражением (4.2), а зависимость от времени имеет вид

$$B(t) = \begin{cases} t/b, & t \leq b, \\ 2 - t/b, & b \leq t \leq 2b, \\ 0, & t > 2b. \end{cases}$$

Исходные параметры имели следующие значения: $D = 4,476 \cdot 10^{10}$ кг·м²/с², $H = 20$ м, $\rho = 10^3$ кг/м³, $d = 1$ м, $L = 200$ м, $l = 40$ м. При этих значениях безразмерные коэффициенты γ и δ равны соответственно $5 \cdot 10^{-3}$ и $2,852 \cdot 10^{-3}$.

При численном решении систем ОДУ используется метод редукции, и бесконечные ряды в (2.6), (3.1) заменяются конечными суммами с числом членов N . Во всех приведенных расчетах $N = 10$, дальнейшее увеличение N практически не влияет на результат.

Расчеты для балки конечных размеров сопоставлены с известным решением для бесконечной балки (см., например, [1, 2]). Для нагрузки в форме (4.3) это решение имеет вид

$$w(x, t) = \frac{a\rho g}{\pi b} \int_0^\infty \frac{Y(k, t) \tilde{F}(k) \cos kx}{Dk^4 + \rho g} dk,$$

где

$$Y(k, t) = \begin{cases} \sin \Omega t / \Omega - t, & 0 \leq t \leq b, \\ [2 \sin \Omega(b - t) + \sin \Omega t] / \Omega - 2b + t, & b \leq t \leq 2b, \\ [2 \sin \Omega(b - t) - \sin \Omega(2b - t) + \sin \Omega t] / \Omega, & t > 2b, \end{cases}$$

$$\Omega^2(k) = hk^2(Dk^4 + \rho g) / (\rho + \rho_1 h_1 h k^2),$$

$\tilde{F}(k)$ — фурье-преобразование функции $F(x)$ в (4.2):

$$\tilde{F}(k) = 4[\sin kl / (kl) - \cos kl] / (lk^2).$$

В расчетах, результаты которых приведены ниже, принято $b = 0,5$ с.

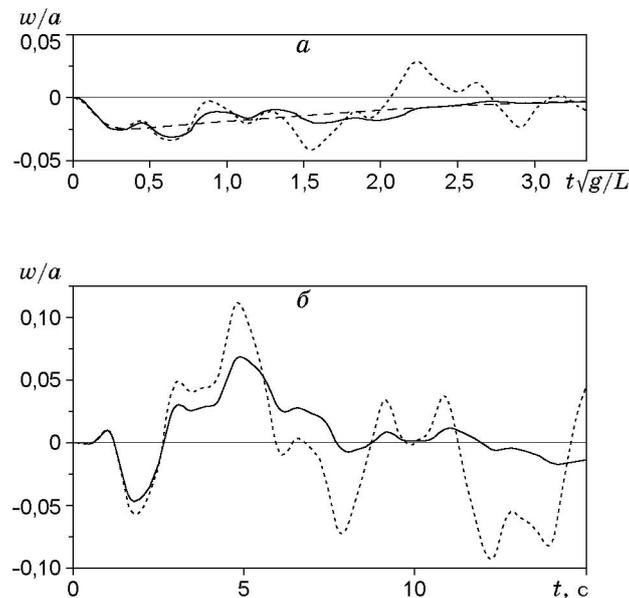


Рис. 1. Зависимость нормального прогиба балки от времени при нагрузке вида (4.3), $l_1 = 0$:

сплошные кривые — решение для конечной балки и весомой жидкости; пунктирные — решение для конечной балки и невесомой жидкости; штриховая — решение для бесконечной балки; a — $x = 0$; b — $x = L$

На рис. 1 приведены результаты расчетов в случае симметричного расположения внешней нагрузки ($l_1 = 0$). Представлены зависимости нормальных прогибов балки w/a при $x = 0$ (сплошная кривая на рис. 1, a) и $x = L$ (сплошная кривая на рис. 1, b) от безразмерного и размерного времени. Для сравнения на рис. 1, a, b приведены соответствующие решения для невесомой жидкости (пунктирные кривые). Нормальный прогиб бесконечной балки в центре приложения давления показан на рис. 1, a штриховой кривой. Следует отметить, что в эпицентре давления на отрезке времени, на котором действует давление ($t \leq 2b = 1$ с), все три решения совпадают, но после прекращения внешнего воздействия прогибы различных балок существенно различаются. Для бесконечной балки наблюдается монотонное стремление к исходному состоянию. Для конечной балки в весомой жидкости со временем также устанавливается исходное состояние, но немонотонным образом. Для балки в невесомой жидкости убывания прогибов со временем как в эпицентре давления, так и на краях не наблюдается, так как в этом случае отсутствуют генерация поверхностных волн и рассеяние энергии.

Колебания балки на краях существенно больше, чем в эпицентре давления (ср. рис. 1, a и рис. 1, b). Максимальный прогиб края, достигаемый при $t \approx 5$ с, почти в два раза больше максимального прогиба в эпицентре давления.

Результаты расчетов в случае несимметричного приложения давления ($l_1 = 0,5L$) представлены на рис. 2, где показаны нормальные прогибы в эпицентре давления ($x = l_1$) для конечной и бесконечной балок (сплошная и пунктирная кривые на рис. 2, a). Так же как на рис. 1, a , эти решения совпадают в моменты времени, в которые действует давление ($t \leq 1$ с), а затем постепенно стремятся к нулю. Колебания краев балки показаны на рис. 2, b при $x = L$ (сплошная кривая) и $x = -L$ (пунктирная кривая). Максимальные значения прогибов на левом и правом концах балки примерно одинаковые и практически совпадают со значениями прогибов в симметричном случае (ср. рис. 1, b и рис. 2, b), однако

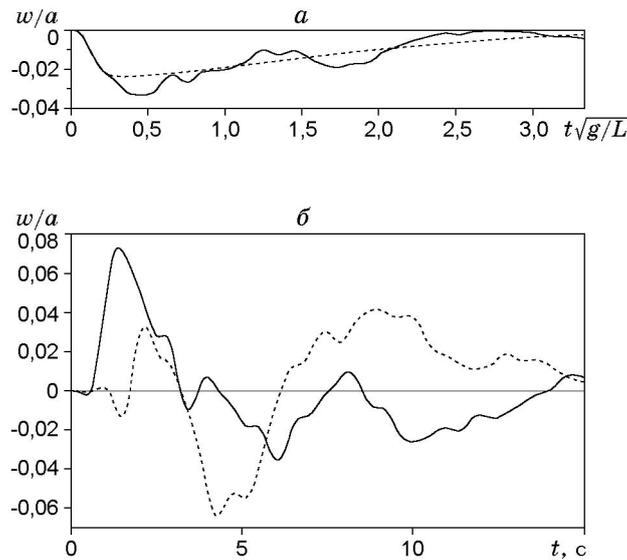


Рис. 2. Зависимость нормального прогиба балки от времени при нагрузке вида (4.3), $l_1 = 0,5L$:

a — $x = l_1$ (сплошная кривая — решение для конечной балки; пунктирная — для бесконечной балки); b — решения для конечной балки (сплошная кривая — $x = L$; пунктирная — $x = -L$)

время появления максимальных прогибов различно. Сначала (при $t \approx 1,5$ с) максимальный прогиб достигается на конце, ближайшем к области давления, а затем (при $t \approx 4$ с) — на противоположном конце.

Влияние движущейся инерционной нагрузки рассмотрено на примере, в котором нагрузка моделирует посадку самолета. Предполагается, что в начальный момент времени нагрузка имеет скорость v и плавно касается балки в точке $x = x_0$, а затем равномерно движется влево вплоть до полной остановки в точке $x = x_1$ в момент времени $t = t_1 \equiv 2(x_0 - x_1)/v$. Распределение нагрузки по x задается в виде (4.2), где

$$l_1(t) = \begin{cases} x_0 - vt + v^2 t^2 / (4(x_0 - x_1)), & 0 \leq t \leq t_1, \\ x_1, & t > t_1. \end{cases} \quad (4.4)$$

Функция $Q(x, t)$ в (1.2) задается в виде

$$Q(x, t) = [1 - \exp(-bt)]F(x, t)/l, \quad (4.5)$$

где $F(x, t)$ определена в (4.2) с учетом зависимости (4.4) для $l_1(t)$. Используются прежние исходные параметры, но в этой задаче принято $l = 0,1L$, $x_0 = 0,7L$, $x_1 = -0,7L$, $b = 20/t_1$.

Вначале рассмотрим поведение балки при $\alpha = 0$, т. е. без учета инерции груза. На рис. 3, a – b показаны нормальные прогибы балки в точках $x = L, 0, -L$ в зависимости от начальной скорости движения нагрузки $v' \equiv v/\sqrt{gL} = 0,1; 0,3; 0,5$ (сплошные, штриховые, пунктирные кривые). Отметим, что для заданной глубины жидкости безразмерная критическая скорость распространения гравитационных и изгибно-гравитационных волн $\sqrt{H/L} \approx 0,33$. На рис. 3, b вертикальная линия соответствует моменту пересечения средней точкой приложения нагрузки начала координат. Видно, что максимальный прогиб балки достигается в этот момент только при относительно медленном движении. С увеличением v' величина максимального прогиба при $x = 0$ уменьшается, и его появление наблюдается после прохождения пика нагрузки через точку $x = 0$. При $t > t_1$ колебания

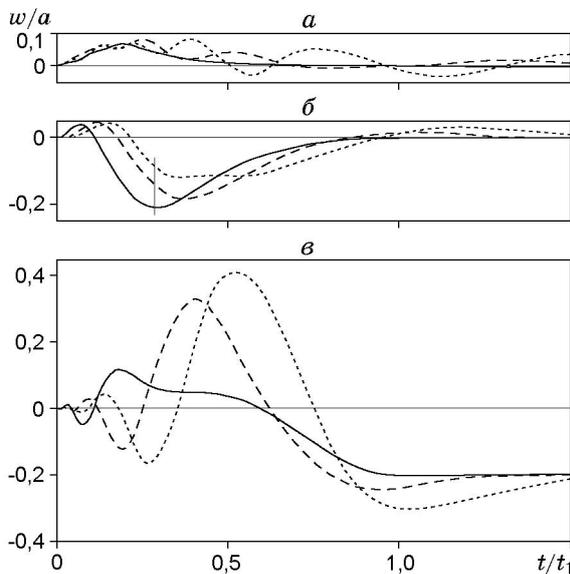


Рис. 3

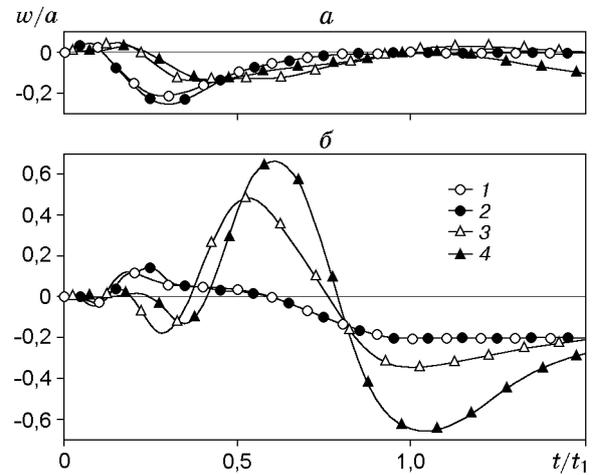


Рис. 4

Рис. 3. Зависимость нормального прогиба балки от времени при нагрузке вида (4.5), $\alpha = 0$: сплошные кривые — $v' = 0,1$; штриховые — $v' = 0,3$; пунктирные — $v' = 0,5$; а — $x = L$; б — $x = 0$; в — $x = -L$

Рис. 4. Зависимость нормального прогиба балки от времени при инерционной нагрузке вида (4.5):

1 — $v' = 0,1$, $\alpha = 1$; 2 — $v' = 0,1$, $\alpha = 10$; 3 — $v' = 0,5$, $\alpha = 1$; 4 — $v' = 0,5$, $\alpha = 10$; а — $x = 0$; б — $x = -L$

балки успокаиваются и постепенно принимают значения, соответствующие распределенной статической нагрузке с центром в точке $x = x_1$. Решение такой стационарной задачи легко построить описанным выше методом, при этом системы ОДУ (2.17) и (3.4) сведутся к простым системам линейных алгебраических уравнений. Значения безразмерного статического прогиба при $x = L, 0, -L$ равны соответственно $-0,003$; $-0,004$; $-0,203$.

На рис. 3 видно, что для трех рассмотренных точек балки наибольшие прогибы, как правило, возникают на ее левом конце. Увеличение начальной скорости нагрузки приводит к более сильным колебаниям балки и большему времени выхода на статический режим по сравнению с временем движения нагрузки.

На рис. 4, а, б показаны значения прогибов балки, вычисленные с учетом сил инерции, при $x = 0, -L$ соответственно для $v' = 0,1$ (кривые 1, 2) и $v' = 0,5$ (кривые 3, 4). Кривые 1, 3 соответствуют значению $\alpha = 1$, кривые 2, 4 — $\alpha = 10$. Видно, что при относительно малой начальной скорости $v' = 0,1$ увеличение параметра инерционности слабо влияет на величину прогибов, тогда как при $v' = 0,5$ увеличение коэффициента α приводит к существенно большим прогибам балки, чем в безынерционном случае.

Заключение. Представленные результаты показывают, что ограниченные размеры упругой балки существенно влияют на ее поведение под действием нестационарной нагрузки. Как отмечено ранее для периодической внешней нагрузки [7], в некоторых случаях амплитуды нормальных прогибов балки на ее краях существенно превышают соответствующие значения во внутренней части. Результаты исследования влияния сил инерции колебания нагрузки подтверждают выводы [1, 3] о том, что инерционность нагрузки следует учитывать только для достаточно массивных грузов, движущихся со значительными ускорениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Хейсин Д. Е.** Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967.
2. **Черкесов Л. В.** Поверхностные и внутренние волны. Киев: Наук. думка, 1973.
3. **Squire V. A., Hosking R. J., Kerr A. D., Langhorne P. J.** Moving loads on ice plates. Dordrecht: Kluwer, 1996.
4. **Kashiwagi M.** A time-domain mode-expansion method for calculating transient elastic responses of a pontoon-type VLFS // J. Mar. Sci. Technol. 2000. V. 5, N 2. P. 89–100.
5. **Korobkin A.** Unsteady hydroelasticity of floating plates // J. Fluids Struct. 2000. V. 14. P. 971–991.
6. **Филиппов А. П.** Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970.
7. **Стурова И. В.** Воздействие периодических поверхностных давлений на плавающую упругую платформу // Прикл. математика и механика. 2002. Т. 66, вып. 1. С. 75–86.

Поступила в редакцию 9/1 2002 г.
