

5. Болотин В. В. Случайные колебания упругих систем. М., Наука, 1979.
6. Болотин В. В. О безопасных размерах трещин при случайном нагружении. — Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела, 1980, № 1.
7. Тихонов В. И. Выбросы случайных процессов. М., Наука, 1970.

УДК 539.3

О НЕКОТОРЫХ ФОРМАХ МЕТОДА ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Э. И. Григолюк, В. И. Шалашилин
(Москва)

1. Уравнения, описывающие нелинейную статическую деформацию упругих систем, как правило, содержат параметр (обычно это параметр нагрузки). Ниже будут рассмотрены алгебраические и трансцендентные уравнения. Обобщение на случай функциональных и операторных уравнений не составляет принципиальных трудностей.

Рассмотрим содержащую параметр λ систему нелинейных уравнений для вектора $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_m\}$

$$(1.1) \quad F(\mathbf{x}, \lambda) = 0,$$

где $F = \{F_1(\mathbf{x}, \lambda), \dots, F_m(\mathbf{x}, \lambda)\}$ — нелинейная относительно $\mathbf{x}$ и λ вектор-функция, которую будем считать непрерывной и достаточное число раз дифференцируемой по $\mathbf{x}$ и λ .

Пусть при $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_n]$ уравнение (1.1) имеет решение $\mathbf{x}(\lambda)$ и пусть при $\lambda = \lambda_0$ такое решение $\mathbf{x}_{(0)} = \mathbf{x}(\lambda_0)$ известно, т. е.

$$(1.2) \quad F(\mathbf{x}_{(0)}, \lambda_0) = 0.$$

Введем $(m+1)$ -мерное векторное пространство $E_{m+1} : \{\mathbf{x}, \lambda\}$. В этом пространстве точка, соответствующая решению (1.1), описывает непрерывную кривую K , которая проходит через точки $\mathbf{x}_{(0)}, \lambda_{(0)}$ и $\mathbf{x}_{(n)}, \lambda_{(n)}$. Идея метода продолжения по параметру состоит в построении последовательности решений $\mathbf{x}_{(k)} = \mathbf{x}(\lambda_k)$ ($k = 1, \dots, n$) на основе известного решения $\mathbf{x}_{(0)}$ при движении вдоль кривой K . Известны две формы метода продолжения по параметру: непрерывное продолжение [1] и дискретное продолжение [2].

2. Процесс непрерывного продолжения основан на том, что дифференцирование уравнений (1.1) по параметру λ приводит к линейной для $d\mathbf{x}_i/d\lambda$ системе уравнений

$$(2.1) \quad J \frac{d\mathbf{x}}{d\lambda} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0, \quad J = \left\{ F_{i,j} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right\} \quad (i, j = 1, \dots, m).$$

Если при $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_n]$ якобиан $\det(J) \neq 0$, то процесс построения решений системы (1.1) сводится к интегрированию задачи Коши по параметру λ

$$(2.2) \quad \frac{d\mathbf{x}}{d\lambda} = -J^{-1} \frac{\partial F}{\partial \lambda}, \quad \mathbf{x}(\lambda_0) = \mathbf{x}_{(0)}.$$

Для интегрирования могут быть использованы известные явные и неяв-

ные схемы. Однако все они становятся непригодными вблизи точек, где $\det(J) = 0$, т. е. особых точек кривой K . Ниже будут рассмотрены только предельные точки. Обычно эти трудности обходят с помощью смены параметра [1], используя вместо (2.1) аналогичную систему, которая получается из (1.1) дифференцированием по одной из компонент x_i вектора x , и полагая $\lambda = \lambda(x_i)$. При этом возникает вопрос о выборе оптимального параметра продолжения [3, 4].

Изложим другой подход. В E_{m+1} обозначим $x_{m+1} = \lambda$. Тогда система уравнений (1.1) примет вид

$$(2.3) \quad F_i(x) = 0 \quad (i = 1, \dots, m; x \in E_{m+1}).$$

Уравнения (2.1) представим в форме однородной системы m линейных уравнений для $m + 1$ неизвестных dx_j

$$(2.4) \quad \sum_{j=1}^{m+1} F_{i,j} dx_j = 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

Матрица этой системы $J_+ = \{J, F, \lambda\}$, образованная присоединением справа к J вектора-столбца F, λ , обладает тем важным свойством, что как в регулярных, так и в предельных точках $\text{ранг}(J_+) = m$. Вектор $dx = \{dx_1, \dots, dx_m, dx_{m+1} = d\lambda\}$ по своему смыслу касателен к кривой K в E_{m+1} и принадлежит одномерному подпространству решений системы (2.4). В дальнейшем под dx будем понимать единичный орт этого подпространства. Будучи решением системы (2.4), он ортогонален к строкам матрицы J_+ и может быть получен как ортогональное дополнение построенного с помощью процесса Грамма — Шмидта ортонормированного базиса строк J_+ . Ввиду того, что $\text{ранг}(J_+) = m$, такой базис существует как в регулярных, так и в предельных точках. Этот метод решения систем (2.1), (2.4) принято называть методом ортогонализации [5]. По числу необходимых операций и по устойчивости он лишь незначительно уступает методу Гаусса. Однако при применении его в процессе продолжения по параметру на каждом шаге обеспечивается большая обусловленность системы (2.4) по сравнению с (2.2) ввиду оптимальности направления продолжения вдоль dx [4]. А сам вопрос об оптимальном параметре продолжения решается естественным образом.

Система (2.4) вместе с начальным условием $x(\lambda_0) = x_{(0)}$ представляет собой неявно сформулированную задачу Коши для dx и может быть проинтегрирована с помощью тех же явных и неявных схем, что и задача (2.2).

3. Метод дискретного продолжения по параметру в форме, предложенной в [2], по существу, состоит в отыскании решений $x_{(k)} = x(\lambda_k)$ системы (1.1) методом Ньютона, причем в качестве начального приближения берется решение $x_{(k-1)} = x(\lambda_{k-1})$. Соответствующий итерационный процесс имеет вид

$$(3.1) \quad x_{(k)}^{(0)} = x_{(k-1)}, \quad J(x_{(k)}^{(i)}, \lambda_k) \cdot \Delta x_{(k)}^{(i+1)} + F(x_{(k)}^{(i)}, \lambda_k) = 0, \\ x_{(k)}^{(i+1)} = x_{(k)}^{(i)} + \Delta x_{(k)}^{(i+1)}, \quad i = 0, 1, \dots$$

На фиг. 1 дана геометрическая иллюстрация этого процесса для уравнения с одним неизвестным $F(x, \lambda) = 0$. Искомые решения $x_{(k)} = x(\lambda_k)$ лежат на кривой K , по которой поверхность $F(x, \lambda)$ пересекается с плоскостью x, λ . В окрестности предельной точки P переход от λ_k к λ_{k+1} выводит процесс (3.1) из области, где существует решение, и он перестает сходиться. Иными словами, возникшие трудности обусловлены поиском решения (1.1) на m -мерной плоскости $\lambda = \lambda_{k+1} \in E_{m+1}$, которая не имеет пересечения

поправочных векторов $\Delta \mathbf{x}_{(k)}^{(i+1)}$ к $d\mathbf{x}_{(k-1)}$ и записывать его в форме $d\mathbf{x}_{(k-1)} \cdot \Delta \mathbf{x}_{(k)}^{(i+1)} = 0$.

Если ввести вектор $\tilde{d}\mathbf{x}_{(k)}^{(i)} = (\mathbf{x}_{(k)}^{(i)} - \mathbf{x}_{(k-1)})/t$, то по аналогии второе уравнение в (3.5) можно заменить на следующее:

$$(3.7) \quad d\mathbf{x}_{(k)}^{(i)} \cdot \Delta \mathbf{x}_{(k)}^{(i+1)} = 0.$$

Геометрия процесса с таким условием показана на фиг. 3 штриховыми линиями. В нем на каждом шаге корректируется M_m^* . Еще более эффективным кажется процесс, показанный на фиг. 3 сплошными линиями. Он реализуется следующим алгоритмом:

$$(3.8) \quad d\mathbf{x}_{(k)}^{(0)} = d\mathbf{x}_{(k-1)}, \quad \mathbf{x}_{(k)}^{(0)} = \mathbf{x}_{(k-1)} + t d\mathbf{x}_{(k-1)}^{(0)};$$

$$(3.9) \quad \begin{cases} J_+(\mathbf{x}_{(k)}^{(i)}) \cdot \Delta \mathbf{x}_{(k)}^{(i+1)} + F(\mathbf{x}_{(k)}^{(i)}) = 0, \\ d\mathbf{x}_{(k)}^{(i)} \cdot \Delta \mathbf{x}_{(k)}^{(i+1)} = 0; \end{cases}$$

$$(3.10) \quad d\mathbf{x}_{(k)}^{(i+1)} = d\mathbf{x}_{(k)}^{(i)} + \Delta \mathbf{x}_{(k)}^{(i+1)}, \quad d\mathbf{x}_{(k)}^{(i+1)} = d\mathbf{x}_{(k)}^{(i+1)} / (d\mathbf{x}_{(k)}^{(i+1)} \cdot d\mathbf{x}_{(k)}^{(i+1)})^{\frac{1}{2}};$$

$$(3.11) \quad \mathbf{x}_{(k)}^{(i+1)} = \mathbf{x}_{(k-1)} + t d\mathbf{x}_{(k)}^{(i+1)}, \quad i = 0, 1, \dots$$

Этот алгоритм обеспечивает величину шага t по хорде кривой K с заданной точностью.

Все приведенные выше алгоритмы допускают замену вектора $d\mathbf{x}_{(k-1)}$ на его приближенное значение $\tilde{d}\mathbf{x}_{(k-1)}^* = (\mathbf{x}_{(k-1)} - \mathbf{x}_{(k-2)}) / [(\mathbf{x}_{(k-1)} - \mathbf{x}_{(k-2)}) \cdot (\mathbf{x}_{(k-1)} - \mathbf{x}_{(k-2)})]^{1/2}$, а также обычную модификацию метода Ньютона с заменой $J_+(\mathbf{x}_{(k)}^{(i)})$ на $J_+(\mathbf{x}_{(k)}^{(0)})$.

Заметим, что сходный по геометрической трактовке с процессом (3.4) — (3.6) подход обсуждался в [4], однако предложенное там дополнительное уравнение громоздко и требует значительного числа дополнительных вычислений, что отмечено самим автором.

Поверхность M_m^* может и не быть плоскостью. Например, если искать решение для (2.3) на сфере радиуса t с центром в $\mathbf{x}_{(k-1)}$, то приходим к совместному решению уравнений

$$F_q(\mathbf{x}) = 0 \quad (q = 1, \dots, m), \quad (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{(k-1)}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{(k-1)}) - t^2 = 0.$$

Алгоритм метода Ньютона принимает форму (3.4) — (3.6) с заменой дополнительного уравнения в (3.5) на следующее:

$$d\mathbf{x}_{(k)}^{(i)} \cdot \Delta \mathbf{x}_{(k)}^{(i+1)} + \frac{t}{2} (d\mathbf{x}_{(k)}^{(i)} \cdot d\mathbf{x}_{(k)}^{(i)} - 1) = 0.$$

Решение уравнений (3.5), (3.9) методом ортогонализации исключает вычислительные трудности как в регулярных, так и в предельных точках.

В заключение отметим, что сформулированные здесь процессы непрерывного и дискретного продолжения обладают существенной алгоритмической общностью, что позволяет удобно комбинировать непрерывное и дискретное продолжение, используя последнее, по необходимости для периодического уточнения решения.

Поступила 15 III 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Давиденко Д. Ф. Об одном новом методе численного решения нелинейных уравнений. — ДАН СССР, 1958, т. 88, № 4.
2. Lahaye M. E. Une méthode de résolution d'une catégorie d'équations transcendentes. — Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'academie des sciences, 1934, vol. 198, N 21.

3. Ворович И. И., Запалова В. Ф. К решению нелинейных краевых задач теории упругости методом перехода к задаче Коши. — ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.
4. Riks E. The application of Newton's method to the problem of elastic stability. — Trans. ASME, 1972, E39, N 4.
5. Бахвалов Н. С. Численные методы. М., 1973.

УДК 534.222.2

О МАКСИМАЛЬНОЙ АМПЛИТУДЕ УПРУГИХ ПРЕДВЕСТНИКОВ

Ю. И. Фадеев

(Киев)

Предел текучести твердых тел повышается с ростом давления, причем обычно в первом приближении можно принять

$$(1) \quad Y(p) = Y_0 + \alpha p,$$

где Y_0 — предел текучести при чистом сдвиге для $p = 0$; p — давление; α — постоянная, характеризующая свойства материала. Наличие зависимости (1) сказывается на результатах эксперимента даже и в том случае, когда внешнее давление равно нулю, если шаровая часть тензора напряжений отлична от нуля. Известно, например, что зависимость (1) приводит к различию экспериментально измеренных пределов текучести при одноосных растяжении и сжатии (эффект SD, т. е. strength-differential [1—3])

$$Y^+ = \sqrt{3}Y_0/(\sqrt{3} + \alpha), \quad Y^- = \sqrt{3}Y_0/(\sqrt{3} - \alpha)$$

(индекс плюс отвечает растяжению, минус — сжатию). Однако величина эффекта в этом случае мала. Действительно, отношение пределов текучести при растяжении — сжатии равно отношению

$$Y^+/Y^- = (\sqrt{3} - \alpha)/(\sqrt{3} + \alpha).$$

Экспериментальные данные о значениях коэффициента α довольно многочисленны, но несистематичны, и значения α , приводимые разными авторами для одного и того же материала, могут отличаться в 2 раза и более. Типичными можно считать величины $\alpha = 0,025-0,1$, что приводит к различию пределов текучести всего на 3—12%. У некоторых материалов зафиксированы очень высокие значения α . Так, у титана $\alpha = 0,25-0,33$ [4], лития — 0,25, у некоторых карбидов около 0,4, и, наконец, у сталей при очень высоких давлениях $\alpha \rightarrow 0,5$ [5, 6]. Однако в силу сказанного выше эти данные нельзя считать окончательными, и, за редкими исключениями, на практике учет эффекта SD пренебрегают.

Более существенно влияние зависимости (1) на структуру упругопластических волн, где приходится иметь дело не с одноосным напряженным состоянием, а с одноосной деформацией. В плоской волне нормальное напряжение σ_{xx} (ось x совпадает с направлением распространения волны) связано с главным касательным напряжением τ соотношением

$$(2) \quad \tau = \sigma_{xx}(1 - 2\nu)/2(1 - \nu),$$

где ν — коэффициент Пуассона. В упругом предвестнике пластической волны τ достигает максимально возможного значения, равного динамиче-