

О ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ ИНТЕНСИВНОГО РЕЛЯТИВИСТСКОГО ПОТОКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

*В. Б. Бавин, В. М. Вецко, В. А. Лейтан,
А. С. Рошаль, А. В. Шальнов*

(Москва)

Описан метод численного моделирования стохастических процессов в интенсивных релятивистских потоках частиц, распространяющихся в электрическом и магнитном полях. Рассматривается двумерное приближение с использованием «крупных частиц». Функции влияния предварительно табулируются по трем переменным. Метод сочетает высокую скорость с хорошей точностью. Приводятся результаты моделирования.

1. Эффективным методом исследования процессов в ансамблях частиц является численное моделирование на ЭВМ с использованием крупных частиц [1-5]. В случае релятивистского потока вычисления осложняются тем, что силы объемного заряда, создаваемые частицами, зависят от их расположения и от скорости движения. Кулоновские силы взаимодействия между частицами вычисляются с помощью так называемых функций влияния зарядов. Объем вычислений пропорционален квадрату числа крупных («машинных») частиц. Поэтому допустимое количество машинных частиц по необходимости ограничено и на лучших ЭВМ не превышает нескольких сотен. Память ЭВМ достаточно велика и позволяет хранить обширную информацию, которую можно использовать для ускорения решения уравнений движения и поля с помощью соответствующих алгоритмов.

Рассматривается распространение частиц с зарядом e и массой покоя m_0 в цилиндрической области, состоящей из участка дрейфа и области взаимодействия с бегущей электромагнитной волной. (Граница на стыке областей дрейфа и взаимодействия считается условной и является сечением, в котором вводится волна высокочастотного электромагнитного поля. Слабое несинхронное взаимодействие с этой волной в области дрейфа не учитывается.) Предполагается, что в области дрейфа уже сформирован (в соответствии с алгоритмом инжекции) сгусток частиц с некоторой заданной функцией распределения по координатам и скоростям. Задавая различные функции распределения, можно изучать их влияние на характер процессов. Дрейфуя, сгусток поступает в область взаимодействия, которая представляет собой цилиндрический диафрагмированный волновод. В области взаимодействия поток близок к синхронизму и сильно взаимодействует лишь с одной, основной пространственной гармоникой бегущей волны СВЧ поля с длиной волны в свободном пространстве λ и с фазовой скоростью $v_w = \beta_w c$ (c — скорость света).

Предполагается, что задача является аксиально-симметричной, поток не возмущает внешнее электромагнитное поле, продольный компонент внешнего магнитного поля зависит лишь от продольной координаты. Излучение частиц не учитывается. Машинные частицы с зарядом Me и массой покоя Mm_0 представляются в виде бесконечно тонких колец, радиус которых может меняться в ходе моделирования. Заряд колец Me и количество инжектированных частиц $n(0)$ выбираются так, чтобы ток

пучка в модели был, как в физической системе. В ходе моделирования частицы могут уходить из области (например, на стенки трубы, мишень и т. д.). Число частиц, сохраняющихся в области в момент времени τ , обозначим $n(\tau)$ ($n(\tau) \leq n(0)$).

В каждый момент времени τ по известным координатам и скоростям всех $n(\tau)$ частиц вычисляются поля объемного заряда. Затем из уравнений движения находятся координаты и скорости частиц в момент времени $\tau + \Delta\tau$.

Уравнение движения релятивистской частицы

$$(1.1) \quad \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = \frac{e}{m_0} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \left\{ \mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{B}] - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{E}) \right\}$$

в цилиндрической системе координат $\{r, \theta, z\}$ после перехода к безразмерным переменным

$$(1.2) \quad t = \frac{c\tau}{\lambda}, \quad \xi = \frac{z}{\lambda}, \quad \eta = \frac{r}{\lambda}, \quad \alpha = \frac{r}{c} \frac{d\theta}{d\tau}$$

принимает вид

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \xi'' &= F_\xi(t) \equiv \frac{1}{\gamma} [E_\xi + \eta' B_\alpha - \alpha B_\eta - \xi' (E_\xi \xi' + \eta' E_\eta)] \\ \eta'' &= F_\eta(t) \equiv \frac{1}{\gamma} [E_\eta - \xi' B_\alpha + \alpha B_\xi - \eta' (E_\xi \xi' + \eta' E_\eta)] + \frac{\alpha^2}{\eta} \\ \alpha' &= F_\alpha(t) \equiv \frac{1}{\gamma} [-\eta' B_\xi + \xi' B_\eta - \alpha (E_\xi \xi' + \eta' E_\eta)] - \frac{\alpha \eta'}{\eta} \end{aligned}$$

где штрих означает производную по t , γ — фактор Лоренца

$$(1.4) \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}, \quad \beta^2 = (\xi')^2 + (\eta')^2 + \alpha^2$$

Аксиальный компонент $E_\theta = 0$. Для перехода от безразмерных напряженностей поля к размерным их следует домножить на соответствующие нормирующие множители

$$E_{z,r} = \frac{m_0 c^2}{e\lambda} E_{\xi,\eta}, \quad B_{z,r,\theta} = \frac{m_0 c}{e\lambda} B_{\xi,\eta,\alpha}$$

К уравнениям (1.3) должно быть присоединено уравнение для фазы

$$(1.5) \quad \varphi = \varphi_0 - 2\pi t + \Phi(\xi), \quad \Phi(\xi) = 2\pi \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\beta_w(\xi)}$$

где φ_0 — фаза волны внешнего электромагнитного поля на входе в область взаимодействия ξ_0 в начальный момент $t = 0$.

Поля \mathbf{E} , \mathbf{B} в уравнении движения (1.1) складываются из внешних полей \mathbf{E}_w , \mathbf{B}_w и полей объемного заряда \mathbf{E}_s , \mathbf{B}_s

$$(1.6) \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_w + \mathbf{E}_s, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_w + \mathbf{B}_s$$

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}_w &= E_m(\xi) \left[I_0 \left(\frac{2\pi \sqrt{1 - \beta_w^2}}{\beta_w} \eta \right) \cos \varphi \mathbf{i}_z + (1 - \beta_w^2)^{-1/2} \times \right. \\ &\quad \left. \times I_1 \left(\frac{2\pi \sqrt{1 - \beta_w^2}}{\beta_w} \eta \right) \sin \varphi \mathbf{i}_r \right] \\ \mathbf{B}_w &= B_\xi(\xi) \mathbf{i}_z - \frac{\eta}{2} \frac{dB_\xi}{d\xi} \mathbf{i}_r + \\ &\quad + E_m(\xi) \frac{\beta_w}{\sqrt{1 - \beta_w^2}} I_1 \left(\frac{2\pi \sqrt{1 - \beta_w^2}}{\beta_w} \eta \right) \sin \varphi \mathbf{i}_\theta \end{aligned}$$

где I_0, I_1 — функции Бесселя мнимого аргумента; $\mathbf{i}_z, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta$ — орты; β_w, E_m и B_{ξ} зависят только от ξ и задаются таблично. Выражения, включающие в себя $E_m(\xi)$, являются компонентами волны типа E_{01} в канале цилиндрического диафрагмированного волновода. При $\beta_w \approx 1$ формулы (1.7) упрощаются

$$(1.8) \quad E_w = E_m(\xi) [\cos \varphi \mathbf{i}_z + \pi \eta \beta_w^{-1} \sin \varphi \mathbf{i}_r], \quad E_{w,\theta} = E_m(\xi) \pi \eta \sin \varphi$$

Поле объемного заряда в точке ξ_i, η_i , где расположена частица номер i ($i = 1, 2, \dots, n(t)$), находится суммированием полей, создаваемых всеми остальными частицами $j = 1, 2, \dots, n(t), j \neq i$, в предположении, что продольная компонента плотности тока пучка является доминирующей

$$(1.9) \quad \mathbf{E}_s(\xi_i, \eta_i) = A \sum_{j \neq i} [S_0(\eta_i, \eta_j, \kappa_{ij}) \text{sign}(\xi_i - \xi_j) \mathbf{i}_z + \mu_j S_1(\eta_i, \eta_j, \kappa_{ij}) \mathbf{i}_r]$$

$$B_{s,\theta}(\xi_i, \eta_i) = A \sum_{j \neq i} \xi_j' \mu_j S_1(\eta_i, \eta_j, \kappa_{ij})$$

$$(1.10) \quad A = M e^2 \lambda / (2 \pi \epsilon_0 m_0 c^2 a^2), \quad \mu_j = (1 - (\xi_j')^2)^{-1/2}$$

Здесь a — радиус трубы, S_0 и S_1 — функции влияния для бесконечно тонкого кольца в идеально проводящей цилиндрической трубе

$$(1.11) \quad S_p(\eta_i, \eta_j, \kappa_{ij}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(v_k \lambda a^{-1} \eta_j) J_p(v_k \lambda a^{-1} \eta_i)}{J_1^2(v_k)} e^{-v_k \kappa_{ij}} \quad (p = 0; 1)$$

В (1.11) j — индекс кольца (машинной частицы), создающей поле, i — индекс частицы, на которую действует поле; $J_0(v_k) = 0$

$$(1.12) \quad \kappa_{ij} = \lambda a^{-1} \mu_j |\xi_i - \xi_j|$$

Основное время счета требуется для вычисления полей объемного заряда (1.9), поскольку необходимое количество операций пропорционально $n^2(t)$.

2. Моделирование выполняется с постоянным шагом Δt , который определяется компромиссом между точностью и скоростью решения. При решении уравнений движения (1.3) каждой из $i = 1, 2, \dots, n(t)$ частиц для скоростей используем экстраполяционную формулу Адамса [6], позволяющую вычислять правые части однократно на шаге и имеющую точность на шаге порядка $(\Delta t)^4$. Для ξ_i' , например, имеем

$$(2.1) \quad \xi_i'(t + \Delta t) = \xi_i'(t) + \Delta t [{}^{23/12} F_{\xi_i}(t) - {}^{4/3} F_{\xi_i}(t - \Delta t) + {}^{5/12} F_{\xi_i}(t - 2\Delta t)]$$

где правые части $F_{\xi_i}(t - \Delta t), F_{\xi_i}(t - 2\Delta t)$ уравнения (1.3) вычисляются на предыдущих шагах моделирования, а затем сохраняются для последующих расчетов. Аналогично вычисляются $\eta_i'(t + \Delta t), \alpha_i(t + \Delta t)$.

Для вычисления координаты ξ_i используем разложение в степенной ряд

$$(2.2) \quad \xi_i(t + \Delta t) = \xi_i(t) + \xi_i'(t) \Delta t + \xi_i''(t) (\Delta t)^2 / 2 + \xi_i'''(t) \cdot (\Delta t)^3 / 6 + \xi_i^{(IV)}(t) (\Delta t)^4 / 24$$

с остаточным членом порядка $(\Delta t)^5$. По формулам численного дифференцирования

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \xi_i''(t) &= F_{\xi_i}(t) \\ \xi_i'''(t) &= F_{\xi_i}'(t) = [F_{\xi_i}(t - 2\Delta t) - 4F_{\xi_i}(t - \Delta t) + \\ &+ 3F_{\xi_i}(t)] (2\Delta t)^{-1} \\ \xi_i^{(IV)}(t) &= F_{\xi_i}''(t) = [F_{\xi_i}(t - 2\Delta t) - 2F_{\xi_i}(t - \Delta t) + \\ &+ F_{\xi_i}(t)] (\Delta t)^{-2} \end{aligned}$$

Подставляя (2.3) в (2.2) получаем

$$(2.4) \quad \xi_i(t + \Delta t) = \xi_i(t) + \xi_i'(t) \Delta t + 1/4 (\Delta t)^2 [19/6 F_{\xi_i}(t) - 5/3 F_{\xi_i}(t - \Delta t) + 1/2 F_{\xi_i}(t - 2\Delta t)]$$

Аналогично вычисляется $\eta_i(t + \Delta t)$. Фаза φ_i находится по формуле (1.5); значения интеграла $\Phi(\xi)$ предварительно табулируются для всей области взаимодействия, так что $\Phi[\xi_i(t)]$ на каждом шаге вычисляется интерполированием по таблице. В области дрейфа $\xi < \xi_0$ полагается $\Phi(\xi) = 0$.

Для вычисления координат, скоростей и фазы частицы в момент времени $t + \Delta t$ необходимо иметь для каждой частицы 11 величин ($\xi(t)$, $\xi'(t)$, ..., $F_{\alpha}(t - 2\Delta t)$). Емкость оперативной памяти на ЭВМ среднего класса позволяет сохранять эти величины для нескольких сотен частиц.

На первых двух шагах моделирования («разгон») вместо метода Адамса используется метод Эйлера для скоростей

$$(2.5) \quad \xi_i'(t + \Delta t) = \xi_i'(t) + F_{\xi_i}(t) \Delta t$$

(аналогично для $\eta_i'(t + \Delta t)$ и $\alpha(t + \Delta t)$) и степенные ряды

$$(2.6) \quad \xi_i(t + \Delta t) = \xi_i(t) + \xi_i'(t) \Delta t + F_{\xi_i}(t) (\Delta t)^2 / 2$$

для координат (аналогично для $\eta_i(t + \Delta t)$).

Для вычисления функции влияния (1.11) строится сеточная область по трем переменным ($\eta_i, \eta_j, \kappa_{ij}$). Перед началом моделирования составляются таблицы значений S_p ($p = 0, 1$) в узлах сетки. По κ (1.12) шаг сетки $\Delta \kappa$ выбирается постоянным и таким, чтобы весь сгусток был покрыт сеткой

$$(2.7) \quad \kappa_{ij} = x_{ij} \Delta \kappa \quad (0 \leq x_{ij} \leq N_{\kappa})$$

где N_{κ} — количество узлов сетки по переменной κ . По радиусу целесообразно выбрать сетку, шаг которой возрастает с удалением от оси. Это позволяет иметь больше узлов и точнее вычислять поле в области, занимаемой пучком, так как пучок обычно сконцентрирован вблизи оси системы. Поэтому узлы по радиусу выбираются с единичным шагом по переменной y , связанной с η соотношением

$$(2.8) \quad \eta = (b / \lambda) (e^{k_y y} - 1) (e^{k_y N_n} - 1)^{-1} \quad (0 \leq y \leq N_n)$$

где N_n — количество узлов сетки по y . Значению $y = 0$ соответствует ось трубы, значению $y = N_n$ — внутренний радиус диафрагмы b . Расстояние между соседними узлами по переменной η согласно (2.8) возрастает пропорционально $\exp(k_y y)$. Изменяя параметр k_y , можно менять степень неравномерности сетки.

Таблицы функций влияния составляются практически по переменным y_i, y_j, x_{ij} в узлах $y_i, y_j = 0, 1, 2, \dots, N_n; x_{ij} = 0, 1, 2, \dots, N_{\kappa}$. Поскольку функция S_0 симметрична относительно η_i, η_j , таблица $S_0(y_i, y_j, x_{ij})$ составляется лишь для значений $y_i \geq y_j$. При $x_{ij} = 0$ полагается $S_0(y_i, y_j, 0) = 0$, а $S_1(y_i, y_j, 0) = S_1(y_i, y_j, 1)$. Общее количество узлов в таблицах S_0 и S_1 — порядка $1.5 (N_n + 1)^2 (N_{\kappa} + 1)$.

В ходе моделирования по координатам η_i, η_j вычисляются y_i, y_j по формуле (2.8) и x_{ij} — по (2.7). Значения функций влияния S_p , входящие в (1.9), в точках y_i, y_j, x_{ij} находятся с помощью линейной интерполяции по составленным таблицам

$$(2.9) \quad S_p(\eta_i, \eta_j, \kappa_{ij}) = S_p(y_i, y_j, x_{ij}) = S_p(y_i^{(0)}, y_j^{(0)}, x_{ij}^{(0)}) + \Delta S_p \\ \Delta S_p = \frac{\partial S_p}{\partial y_i} (y_i - y_i^{(0)}) + \frac{\partial S_p}{\partial y_j} (y_j - y_j^{(0)}) + \frac{\partial S_p}{\partial x_{ij}} (x_{ij} - x_{ij}^{(0)}) \\ p = (0; 1)$$

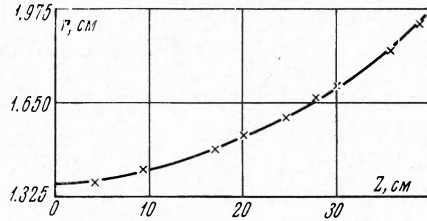
где верхний индекс (0) обозначает целую часть числа, а производные представляют собой разность функций влияния в узлах, соседних по соответствующей переменной, так как расстояние между соседними узлами $\Delta y_i^{(0)} = \Delta y_j^{(0)} = \Delta x_{ij}^{(0)} = 1$. Для значений $x_{ij}^{(0)} > N_x$ функции $S_p(\eta_i, \eta_j, \kappa_{ij})$ полагаются равными нулю.

Большую часть вычислений по формулам (1.9), (2.9) можно выполнить предварительно, поэтому требующееся количество операций резко уменьшается. Это позволяет на ЭВМ среднего класса получить приемлемое время моделирования для практически важных режимов.

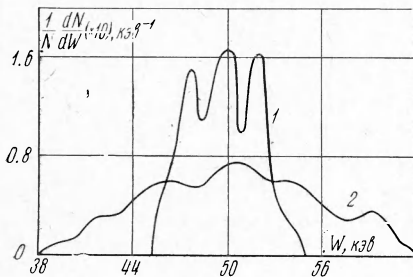
3. Время счета одного шага на ЭВМ типа М-220 возрастает от 27 сек при $n = 100$ до 432 сек при $n = 400$. На фиг. 1—3 представлены результаты моделирования. Инжектировался моноэнергетический сгусток с начальной кинетической энергией частиц W_0 и постоянной объемной плотностью заряда ρ . Для фиг. 1 начальный радиус пучка составлял 1.37 см, а для фиг. 2 и 3 — 1 см. Для равномерно заряженного пучка

$$(3.1) \quad \rho = Men / (\pi \eta_m^2 \xi_m \lambda^3)$$

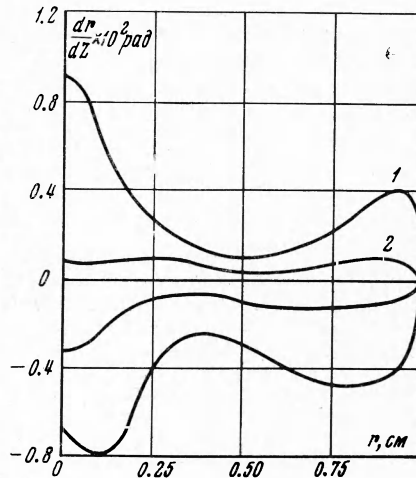
где ξ_m, η_m — безразмерные длина и максимальный радиус сгустка. Счи-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

талось, что во всей области взаимодействия $B_{w,\xi}(\xi) = \text{const}$.

На фиг. 1 показано увеличение радиуса $r = \lambda \eta_m$ протонного пучка под действием сил объемного заряда в ходе дрейфа в свободном пространстве в направлении оси. Для этого случая $W_0 = 700$ кэв, $\rho = 0.56 \cdot 10^{-4}$ к/м³, $n = 50$, параметры сетки: $k_y = 0.25$, $N_\eta = 13$, $N_x = 25$. На фиг. 1 сплошная кривая рассчитана по аналитической формуле, приведенной в монографии [7], крестиками нанесены результаты численного эксперимента. Расхождение не превышает 1%.

На фиг. 2 изображена плотность распределения dN/dW числа частиц $N(W)$ по энергии W после прохождения области дрейфа длиной 4.5 см; начальная энергия $W_0 = 50$ кэв, фокусирующее магнитное поле $B_\xi = 3.522$, $\rho = 4.1 \cdot 10^{-4}$ к/м³ для кривой 1 и $1.4 \cdot 10^{-3}$ к/м³ для кривой 2. Вследствие ускорения «головных» и замедления «хвостовых» частиц сгустка в первоначально моноэнергетическом сгустке появляется разброс энергий. С увеличением плотности заряда энергетический спектр расширяется. Сопоставление кривых 1 и 2 (фиг. 2) показывает, что воз-

растание плотности объемного заряда в 3 раза вызывает увеличение абсолютного энергетического разброса с 9 до 24 кэВ.

Силы кулоновского расталкивания существенно влияют на поперечное движение частиц. Удобной характеристикой радиальной расходимости пучка является величина

$$\sigma = \iint d\eta d\eta_{\xi}, \quad \eta_{\xi} \equiv d\eta/d\xi$$

На фиг. 3 кривые 1 и 2 ограничивают области, занятые представляющими точками частиц сгустка¹, прошедшего область дрейфа длиной 5 см; $\rho = 1.4 \cdot 10^{-3}$ к/м³, $B_{\xi} = 3.522$, $W_0 = 50$ кэВ для кривой 1 и 200 кэВ для кривой 2. Видно, что возрастание начальной энергии частиц W_0 в 4 раза приводит к уменьшению площади области, занятой представляющими точками частиц сгустка, т. е. величины σ , примерно в 3.5 раза. Это объясняется убыванием сил кулоновского расталкивания с ростом энергии частиц.

Рассматривалось влияние объемного заряда на группировку частиц в СВЧ электромагнитных полях. Внешнее ВЧ поле задавалось параметрами $E_m(\xi) = \text{const} = 2.97$, $\beta_w(\xi) = \text{const} = 1$. Инжектировался сгусток с начальной фазовой протяженностью $\Delta\varphi = 0.12\pi$ рад и энергией $W_0 = 125$ кэВ. В процессе возрастания энергии сгустка до 1 МэВ продольное кулоновское расталкивание привело к увеличению фазовой протяженности сгустка до 0.18π для начальной объемной плотности заряда $\rho = 4.5 \cdot 10^{-3}$ к/м³ и до 0.22π для $\rho = 7.5 \cdot 10^{-3}$ к/м³.

Поступила 29 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломнев С. П. Расчет и исследование электрофизических установок и электрофизических явлений на цифровых вычислительных машинах. М., ВЦ АН СССР, 1965.
2. Енальский В. А., Осипов В. В. О моделировании на ЭЦВМ ускорительного процесса в сильноточном ионном линейном ускорителе. ПМТФ, 1967, № 5.
3. Petersen G. W., Gallagher W. J. An analysis of travelling-wave prebunchers. IEEE Trans. Nucl. Sci., 1969, vol. 16, No. 3, pt 1.
4. Williams C. B., Mac-Gregor M. H. Space charge effects in high current linear electron accelerator injection systems. IEEE Trans. Nucl. Sci., 1967, vol. 14, No. 3.
5. Benton A., Chasman R., Agritellis C. Computer calculations of effect of space charge on longitudinal beam dynamics in proton linear accelerators. IEEE Trans. Nucl. Sci., 1967, vol. 14, No. 3.
6. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. М., «Наука», 1966.
7. Молоковский С. И., Сушков А. Д. Интенсивные электронные и ионные пучки. Л., «Энергия», 1972.
8. Капчинский И. М. Динамика частиц в линейных резонансных ускорителях. М., Атомиздат, 1966.

¹ Термин «представляющие точки частиц сгустка» введен в работе [8] и означает представление частиц сгустка в координатах фазового пространства $\{r, dr/dz\}$.