Физика горения и взрыва

4
1973 г.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 536.46

ПЕРЕХОДНОЙ ПРОЦЕСС ПРИ ГОРЕНИИ КОНДЕНСИРОВАННОГО ВЕЩЕСТВА

Ю. И. БАБЕНКО

(Ленинград)

На основе метода [1] найдено точное решение одной задачи теории нестационарного горения, исследованной ранее с применением машинной техники [2].

Рассмотрим нестационарный процесс, возникающий при скачкообразном повышении давления, который описывается задачей работы [2]:

$$\left[\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-\omega(\tau)\frac{\partial}{\partial\xi}\right]\vartheta=0,\ 0\leqslant\xi<\infty,\ 0<\tau<\infty, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}=[(\omega\eta\pi^{-\nu}-1)^2-1]\,\pi^{\nu}/(2\eta-\eta^2), \tag{2}$$

$$\pi=1,\quad \omega=1,\quad \vartheta=e^{-\xi},\quad \tau=0, \tag{3}$$

$$\vartheta(0,\tau)=1,\ \vartheta(\infty,\tau)=0. \tag{4}$$

Обозначения [2]: $\pi=p/p_0$ — безразмерное давление, $\omega=u/u_0$ — безразмерная скорость, $\vartheta=(T-T_0)(T_1-T_0)$ — безразмерная температура, $\xi=xu_0/\varkappa$ — безразмерная координата, $\tau=tu_0^2/\varkappa$ — безразмерное время, $\eta=2(1+\alpha T_0)/(1+\alpha T_1)$ — постоянная величина, $\varkappa$ — коэффициент температуропроводности.

Требуется найти нестационарную скорость горения $\omega=\omega(\tau)$ при скачкообразном изменении давления от p_0 до p_1, т. е. $\pi(\tau>0)=\pi_1$.

Чтобы сделать начальные условия нулевыми, введем новую переменную

$$\lambda=\vartheta-e^{-\xi}.$$

Тогда из (1) — (4) получаем задачу:

$$\left[\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-\omega(\tau)\frac{\partial}{\partial\xi}\right]\lambda=e^{-\xi}(1-\omega), \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}-1=[(\omega\eta\pi^{-\nu}-1)^2-1]\,\pi^{\nu}/(2\eta-\eta^2), \tag{6}$$

$$\pi=1,\qquad \omega=1,\qquad \vartheta=0,\qquad \tau=0,$$

$$\lambda=(0,\tau)=0,\qquad \lambda(\infty,\tau)=0.$$

С помощью приема, изложенного в [1], уравнение (5) можно записать в виде

$$\left[\frac{\partial^{1/2}}{\partial\tau^{1/2}}-\frac{\omega}{2}+\frac{\omega^2}{8}\cdot\frac{\partial^{-1/2}}{\partial\tau^{-1/2}}-\frac{\omega}{8}\cdot\frac{\partial^{-1}}{\partial\tau^{-1}}+\ldots-\frac{\partial}{\partial\xi}\right]\left[\frac{\partial^{1/2}}{\partial\tau^{1/2}}+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega^2}{8}\cdot\frac{\partial^{-1/2}}{\partial\tau^{-1/2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\omega}{8}\cdot\frac{\partial^{-1}}{\partial\tau^{-1}}+\ldots+\frac{\partial}{\partial\xi}\right]\lambda=e^{-\xi}(1-\omega). \tag{9}$$

Здесь использованы операторы дробного дифференцирования, определенные выражениями

$$\frac{d^{\nu}f(\tau)}{d\tau^{\nu}}=\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\frac{d}{d\tau}\int_0^{\tau}(\tau-z)^{-\nu}f(z)\,dz,\quad \nu<1.$$

Основные свойства:

$$\frac{d^{\nu}}{d\tau^{\nu}}\frac{d^{\mu}}{d\tau^{\mu}}f(\tau)=\frac{d^{\nu+\mu}}{d\tau^{\nu+\mu}}f(\tau),\quad \nu+\mu\leqslant 1,$$

$$\frac{d^{\nu}}{d\tau^{\nu}}f(\tau)\,g(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\nu}{n}\frac{d^{n}f}{d\tau^{n}}\,\frac{d^{\nu-n}g}{d\tau^{\nu-n}}.$$

Здесь f и g — произвольные функции. Из (9) можно получить уравнение

$$\left[\frac{\partial^{1/2}}{\partial\tau^{1/2}}+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega^2}{8}\frac{\partial^{-1/2}}{\partial\tau^{-1/2}}-\frac{\omega}{8}\frac{\partial^{-1}}{\partial\tau^{-1}}+\ldots+\frac{\partial}{\partial\xi}\right]\lambda=L\,(1-\omega)\,e^{-\xi}, \tag{10}$$

где оператор L определен так, что

$$\left[\frac{\partial^{1/2}}{\partial\tau^{1/2}}-\frac{\omega}{2}+\frac{\omega^2}{8}\frac{\partial^{-1/2}}{\partial\tau^{-1/2}}-\frac{\omega}{8}\frac{\partial^{-1}}{\partial\tau^{-1}}+\ldots-\frac{\partial}{\partial\xi}\right]L=1.$$

Можно показать, что решения (10) являются и решениями (5) и, кроме того, всегда удовлетворяют условию ограниченности при $\xi\to\infty$. Решения (10) всегда удовлетворяют также нулевым начальным условиям для $\xi>0$, что следует из свойств дробного дифференцирования. Граничное условие при $\xi=0$ всегда может быть удовлетворено, так как (10) — уравнение первого порядка по ξ. Таким образом, вместо задачи (5) — (8) можно рассматривать задачу (10), (6) — (8).

Найдем явный вид оператора L, полагая

$$L=\sum_{n=0}^{\infty}D_n\frac{\partial^{-(1+n)/2}}{\partial\tau^{-(1+n)/2}}.$$

Здесь D_n — операторы, зависящие от $\partial^{\nu}/\partial\tau^{\nu}$ ($\nu\leqslant n$) и τ. Явный вид D_n определится из операторного уравнения

$$\left[\frac{\partial^{1/2}}{\partial\tau^{1/2}}-\frac{\omega}{2}+\frac{\omega^2}{8}\frac{\partial^{-1/2}}{\partial\tau^{-1/2}}-\frac{\omega}{8}\frac{\partial^{-1}}{\partial\tau^{-1}}+\ldots-\frac{\partial}{\partial\xi}\right]\sum_{n=0}^{\infty}D_n\frac{\partial^{-(1+n)/2}}{\partial\tau^{-(1+n)/2}}=1.$$

При умножении операторов в последнем равенстве следует использовать правила, которые вытекают из свойств дробного дифференцирования:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial^{\nu}}{\partial\tau^{\nu}}=\frac{\partial^{\nu}}{\partial\tau^{\nu}}\frac{\partial}{\partial\xi},\quad \frac{\partial}{\partial\xi}D_n=D_n\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial D_n}{\partial\xi},$$

$$\frac{\partial^{\nu}D_n}{\partial\tau^{\nu}}=\sum_{p=0}^{\infty}\binom{\nu}{p}\frac{\partial^{p}D_n}{\partial\tau^{p}}\frac{\partial^{\nu-p}}{\partial\tau^{\nu-p}}$$

($\partial/\partial\xi$ следует считать независимым от τ). Приравнивая операторы при одинаковых показателях производных по времени $\partial^{-(1+n)/2}/\partial\tau^{-(1+n)/2}$, получим систему операторных рекуррентных соотношений для D_n:

$$D_0=1,$$

$$-\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\partial}{\partial\xi}\right)+D_1=0,$$

$$\frac{\omega^2}{8}-\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\partial}{\partial\xi}\right)D_1+D_2=0,$$

$$-\frac{\omega}{8}+\frac{\omega^2}{8}D_1-\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\partial}{\partial\xi}\right)D_2+D_3+\frac{1}{2}\frac{\partial D_1}{\partial\tau}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Отсюда найдем D_n, а следовательно, и L в виде

$$L=\frac{\partial^{-1/2}}{\partial\tau^{-1/2}}+\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\frac{\partial^{-1}}{\partial\tau^{-1}}+\left(\frac{\omega^2}{8}+\omega\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right)\frac{\partial^{-3/2}}{\partial\tau^{-3/2}}+$$

$$+\left(-\frac{\omega}{8}+\frac{\omega^2}{8}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{3}{2}\omega\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}\right)\frac{\partial^{-2}}{\partial\tau^{-2}}+\ldots$$

Уравнение (10) справедливо для всех $\xi\geqslant 0$, поэтому, записывая его при $\xi=0$, найдем

$$\left.\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}=\frac{\partial^{-1/2}}{\partial\tau^{-1/2}}(1-\omega)+\left(\frac{\omega}{2}-1\right)\frac{\partial^{-1}}{\partial\tau^{-1}}(1-\omega)+\left(\frac{\omega^2}{8}-\omega+1\right)\frac{\partial^{-3/2}}{\partial\tau^{-3/2}}(1-\omega)-$$

$$-\left(\frac{\omega}{8}+\frac{\omega^2}{8}-\frac{3}{2}\omega+1\right)\frac{\partial^{-2}}{\partial\tau^{-2}}(1-\omega)+\ldots. \qquad (11)$$

Исключая из (11) $(\partial\lambda/\partial\xi)_{\xi=0}$ с помощью (6), получим выражение, связывающее скорость горения $\omega(\tau)$ с давлением π

$$[(\omega^2\eta\pi^{-\nu}-2\omega)/(2-\eta)]+1=\frac{\partial^{-1/2}}{\partial\tau^{-1/2}}(1-\omega)+\left(\frac{\omega}{2}-1\right)\frac{\partial^{-1}}{\partial\tau^{-1}}(1-\omega)+$$

$$+\left(\frac{\omega^2}{8}-\omega+1\right)\frac{\partial^{-3/2}}{\partial\tau^{-3/2}}-\left(\frac{\omega}{8}+\frac{\omega^2}{8}-\frac{3}{2}\omega+1\right)\frac{\partial^{-2}}{\partial\tau^{-2}}(1-\omega)+\ldots. \qquad (12)$$

Рассмотрим скачкообразное изменение давления от $\pi=1$ до $\pi=\pi_1$. Решение может быть найдено в виде ряда

$$\omega=C_0+C_1\tau^{1/2}+C_2\tau+C_3\tau^{3/2}+\ldots \qquad (13)$$

Подставляя (13) в (12), учитывая, что

$$\frac{d^\nu\tau^\mu}{d\tau^\nu}=\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1-\nu)}\tau^{\mu-\nu}, \qquad \mu-\nu\geqslant-1,$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, найдем

$$C_0=\left\{1+\left[1-(2\eta-\eta^2)\pi_1^{-\nu}\right]^{1/2}\right\}(\pi_1^{\nu}/\eta),$$

$$C_1=(1-C_0)(2-\eta)(\eta\pi_1^{-\nu}C_0-1)^{-1}\cdot\Gamma^{-1}(1/2),$$

$$C_2=\left[(1-C_0)(C_0-2)-\Gamma(1/2)C_1-2\eta\pi_1^{-\nu}(2-\nu)^{-1}C_1^2\right](2-\eta)(\eta\pi_1^{-\nu}C_0-1)^{-1},$$

$$C_3=[-\Gamma(5/2)C_2-2\eta(2-\eta)^{-1}C_1C_2+(109-13C_0)(C_1/96+$$

$$+\Gamma(5/2)(1-C_0)(1-C_0+(C_0^2/8))](1-(\eta/2))(\eta\pi_1^{-\nu}C_0-1)^{-1}+\ldots.$$

Проведя расчет величины $\omega/\omega_1=\omega\pi_1^{-\nu}$ по формуле (13) для примера, рассмотренного в [2]. Для $\eta=1{,}15$, $\pi_1=2$; 10; 50; 200 соответственно получаем

$$\omega/\omega_1=1{,}41-0{,}60\tau^{1/2}-0{,}033\tau-0{,}134\tau^{3/2}-\ldots,$$

$$\omega/\omega_1=1{,}64-0{,}77\tau^{1/2}-1{,}98\tau-2{,}54\tau^{3/2}-\ldots,$$

$$\omega/\omega_1=1{,}71-0{,}81\tau^{1/2}-7{,}75\tau-32{,}3\tau^{3/2}-\ldots,$$

$$\omega/\omega_1=1{,}73-0{,}83\tau^{1/2}-51{,}5\tau-204\tau^{3/2}-\ldots$$

Полученное решение может быть применено для изучения начальной стадии переходного процесса. Ряды, по-видимому, имеют асимптотический характер, поэтому вычисления следует обрывать на минимальном члене. Из сравнения с результатами, приведенными на рис. 2 работы [2], можно заключить следующее. Расхождение результатов тем меньше, чем меньше τ. Относительное отклонение менее 10% для $\pi_1=2$; 10; 50; 200 имеется в интервалах $\tau<0{,}6$; 0,15; 0,12; 0,05 соответственно. В работе [2] изучено поведение ω/ω_1 для $\tau<0{,}6$. Таким образом, в данном примере аналитический метод удобнее численного для относительно небольших перепадов давлений ($\pi_1<2$), так как дает возможность построить решение в большем интервале времени.

Поступила в редакцию
18/XII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Бабенко. В сб. «Горение и взрыв». М., «Наука», 1972.
2. Б. В. Новожилов. ПМТФ, 1962, 5.