

Подгруппа H_8 . Эта подгруппа отличается от подгруппы H_6 добавлением оператора X_2 . Инварианты

$$I_1 = \lambda = \frac{(x_1 - x_2)^{k+1/2}}{(x_1 + x_2)^{k-1/2}}, \quad I_2 = (u_1 + \sqrt{u_1^2 + 1})^{1-2k} (x_1 - x_2)$$

$$I_3 = P(\lambda) = (u_1 + \sqrt{u_1^2 + 1})/p, \quad I_4 = R(\lambda) = p/n, \quad k = 1/2 \alpha$$

также приводят к системе (S/H) , которые интегрируются аналогично случаю подгрупп H_6 и H_7 . Решение в общем виде имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{P}{P_0} &= y^{A_1} \left[y + \frac{(1+2k)}{(1-2k)} \right]^{A_2} (y - \alpha_1)^{A_3} (y - \alpha_2)^{A_4} (y - \beta_1)^{A_5} (y - \beta_2)^{A_6} \\ \frac{R}{R_0} &= y^{B_1} \left[y + \frac{(1+2k)}{(1-2k)} \right]^{B_2} \left[y - \frac{(1+2k)}{(1-2k)} \right]^{B_3} \left[y + \frac{(\gamma-1)(1+2k)}{(2\gamma+1)(1-2k)} \right]^{B_4} \times \\ &\times (y - \alpha_1)^{B_5} (y - \alpha_2)^{B_6} (y - \beta_1)^{B_7} (y - \beta_2)^{B_8} \\ \lambda / c_1 &= (y - a)^{E_1} (y - c)^{E_2} (y + c)^{E_3} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Здесь все постоянные зависят от k и γ .

Таким образом, за исключением всех подгрупп, где отсутствует оператор X_2 , политропическая зависимость между плотностью и давлением не имеет места. В настоящее время наибольший интерес представляет подгруппа H_6 , так как энтропия здесь сохраняется, и поэтому полученные решения могут быть применены, например, к гидродинамической теории множественного образования частиц [4-6].

Поступила 4 XI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Группы и инвариантно-групповые решения дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР, 1958, т. 118, № 3.
2. Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности. Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 3.
3. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
4. Халатников И. М. Некоторые вопросы релятивистской гидродинамики. ЖЭТФ, 1954, т. 27, вып. 5 (11).
5. Ландау Л. Д. О множественном образовании частиц при столкновениях быстрых частиц. Изв. АН СССР, Сер. физ., 1953, т. 17, № 1.

БИНАРНЫЙ ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ СОВМЕСТНОЙ СВОБОДНОЙ И ВЫНУЖДЕННОЙ КОНВЕКЦИИ

П. М. Брдлик, В. И. Дубовик

(Москва)

Рассматривается тепло-массообмен на вертикальной поверхности при совместной свободной и вынужденной конвекции. Преобразованные к обыкновенным дифференциальным уравнения пограничного слоя содержат параметр, который определяет влияние свободной конвекции на вынужденное движение. Для подразделения характера движения на чисто свободную, чисто вынужденную конвекцию и совместный режим движения даются критерии.

Обозначения

x, y — координаты,	τ_w — касательное напряжение на стенке,
u, v — составляющие скорости,	λ — коэффициент теплопроводности,
g — ускорение силы тяжести,	r — скрытая теплота фазового превращения,
T — температура,	θ, φ — безразмерные температура и парциальная плотность пара,
ν — кинематическая вязкость,	m^* — комплекс $(m_{1\infty} - m_{1w}) / (1 - m_{1w})$,
β — коэффициент термического расширения,	c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении,
a — коэффициент температуропроводности,	G — число Грасгофа,
ρ_1 — парциальная плотность пара,	R — число Рейнольдса,
D — коэффициент диффузии,	P — число Прандтля,
W_2 — весовая скорость воздуха,	S — число Шмидта
η — независимая переменная	

$$G = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)x^3}{\nu^2}, \quad R = \frac{U_\infty x}{\nu}, \quad P = \frac{\nu}{a}, \quad S = \frac{\nu}{D}$$

Индексы w — значения на поверхности, ∞ — значения на большом удалении от поверхности, 1 — пар, 2 — воздух.

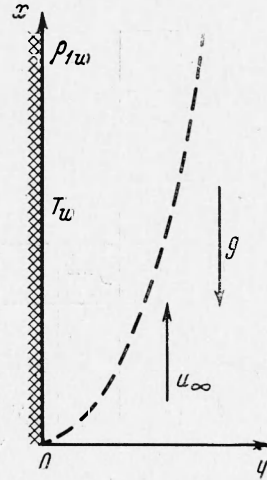
Рассмотрим (фиг. 1) вертикальную пластину с постоянной температурой T_w и парциальной плотностью компоненты 1 ρ_{1w} , находящуюся в потоке бинарной смеси текущей со скоростью U_∞ вдоль пластины в направлении действия подъемных сил.

Дифференциальные уравнения ламинарного несжимаемого пограничного слоя в пренебрежении вязкой диссипацией и без учета термодиффузии, диффузионной теплопроводности, а также в предположении $c_{p1} = c_{p2}$ и постоянства физических параметров для вертикальной пластины запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty) \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad u \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + v \frac{\partial \rho_1}{\partial y} = D \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (1)$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} u = 0, \quad v = v_w, \quad T = T_w, \quad \rho_1 = \rho_{1w} \quad \text{при } y = 0 \\ u = U_\infty, \quad T = T_\infty, \quad \rho_1 = \rho_{1\infty} \quad \text{при } y = \infty \end{aligned} \quad (2)$$



Фиг. 1

Допускаем также, что скорость конденсирующейся жидкости на стенке и ее термическое сопротивление ничтожно малы по сравнению со скоростью в невозмущенном потоке и термическим сопротивлением пограничного слоя. Кроме того, в уравнении движения опущен член подъемной силы, возникающей за счет разности концентраций.

Сведем систему (1) к обыкновенным дифференциальным уравнениям путем введения независимой переменной η и функции тока ψ

$$\eta = y \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{1/2}, \quad \Psi = (U_\infty \nu x)^{1/2} f(\eta) \quad \left(u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \quad (3)$$

В новых переменных имеем

$$u = U_\infty f'(\eta), \quad v = -\frac{1}{2} \left(\frac{U_\infty \nu}{x} \right)^{1/2} [f(\eta) - \eta f'(\eta)] \quad (4)$$

Тогда вместо системы (1) получаем

$$\begin{aligned} f'''(\eta) + \frac{1}{2} f(\eta) f''(\eta) + \frac{G}{R^2} \theta(\eta) &= 0 \\ \theta''(\eta) + \frac{1}{2} P f(\eta) \theta'(\eta) &= 0, \quad \varphi''(\eta) + \frac{1}{2} S f(\eta) \varphi'(\eta) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad \varphi(\eta) = \frac{\rho_1 - \rho_{1\infty}}{\rho_{1w} - \rho_{1\infty}}$$

В преобразованных уравнениях появляется параметр $G/R^2 = A$, который не зависит от η . При равенстве этого параметра нулю уравнения (5) превращаются в уравнения для вынужденной конвекции; при больших значениях A , очевидно, преобладающим будет процесс свободной конвекции. Штрих означает дифференцирование по η .

Граничные условия (2) для системы (5) в новых переменных будут такими:

$$\begin{aligned} f'(0) = 0, \quad f_w = \text{const}, \quad \theta = 1, \quad \varphi = 1 \quad \text{при } \eta = 0 \\ f'(\infty) = 1, \quad \theta = 0, \quad \varphi = 0 \quad \text{при } \eta = \infty \end{aligned} \quad (6)$$

Граничное условие $f_w = \text{const}$ означает, что

$$v_w = -\frac{1}{2} f_w \left(\frac{U_\infty \nu}{x} \right)^{1/2}, \quad \text{т. е. } v_w \sim x^{-1/2}$$

Указанное ограничение не сказывается на общности тех выводов, которые делаются в данной работе. Как показано в [1,2], закон изменения v_w при свободной и вынуж-

денной конвекции оказывает сравнительно слабое влияние на изменение характеристик пограничного слоя и локального коэффициента теплообмена. В большинстве случаев закон $v_w \sim x^{-1/2}$ согласуется с условием постоянства температуры и массосодержания на поверхности. Весовые скорости воздуха и пара на поверхности пластины

$$\begin{aligned} W_{2w} &= -D \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial y} \right)_{y=0} - v_w \rho_{2w} = 0 \\ W_{1w} &= -D \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial y} \right)_{y=0} - v_w \rho_{1w} \end{aligned} \quad (7)$$

что дает

$$v_w = - \frac{D}{\rho_{2w}} \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial y} \right)_{y=0} = - \frac{D}{1 - m_{1w}} \left(\frac{\partial m_1}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (8)$$

так как

$$m_1 + m_2 = 1, \quad m_1 = \rho_1 / \rho, \quad m_2 = \rho_2 / \rho$$

и следовательно:

$$W_{1w} = -\rho D \frac{1}{1 - m_{1w}} \left(\frac{\partial m_1}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (9)$$

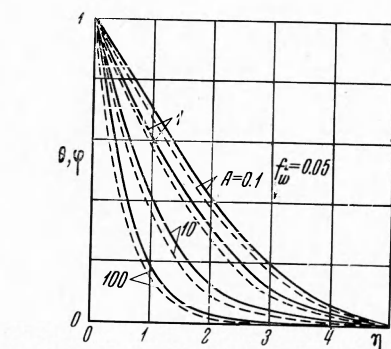
Из соотношений (3), (6), (8) и (9) находим, что

$$f_w' = - \frac{2}{S} \frac{m_{1\infty} - m_{1w}}{1 - m_{1w}} \varphi'(0) \quad (10)$$

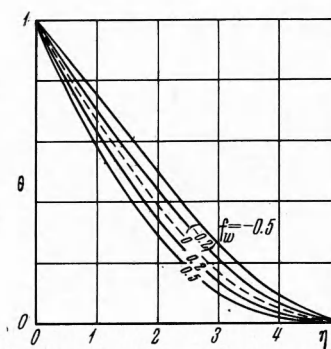
где m_{1w} — массосодержание пара на поверхности.

Нелинейная система (5) с граничными условиями (6) решалась на электронной вычислительной машине М-20 методом итераций с применением прогонки [3,4]. За нулевое приближение для $f(\eta)$ было взято решение Блазиуса [5].

В результате проведенных расчетов получены профили скорости, температуры и распределение парциальной плотности компоненты 1 в пограничном слое (фиг. 2, 3, 4) для смешанной свободной и вынужденной конвекции для чисел $P = 0.72$, $S = 0.6$ и



Фиг. 3



Фиг. 4

параметра A , равного 0.1, 1, 10, 100 при $f_w = 0.05$. На фиг. 4 в качестве примера показано влияние потока массы на профиль температуры для $A = 0.1$. Сплошные линии на фиг. 3 представляют распределение плотности компоненты 1, а пунктирные — распределение температуры.

Задача для случая $f_w = 0$, но без учета фазовых превращений решалась А. Шевчиком [6]. В этом случае данные настоящей работы совпадают с результатами [6].

Местное поверхностное трение на стенке определяется выражением

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} - \rho v_w U_\infty \quad (11)$$

Из соотношения (4) получаем, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = U_\infty \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{1/2} f''(0)$$

Тогда из (11) имеем

$$\tau_w = \mu \frac{U_\infty^2}{\nu^2} \frac{f''(0)}{R^{1/2}} + \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \frac{f_w(0)}{R^{1/2}}$$

или в безразмерном виде

$$\frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2} = \frac{f''(0)}{R^{1/2}} + \frac{1}{2} \frac{f_w(0)}{R^{1/2}} \quad (12)$$

Полный тепловой поток (с учетом теплоты фазового перехода), отводимый через стенку, рассчитывается по формуле

$$q_w^* = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \pm \frac{r \rho D}{1 - m_{1w}} \left(\frac{\partial m_1}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (13)$$

причем для испарения берем знак плюс, для конденсации — минус.

Тогда коэффициент теплоотдачи (с учетом теплоты фазового перехода)

$$\alpha^* = \frac{q_w^*}{T_w - T_\infty} = -\lambda R^{1/2} x^{-1} \left\{ \theta'(0) \pm \frac{P}{S} \frac{r m^*}{c_p (T_w - T_\infty)} \Phi'(0) \right\} \quad (14)$$

или

$$N = \frac{\alpha^* x}{\lambda} = -R^{1/2} \left\{ \theta'(0) \pm \frac{P}{S} \frac{r m^*}{c_p (T_w - T_\infty)} \Phi'(0) \right\} \quad (15)$$

Первый член, стоящий в фигурной скобке, дает конвективную составляющую теплового потока. Аналогично для потока массы

$$i_1 = -\rho D \left(\frac{\partial m_1}{\partial y} \right)_{y=0} = -\rho D \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{1/2} (m_{1w} - m_{1\infty}) \Phi'(0)$$

или коэффициент массоотдачи

$$\alpha_m = \frac{i_1}{\rho (m_{1w} - m_{1\infty})} = -D R^{1/2} x^{-1} \Phi'(0) \quad (16)$$

и, следовательно, число Нуссельта для массообмена будет

$$N_D = \frac{\alpha_m x}{D} = -R^{1/2} \Phi'(0) \quad (17)$$

Условия, при которых процесс теплоотдачи можно рассматривать либо как поток только свободной, либо как только вынужденной конвекции, могут быть определены из сравнения численного расчета с результатами расчета теплоотдачи для чисто вынужденной и чисто свободной конвекций при $P = 0.72$ по уравнениям

$$\frac{N}{R^{1/2}} = 0.297, \quad \frac{N}{R^{1/2}} = -\frac{\theta'(0)}{\sqrt{2}} \left(\frac{G}{R^2} \right)^{1/4} \quad (18)$$

Первое соотношение из (18) получено по результатам данной работы и совпадает с данными других авторов [1], а второе соотношение (18) получено из результатов работы [7].

Если принять [8], что теплообмен при чисто вынужденной или чисто свободной конвекции отличается от (18) не более чем на 5%, тогда граница этих течений может быть определена из условий

$$\begin{array}{ll} 0 < A < 0.095 & \text{— вынужденная конвекция} \\ 0.095 < A < 16 & \text{— совместная конвекция} \\ 16 < A & \text{— свободная конвекция} \end{array}$$

Аналогично из известных выражений [5,7]

$$\frac{1}{2} C_f R^{1/2} = 0.328, \quad \frac{1}{2} C_f R^{1/2} = \sqrt{2} f''(0) \left(\frac{G}{R^2} \right)^{3/4} \quad (19)$$

можно получить границы режимов течения для расчета поверхностного трения

$$\begin{array}{ll} 0 < A < 0.015 & \text{— вынужденная конвекция} \\ 0.015 < A < 16 & \text{— совместная конвекция} \\ 16 < A & \text{— свободная конвекция} \end{array}$$

Свободная и вынужденная конвекции совпадают по направлению

f_w	$\theta'(0)$ $P = 0.72$	$S = 0.6$		$S = 0.9$	
		$\varphi'(0)$	m^*	$\varphi'(0)$	m^*
$A = 0.1$					
0.06	-0.3295	-0.3105	0.0579	-0.3561	0.0758
0.04	-0.3246	-0.3064	0.0391	-0.3499	0.0514
0.02	-0.3198	-0.3024	0.0198	-0.3439	0.0263
0.0	-0.3149	-0.2984	0.0	-0.3380	0.0
-0.02	-0.3102	-0.2944	-0.0203	-0.3319	-0.0271
-0.04	-0.3454	-0.2904	-0.0413	-0.3259	-0.0552
-0.06	-0.3006	-0.2864	-0.0628	-0.3201	-0.0343
$A = 1$					
0.06	-0.4125	-0.3835	0.0469	-0.4518	0.0597
0.04	-0.4082	-0.3799	0.0316	-0.4464	0.0403
0.02	-0.4039	-0.3764	0.0159	-0.4409	0.0204
0.0	-0.3998	-0.3730	0.0	-0.4359	0.0
-0.02	-0.3956	-0.3696	-0.0162	-0.4306	-0.0209
-0.04	-0.3913	-0.3660	-0.0361	-0.4252	-0.0423
-0.06	-0.3871	-0.3625	-0.0480	-0.4199	-0.0643
$A = 10$					
0.06	-0.6393	-0.5881	0.0306	-0.7064	0.0382
0.04	-0.6354	-0.5849	0.0205	-0.7014	0.0256
0.02	-0.6315	-0.5815	0.0103	-0.6964	0.0129
0.0	-0.6277	-0.5786	0.0	-0.6916	0.0
-0.02	-0.6235	-0.5754	-0.0104	-0.6866	-0.0132
-0.04	-0.6201	-0.5722	-0.0209	-0.6817	-0.0264
-0.06	-0.6162	-0.5681	-0.0316	-0.6768	-0.0399
$A = 100$					
0.06	-1.0756	-0.9376	0.0182	-1.1889	0.0227
0.04	-1.0716	-0.9344	0.0122	-1.1837	0.0152
0.02	-1.0679	-0.9313	0.0061	-1.1788	0.0076
0.0	-1.0641	-0.9783	0.0	-1.1741	0.0
-0.02	-1.0603	-0.9751	-0.0061	-1.1692	-0.0077
-0.04	-1.0564	-0.9720	-0.0123	-1.1643	-0.0154
-0.06	-1.0526	-0.9689	-0.0186	-1.1594	-0.0233

Свободная и вынужденная конвекции противоположны по направлению

$A = 0.25$					
0.06	-0.2162	-0.2138	0.0341	-0.2199	0.1224
0.04	-0.2133	-0.2114	0.0567	-0.2162	0.0933
0.02	-0.2104	-0.2090	0.0237	-0.2124	0.0424
0.0	-0.2076	-0.2067	0.0	-0.2090	0.0
-0.02	-0.2047	-0.2043	-0.0294	-0.2053	-0.0434
-0.04	-0.2019	-0.2019	-0.0594	-0.2018	-0.0891
-0.06	-0.1991	-0.1996	-0.0902	-0.1982	-0.1361
$A = 1$					
0.06	-0.3037	-0.2904	0.0320	-0.3359	0.0804
0.04	-0.3054	-0.2878	0.0417	-0.3317	0.0543
0.02	-0.3021	-0.2852	0.0211	-0.3275	0.0275
0.0	-0.2939	-0.2825	0.0	-0.3235	0.0
-0.02	-0.2959	-0.2801	-0.0214	-0.3193	-0.0282
-0.04	-0.2927	-0.2775	-0.0433	-0.3152	-0.0571
-0.06	-0.2895	-0.2749	-0.0655	-0.3111	-0.0868

Продолжение таблицы

 $A = 10$

0.03	-0.5849	-0.5311	0.0339	-0.6562	0.0412
0.04	-0.5814	-0.5282	0.0227	-0.6515	0.0276
0.02	-0.5778	-0.5253	0.0114	-0.6468	0.0139
0.0	-0.5742	-0.5224	0.0	-0.6421	0.0
-0.02	-0.5706	-0.5195	-0.0115	-0.6375	-0.0141
-0.04	-0.5671	-0.5167	-0.0232	-0.6328	-0.0284
-0.06	-0.5635	-0.5138	-0.0350	-0.6282	-0.0429

 $A = 100$

0.06	-1.0470	-0.9552	0.0188	-1.1636	0.0232
0.04	-1.0432	-0.9528	0.0126	-1.1587	0.0155
0.02	-1.0395	-0.9492	0.0063	-1.1539	0.0078
0	-1.0358	-0.9462	0.0	-1.1492	0.0
-0.02	-1.0332	-0.9432	-0.0064	-1.1445	-0.0079
-0.04	-1.0284	-0.9402	-0.0128	-1.1397	-0.0158
-0.06	-1.0247	-0.9372	-0.0192	-1.1348	-0.0240

Сделанные выводы относительно положения трех характерных режимов движения сохраняются и для случая, когда $f_w \neq 0$.

После изучения динамических и тепловых характеристик пограничного слоя перейдем к рассмотрению задачи о массообмене при совместном действии свободной и вынужденной конвекций. В таблице приведены $\theta'(0)$, $\phi'(0)$ и m^* для различных значений параметра A при значениях $P = 0.72$, $S = 0.9$ и 0.6 как для конденсации, так и для испарения. Для $f_w > 0$ имеем конденсацию, а при $f_w < 0$ испарение с вертикальной поверхности.

Расчеты проведены также и для случая, когда вынужденное движение не совпадает с направлением движения свободной конвекции и имеет противоположное направление. В этом случае в граничных условиях (6) при $\eta = \infty$ имеем $f'(\infty) = -1$, а остальные условия не изменяются. Система уравнений (5) также остается без изменений.

Для процесса, характеризующегося противоположными направлениями свободной и вынужденной конвекций, справедливыми остаются выражения (12), (15) и (17) для поверхностного трения и локальных чисел Нуссельта.

Поступила 22 V 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Эккерт Э. Р., Дрейк Р. М. Теория тепло- и массообмена. М.—Л., Госэнергоиздат, 1961.
2. Брдлик П. М., Мочалов В. А. Экспериментальное изучение свободной конвекции с пористым вдувом и отсосом на вертикальной поверхности. Инж.-физ. ж., 1966, № 1, т. 10.
3. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. М., Физматгиз, 1959, т. 2.
4. Брдлик П. М., Мочалов В. А., Дубовик В. И. Ламинарная свободная конвекция на вертикальной поверхности, осложненная конденсацией или испарением. Научн. тр. научно-исслед. ин-та строит. физ. Госстроя СССР, 1967, вып. 2.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
6. Szewczyk A. A. Combined forced and free — convection laminar flow. Trans. ASME, Ser. C, J. Heat Transfer, 1964, No. 4. (Рус. перев.: Теплопередача, тр. Америк. о-ва инж. механ., Сер. С, 1964, № 4.)
7. Ostrach S. An Analysis of laminar free convection flow and heat transfer about a flat plate parallel to the direction of the generating body force. NACA, TR 1111, 1953.
8. Sparrow E. M., Eichhorn R., Gregg J. L. Combined Forced and Free Convection in a Boundary Layer Flow. Phys. Fluids. 1959, vol. 2. No. 3.