ПМТФ, № 1, 1964

К КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН

В. П. Силин

(*Москва*)

Из работ но теории разнотемиературной плазмы вытекает, что ионно-звуковые колебания существенно изменяют коэффициенты переноса при достаточно большом отношении температур электронов и ионов.

Для заметного проявления плазменных колебаний необходима не слишком малая величина их амплитуды. В случае ионно-звуковых колебаний, рассмотренных в работах [1-4], относительно большая величина амплитуды обусловлена большим отношением температур электронов и ионов. С другой стороны, амплитуда плазменных колебаний может оказаться не малой в условиях, когда согласно линейной теории можно говорить о неустойчивости плазмы. Во всех таких условиях необходимо выяснить роль нелинейных эффектов. При этом, с одной стороны, нелинейные эффекты связаны с изменением распределения частиц плазмы [5,6], а с другой — нелинейные эффекты связаны с процессами превращения одних плазменных колебаний в другие [7,9].

Ниже выводятся уравнения, описывающие нелинейное взаимодействие колебаний плазмы с кулоновским взаимодействием, для которого не возникает вопроса о самодействии и связанных с ним расходимостях. В основу рассмотрения положено статистическое описание, использующее коррелятивные функции частиц плазмы.

1. В качестве исходного для описания систем частиц с кулоновским взаимодействием используем уравнение Лиувилля, из которого легко можно получить цепочку уравнений для функции распределения f_α, парной коррелятивной функции $g_{\alpha\beta}$ и т. д. Ограничимся здесь случаем пространственно однородного распределения. Тогда удобно воспользоваться разложением Фурье

$$g_{\alpha\beta} = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k};\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta} G_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$$

При этом для функции G может быть записано уравнение

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta)\right] G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) - i\frac{4\pi e_\alpha e_\beta}{k^2}\left(\mathbf{k}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\alpha} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\beta}\right) f_\alpha f_\beta =$$
$$= i\frac{4\pi}{k^2}\left(\mathbf{k}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha}\right) h_\beta(-\mathbf{k}) - i\frac{4\pi}{k^2}\left(\mathbf{k}\frac{\partial f_\beta}{\partial \mathbf{p}_\beta}\right) h_\alpha(\mathbf{k}) + i\int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\frac{4\pi}{(k')^2}\mathbf{k}' \times$$
$$\times \left\{e_\beta \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\beta} D_{\alpha\beta}(-\mathbf{k}', \mathbf{k}+\mathbf{k}', -\mathbf{k}) - e_\alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\alpha} D_{\alpha\beta}(\mathbf{k}', \mathbf{k}, -\mathbf{k}-\mathbf{k}') - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\alpha} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\beta}\right) e_\alpha e_\beta G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\right\} \qquad (1.1)$$

Здесь

$$h_\alpha(\mathbf{k}) = \sum_\beta e_\beta n_\beta \int d\mathbf{p}_\beta G_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$$

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', -\mathbf{k}-\mathbf{k}') = \sum_\gamma e_\gamma n_\gamma \int d\mathbf{p}_\gamma D_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', -\mathbf{k}-\mathbf{k}')$$

где e_γ — заряд, n_γ — число частиц сорта γ в единице объема, наконец,

$D_{\alpha\beta\gamma}$ — фурье-компонента трехчастичной функции распределения $d_{\alpha\beta\gamma}$:

$$d_{\alpha\beta\gamma}=\int\frac{d\mathbf{k}d\mathbf{k}'}{(2\pi)^6}\exp\left[i\left(\mathbf{k}+\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}_\alpha\right)-i\mathbf{k}'\mathbf{r}_\beta-i\mathbf{k}\mathbf{r}_\gamma\right]D_{\alpha\beta\gamma}\left(\mathbf{k},\mathbf{k}',-\mathbf{k}-\mathbf{k}'\right)$$

Введем функцию

$$H(\omega,\mathbf{k})=\sum_\alpha e_\alpha n_\alpha\int d\mathbf{p}_\alpha\frac{h_\alpha(\mathbf{k})}{\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha}$$

После несложных преобразований (ср., например, [10,11]) из формулы (1.1) получаем

$$2\pi i w(\omega,\mathbf{k})\equiv-\frac{4\pi}{k^2}\left[\frac{H(\omega+i0,\mathbf{k})-F(\omega+i0,\mathbf{k})}{\varepsilon(\omega+i0,\mathbf{k})}+\frac{H(-\omega+i0,\mathbf{k})-F(-\omega+i0,-\mathbf{k})}{\varepsilon(\omega-i0,\mathbf{k})}\right]=$$

$$=\frac{4\pi/k^2}{\varepsilon(\omega+i0,\mathbf{k})\,\varepsilon(\omega-i0,\mathbf{k})}\Big\{2\pi i\sum_\alpha e_\alpha^2 n_\alpha\int d\mathbf{p}_\alpha f_\alpha\delta\left(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha\right)-$$

$$-i\frac{\partial}{\partial t}\sum_\alpha e_\alpha n_\alpha\int d\mathbf{p}_\alpha\sum_\beta e_\beta n_\beta\int d\mathbf{p}_\beta\frac{G_{\alpha\beta}(\mathbf{k})}{\left(\omega-i0-\mathbf{k}\mathbf{v}_\beta\right)\left(\omega+i0-\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha\right)}+$$

$$+\sum_\alpha n_\alpha\int d\mathbf{p}_\alpha\int\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\frac{4\pi e_\alpha^2}{(k')^2}\left[\frac{1}{\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha+i0}\left(\mathbf{k}'\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}_\alpha}\right)\times\right.$$

$$\times\left(D_\alpha\left(\mathbf{k}',\mathbf{k},-\mathbf{k}-\mathbf{k}',\omega-i0\right)-\sum_\beta e_\beta^2 n_\beta\int d\mathbf{p}_\beta\frac{G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')}{\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_\beta-i0}\right)+$$

$$+\frac{1}{\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha-i0}\left(\mathbf{k}'\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}_\alpha}\right)\Big(D_\alpha\left(-\mathbf{k}',-\mathbf{k},\mathbf{k}+\mathbf{k}',-\omega-i0\right)+$$

$$\left.+\sum_\beta e_\beta^2 n_\beta\int d\mathbf{p}_\beta\frac{G_{\alpha\beta}(-\mathbf{k}-\mathbf{k}')}{\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_\beta+i0}\Big)\right]\Big\}\tag{1.2}$$

Здесь

$$\varepsilon(\omega,\mathbf{k})=1+\sum_\alpha\frac{4\pi}{k^2}n_\alpha e_\alpha^2\int d\mathbf{p}_\alpha\frac{1}{\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha}\left(\mathbf{k}\frac{\partial f_\alpha}{\partial\mathbf{p}_\alpha}\right)$$

$$F(-\omega,-\mathbf{k})=\sum_\alpha n_\alpha e_\alpha^2\int d\mathbf{p}_\alpha\frac{1}{\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha}f_\alpha$$

$$D_\alpha\left(\mathbf{k}',\mathbf{k},-\mathbf{k}-\mathbf{k}',\omega\right)=\sum_\beta e_\beta n_\beta\int d\mathbf{p}_\beta\frac{1}{\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_\beta}D_{\alpha\beta}\left(\mathbf{k}',\mathbf{k},-\mathbf{k}-\mathbf{k}'\right)$$

Функция D_α определяется уравнением для трехчастичной коррелятивной функции (см. ниже Приложение); для нее, в частности, получается следующее выражение

$$\frac{D_\alpha\left(\mathbf{k}',\mathbf{k},-\mathbf{k}-\mathbf{k}',\omega\right)}{\varepsilon(\omega,\mathbf{k})}=\frac{1}{\pi}\int\frac{d\omega'}{\omega-\omega'}\sum_\mu e_\mu n_\mu\int d\mathbf{p}_\mu\sum_\nu e_\nu n_\nu\int d\mathbf{p}_\nu\times\tag{1.3}$$

$$\times\operatorname{Im}\left[\frac{1}{\varepsilon(\omega'+i0,\mathbf{k})}\frac{1}{\omega'+i0-\mathbf{k}\mathbf{v}_\nu}\right]\left\{\frac{F_{\alpha\mu\nu}\left(\mathbf{k},\mathbf{k}',-\mathbf{k}-\mathbf{k}'\right)}{\omega'+i0-\left(\mathbf{k}+\mathbf{k}'\cdot\mathbf{v}_\alpha\right)+\mathbf{k}'\mathbf{v}_\mu}\times\right.$$

$$\times\frac{1}{\varepsilon\left(-\omega'-i0-\left(\mathbf{k}+\mathbf{k}'\cdot\mathbf{v}_\alpha\right),\mathbf{k}'\right)}+\frac{4\pi e_\alpha}{(\mathbf{k}'+\mathbf{k})^2}\left(\mathbf{k}+\mathbf{k}'\cdot\frac{\partial f_\alpha}{\partial\mathbf{p}_\alpha}\right)\frac{1}{\pi}\times$$

$$\times\int\frac{d\omega''}{\omega'+\omega''+i0-\left(\mathbf{k}+\mathbf{k}'\cdot\mathbf{v}_\alpha\right)}\frac{1}{\varepsilon\left(\omega'+\omega''+i0,\mathbf{k}+\mathbf{k}'\right)}\times$$

$$\left.\times\sum_\lambda e_\lambda n_\lambda\int d\mathbf{p}_\lambda\frac{F_{\lambda\mu\nu}\left(\mathbf{k},\mathbf{k}',-\mathbf{k}-\mathbf{k}'\right)}{\omega'+\omega''+i0-\left(\mathbf{k}+\mathbf{k}'\cdot\mathbf{v}_\lambda\right)}\operatorname{Im}\left[\frac{1}{\varepsilon(\omega''+i0,\mathbf{k}')}\frac{1}{\omega''+i0-\mathbf{k}'\mathbf{v}_\mu}\right]\right\}$$

где

$$F_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', -\mathbf{k}-\mathbf{k}') = \frac{4\pi e_\alpha}{(\mathbf{k}+\mathbf{k}')^2}\left(\mathbf{k}+\mathbf{k}'\cdot\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha}\right)[e_\gamma G_{\gamma\beta}(\mathbf{k}') + e_\beta G_{\beta\gamma}(\mathbf{k})] -$$
$$-\frac{4\pi e_\gamma}{k^2}\left(\mathbf{k}\frac{\partial f_\gamma}{\partial \mathbf{p}_\gamma}\right)[e_\alpha G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}') + e_\beta G_{\beta\alpha}(-\mathbf{k}-\mathbf{k}')] - \frac{4\pi e_\beta}{(k')^2}\left(\mathbf{k}'\frac{\partial f_\beta}{\partial \mathbf{p}_\beta}\right)\times$$
$$\times[e_\gamma G_{\gamma\alpha}(-\mathbf{k}-\mathbf{k}') + e_\alpha G_{\alpha\gamma}(\mathbf{k})] + [e_\gamma f_\gamma + h_\gamma(-\mathbf{k})]\frac{4\pi}{k^2}\mathbf{k}\left[e_\alpha\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\alpha}G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}')+\right.$$
$$\left.+e_\beta\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\beta}G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\right] + [e_\beta f_\beta + h_\beta(-\mathbf{k}')]\frac{4\pi}{(k')^2}\mathbf{k}'\left[e_\alpha\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\alpha}G_{\alpha\gamma}(\mathbf{k})+\right.$$
$$\left.+e_\gamma\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\gamma}G_{\alpha\gamma}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\right] - [e_\alpha f_\alpha + h_\alpha(\mathbf{k}+\mathbf{k}')]\frac{4\pi}{(\mathbf{k}+\mathbf{k}')^2}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\left[e_\beta\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\beta}G_{\beta\gamma}(\mathbf{k})+\right.$$
$$\left.+e_\gamma\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\gamma}G_{\gamma\beta}(\mathbf{k}')\right] \qquad (1.4)$$

Заметим, что, согласно формуле (1.3), трехчастичная коррелятивная функция меньше двухчастичной. Поэтому для ее определения можно воспользоваться выражением парной коррелятивной функции, пренебрегая тройными корреляциями. Далее будем считать, что парная коррелятивная функция во времени изменяется достаточно медленно. Именно, характерные частоты такого изменения малы по сравнению с теми значениями ω, для которых $w(\omega, \mathbf{k})$ существенно отлично от нуля. Для случая слабозатухающих колебаний это фактически всегда выполняется. Тогда пренебрегая тройными корреляциями и изменением парной коррелятивной функции во времени получаем приближенное выражение для двухчастичной коррелятивной функции

$$G_{\alpha\beta}{}^{\circ}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi}{k^2}e_\alpha e_\beta\left\{\left(\mathbf{k}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha}\right)\left(\mathbf{k}\frac{\partial f_\beta}{\partial \mathbf{p}_\beta}\right)\int\frac{d\omega w(\omega, \mathbf{k})}{(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha+i0)(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_\beta-i0)}\right\}+$$
$$+\frac{1}{(\mathbf{k};\mathbf{v}_\alpha-\mathbf{v}_\beta)-i0}\frac{4\pi e_\alpha e_\beta}{k^2}\left\{\left(\mathbf{k}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha}\right)\frac{f_\beta}{\varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v}_\beta+i0, \mathbf{k})} - \left(\mathbf{k}\frac{\partial f_\beta}{\partial \mathbf{p}_\beta}\right)\frac{f_\alpha}{\varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha-i0, \mathbf{k})}\right\} \qquad (1.5)$$

Правую часть уравнения (1.2) при помощи формул (1.3), (1.4) и (1.5) выразим через функцию w; членами, не содержащими w и представляющими собой поправки к первому слагаемому фигурной скобки правой части уравнения (1.2), пренебрегаем; в результате получим

$$w(\omega, \mathbf{k}) + \frac{1}{\varepsilon(\omega+i0, \mathbf{k})\,\varepsilon(\omega-i0, \mathbf{k})}\left\{-\sum_\alpha e_\alpha{}^2 n_\alpha\frac{4\pi}{k^2}\int d\mathbf{p}_\alpha f_\alpha\delta(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{d\Omega}{2\pi}w(\Omega, \mathbf{k})\left|\frac{\varepsilon(\Omega+i0, \mathbf{k})-\varepsilon(\omega+i0, \mathbf{k})}{\Omega-\omega}\right|^2\right\} = \qquad (1.6)$$
$$=\int\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\left\{\int\frac{d\Omega d\Omega'}{2\pi i}w(\Omega, \mathbf{k})\,w(\Omega', \mathbf{k}')\,a(\omega, \mathbf{k}, \Omega, \mathbf{k}', \Omega')+\right.$$
$$\left.+\int\frac{d\Omega' d\Omega}{2\pi i}w(\Omega', \mathbf{k}')\,w(\Omega'', \mathbf{k}+\mathbf{k}')\,b(\omega, \mathbf{k}, \Omega', \mathbf{k}', \Omega'')+\int\frac{d\Omega}{2\pi i}w(\Omega, \mathbf{k})\right\}$$
$$A(\omega, \mathbf{k}, \Omega, \mathbf{k}') + \int\frac{d\Omega'}{2\pi i}w(\Omega', \mathbf{k}')\,B(\omega, \mathbf{k}, \Omega', \mathbf{k}')$$

Здесь

$$a(\omega, \mathbf{k}, \Omega, \mathbf{k}', \Omega') = 2i\,\mathrm{Im}\frac{4\pi}{k^2}\frac{4\pi}{(k')^2}\int\frac{d\omega'}{2\pi i}\frac{d\omega''}{2\pi i}\frac{1}{\omega-\omega'+i0}\frac{1}{\omega'-\Omega-i0}\times$$
$$\times\frac{1}{\omega''-\Omega'-i0}\frac{1}{\varepsilon(\omega-i0, \mathbf{k})}\frac{\varepsilon(\Omega+i0, \mathbf{k})}{\varepsilon(\omega'+i0, \mathbf{k})}\frac{\varepsilon(\Omega'+i0, \mathbf{k})}{\varepsilon(\omega''+i0, \mathbf{k}')}\left\{\frac{1}{\varepsilon(\omega'+\omega''-i0, \mathbf{k}+\mathbf{k}')}\times\right.$$

$$\times \frac{4\pi}{(\mathbf{k}+\mathbf{k}')^2}\,[\mathbf{k}\boldsymbol{\eta}(\omega'+\omega''-i0,\mathbf{k}+\mathbf{k}',\,\Omega'-i0,\mathbf{k}')+$$
$$+\mathbf{k}'\eta(\omega'+\omega''-i0,\mathbf{k}+\mathbf{k}',\,\Omega-i0,\mathbf{k})]\times$$
$$\times\,[\mathbf{k}'\boldsymbol{\eta}(\omega-i0,\mathbf{k},\omega'+\omega''-i0,\mathbf{k}+\mathbf{k}')-$$
$$-(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\,\eta(\omega-i0,\mathbf{k},\omega''+i0,\mathbf{k}')]-$$
$$-k_i'k_j\chi_{ij}(\omega-i0,\mathbf{k},\omega'+\omega''-i0,\mathbf{k}+\mathbf{k}',\,\Omega'-i0,\mathbf{k}')-$$
$$-k_i'k_j'\chi_{ij}(\omega-i0,\mathbf{k},\omega'+\omega''-i0,\mathbf{k}+\mathbf{k}',\,\Omega-i0,\mathbf{k})\Big\}$$

$$b(\omega,\mathbf{k},\Omega',\mathbf{k}',\Omega'')=2i\,\mathrm{Im}\,\frac{4\pi}{k^2}\frac{4\pi}{(k')^2}\frac{4\pi}{(\mathbf{k}+\mathbf{k}')^2}\int\frac{d\omega'}{2\pi i}\frac{d\omega''}{2\pi i}\frac{1}{\omega-\omega'+i0}\times$$
$$\times\frac{1}{\omega''-\Omega'-i0}\,\frac{1}{\omega'+\omega''-\Omega''-i0}\,\frac{1}{\varepsilon(\omega-i0,\mathbf{k})}\,\frac{\varepsilon(\Omega'+i0,\mathbf{k}')}{\varepsilon(\omega''+i0,\mathbf{k}')}\,\frac{1}{\varepsilon(\omega'+i0,\mathbf{k})}\times$$
$$\times\,[\mathbf{k}'\boldsymbol{\eta}(\omega'+i0,\mathbf{k},\Omega''+i0,\mathbf{k}+\mathbf{k}')-(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\,\boldsymbol{\eta}(\omega'+i0,\mathbf{k},\Omega'-i0,\mathbf{k}')]$$
$$\Big\{\frac{\varepsilon(\Omega''-i0,\mathbf{k}+\mathbf{k}')}{\varepsilon(\omega'+\omega''-i0,\mathbf{k}+\mathbf{k}')}\,\mathbf{k}'\eta(\omega-i0,\mathbf{k},\omega'+\omega''-i0,\mathbf{k}+\mathbf{k}')-$$
$$-\mathbf{k}'\eta(\omega-i0,\mathbf{k},\Omega''-i0,\mathbf{k}+\mathbf{k}')\Big\}$$

где

$$\eta(\omega,\mathbf{k},\omega',\mathbf{k}')=\sum_\alpha e_\alpha^3 n_\alpha\int d\mathbf{p}_\alpha\frac{1}{\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}_\alpha}\frac{1}{\omega'-\mathbf{k}'\mathbf{v}_\alpha}\left(\mathbf{k}'\frac{\partial f_\alpha}{\partial\mathbf{p}_\alpha}\right)$$

$$\chi_{ij}(\omega,\mathbf{k},\omega',\mathbf{k}',\omega'',\mathbf{k}'')=$$
$$=\sum_\alpha e_\alpha^4 n_\alpha\int d\mathbf{p}_\alpha\frac{1}{\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha}\frac{\partial}{\partial p_{\alpha i}}\frac{1}{\omega'-\mathbf{k}'\mathbf{v}_\alpha}\frac{\partial}{\partial p_{\alpha j}}\frac{1}{\omega''-\mathbf{k}''\mathbf{v}_\alpha}\left(\mathbf{k}''\frac{\partial f_\alpha}{\partial\mathbf{p}_\alpha}\right)$$

Явные выражения функций A и B здесь не приводятся.

2. Уравнение (1.6) описывает флуктуации в плазме. Если мнимая часть $\varepsilon(\omega,\mathbf{k})$ не мала, то правая часть (1.6) мало существенна. О колебаниях плазмы реально можно говорить лишь при сравнительно слабом поглощении. Очевидно, что при слабом поглощении $w(\omega,\mathbf{k})$ имеет резкий максимум в окрестности точки $\mathrm{Re}\,\varepsilon(\omega+i0,\mathbf{k})\equiv\varepsilon'(\omega,\mathbf{k})=0$.

Ниже будем всюду считать, что ω лежит в окрестности такой точки. Тогда левая часть формулы (1.6) может быть представлена в виде

$$w(\omega,\mathbf{k})+\frac{\pi\,\mathrm{sgn}\,\omega}{\varepsilon''(\omega,\mathbf{k})}\,\delta\,[\varepsilon'(\omega,\mathbf{k})]\Big\{-\sum_\alpha\frac{4\pi e_\alpha^2}{k^2}\int d\mathbf{p}_\alpha n_\alpha f_\alpha\,\delta(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{d\Omega}{2\pi}\,w(\Omega,\mathbf{k})\,\delta_{\omega,\Omega}\left[\frac{\partial\varepsilon'(\omega,\mathbf{k})}{\partial\omega}\right]^2\Big\}\qquad(\varepsilon''(\omega,\mathbf{k})\equiv\mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega+i0,\mathbf{k}))\qquad(2.1)$$

При этом мнимая часть диэлектрической проницаемости полагается малой. Будем считать $w(\omega,\mathbf{k})\sim\delta\,[\varepsilon'(\omega,\mathbf{k})]$. Это соответствует наличию колебаний плазмы лишь в области прозрачности. Такая зависимость от частоты возникает и из формулы (2.1).

В дальнейшем используем следующие положения. Во-первых, рассматривая δ-образную зависимость w как результат предельного перехода $\varepsilon''=0$, будем считать, что особенности $w(\omega,\mathbf{k})$ в плоскости комплексного переменного ω таковы же, как и у функции $[\varepsilon(\omega+i0,\mathbf{k})\,\varepsilon(\omega-i0,\mathbf{k})]^{-1}$. При этом, например, будем считать, что функция $\varepsilon(\omega+i0,\mathbf{k})\,w(\omega,\mathbf{k})$ не обладает особенностями в нижней полуплоскости ω. В действительности такая функция в этой полуплоскости может обладать особенностями. Однако возникающий от таких особенностей вклад соответствует не колебаниям, а хаотическому движению частиц плазмы, что аналогично особенностям (а не нулям) диэлектрической проницаемости. Во-вторых, в последующих формулах мнимую часть диэлектрической проницаемости $\varepsilon''(\omega, \mathbf{k})$ будем считать равной нулю везде, где это не будет приводить к особенностям. Тогда нелинейные по w члены формулы (1.6) можно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{\varepsilon''(\omega, \mathbf{k})} \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \left\{ \int \frac{d\omega'\, d\omega''}{2\pi} w(\omega', \mathbf{k})\, w(\omega'', \mathbf{k}')\, a_0(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}', \omega'') + \right. \\ \left. + \int \frac{d\Omega'' d\omega''}{2\pi} w(\Omega'', \mathbf{k} + \mathbf{k}')\, w(\omega'', \mathbf{k}')\, b_0(\omega, \mathbf{k}, \omega'', \mathbf{k}', \Omega'') \right\} \tag{2.2}$$

Здесь

$$a_0(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}', \omega) = 2\mathrm{Re} \frac{4\pi}{k^2} \frac{4\pi}{(k')^2} \frac{1}{\omega - \omega' + i0} \left\{ \frac{4\pi}{(\mathbf{k} + \mathbf{k}')^2} \frac{1}{\varepsilon(\omega' + \omega'' - i0, \mathbf{k} + \mathbf{k}')} \times \right. \\ \times [\mathbf{k}\eta(\omega' + \omega'' - i0, \mathbf{k} + \mathbf{k}', \omega'' - i0, \mathbf{k}') + \\ + \mathbf{k}'\eta(\omega' + \omega'' - i0, \mathbf{k} + \mathbf{k}', \omega' - i0, \mathbf{k})] \times \\ \times [\mathbf{k}'\eta(\omega - i0, \mathbf{k}, \omega' + \omega'' - i0, \mathbf{k} + \mathbf{k}') - \\ - (\mathbf{k} + \mathbf{k}')\eta(\omega - i0, \mathbf{k}, \omega'' + i0, \mathbf{k}')] - \\ - k_i' k_j \chi_{ij}(\omega - i0, \mathbf{k}, \omega' + \omega'' - i0, \mathbf{k} + \mathbf{k}', \omega'' - i0, \mathbf{k}') - \\ \left. - k_i' k_j' \chi_{ij}(\omega - i0, \mathbf{k}, \omega' + \omega'' - i0, \mathbf{k} + \mathbf{k}', \omega' - i0, \mathbf{k}) \right\}$$

$$b_0(\omega, \mathbf{k}, \omega'', \mathbf{k}', \Omega'') = 2\mathrm{Re} \frac{4\pi}{k^2} \frac{4\pi}{(k')^2} \frac{4\pi}{(\mathbf{k} + \mathbf{k}')^2} \frac{1}{2} \left\{ - i \frac{\mathrm{sgn}\, \omega \pi \delta[\varepsilon'(\omega, \mathbf{k})]}{\omega + \omega'' - \Omega'' - i0} \times \right. \\ \times |\mathbf{k}'\eta(\omega + i0, \mathbf{k}, \Omega'' + i0, \mathbf{k} + \mathbf{k}') - \\ - (\mathbf{k} + \mathbf{k}')\eta(\omega + i0, \mathbf{k}, \omega'' - i0, \mathbf{k}')|^2 - \\ - \frac{\mathbf{k}'\eta(\Omega'' - \omega'' + i0, \mathbf{k}, \Omega'' + i0, \mathbf{k} + \mathbf{k}') - (\mathbf{k} + \mathbf{k}')\eta(\Omega'' - \omega'' + i0, \mathbf{k}, \omega'' - i0, \mathbf{k}')}{(\omega + \omega'' - \Omega'' + i0)\, \varepsilon(\Omega'' - \omega'' + i0, \mathbf{k})} \times \\ \times [\mathbf{k}'\eta(\omega - i0, \mathbf{k}, \Omega'' - i0, \mathbf{k} + \mathbf{k}') - \\ \left. - (\mathbf{k} + \mathbf{k}')\eta(\omega - i0, \mathbf{k}, \omega'' + i0, \mathbf{k}')] \right\}$$

Из формул, определяющих a_0 и b_0, очевидно, что выражение (2.2) будет содержать как большие (сингулярные) слагаемые, отличные от нуля лишь в точке $\varepsilon'(\omega, \mathbf{k}) = 0$ (пропорциональные $\delta[\varepsilon'(\omega, \mathbf{k})]$ и $w(\omega, \mathbf{k})$), так и малые слагаемые (не сингулярные), отличающиеся от нуля в сравнительно широкой области частот. В области прозрачности существенны лишь сингулярные слагаемые. Удерживая лишь такие члены и используя выражения (2.1), (2.2), можно записать уравнение (1.6) (без учета линейных по w членов правой части) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} w(\omega, \mathbf{k}) \left| \frac{\partial \varepsilon'(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} \right| + 2\gamma(\omega, \mathbf{k})\, w(\omega, \mathbf{k}) \left| \frac{\partial \varepsilon'(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} \right| - 2\pi\delta[\varepsilon'(\omega, \mathbf{k})] \times \\ \times \sum_\alpha \frac{4\pi e_\alpha^2}{k^2} \int d\mathbf{p}_\alpha n_\alpha f_\alpha \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha) = \mathrm{sgn}\, \omega\, w(\omega, \mathbf{k}) \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} d\omega' w(\omega', \mathbf{k}') \frac{4\pi}{k^2} \frac{4\pi}{(k')^2} \times \\ \times 2\, \mathrm{Im} \sum_\alpha e_\alpha^4 n_\alpha \int d\mathbf{p}_\alpha \frac{1}{\omega + i0 - \mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha} \left(\mathbf{k}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\alpha} \right) \frac{1}{\omega + \omega' + i0 - (\mathbf{k} + \mathbf{k}', \mathbf{v}_\alpha)} \times \\ \times \left[\left(\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\alpha} \right) \frac{1}{\omega' + i0 - \mathbf{k}'\mathbf{v}_\alpha} \left(\mathbf{k}' \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha} \right) + \left(\mathbf{k}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\alpha} \right) \frac{1}{\omega + i0 - \mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha} \left(\mathbf{k} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha} \right) \right] + \\ + 2 \int \frac{d\mathbf{k}'\, d\mathbf{k}''}{(2\pi)^3} d\omega' d\omega''\, \delta(\omega + \omega' - \omega'')\, \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \left\{ 2w(\omega, \mathbf{k})\, w(\omega', \mathbf{k}') \times \right. \\ \times \mathrm{sgn}\, \omega\, \mathrm{Im} \left[\frac{1}{\varepsilon(\omega'' + i0, \mathbf{k}'')} S(\omega + i0, \mathbf{k}, \omega' + i0, \mathbf{k}', -\omega'' - i0, -\mathbf{k}'') \times \right. \\ \left. \times S(\omega + i0, \mathbf{k}, \omega' - i0, \mathbf{k}', -\omega'' - i0, -\mathbf{k}'') \right] + \pi\delta[\varepsilon'(\omega, \mathbf{k})]\, w(\omega', \mathbf{k}') \times \\ \left. \times w(\omega'', \mathbf{k}'')\, |S(\omega + i0, \mathbf{k}, \omega' - i0, \mathbf{k}', -\omega'' - i0, -\mathbf{k}'')|^2 \right\} \tag{2.3}$$

Здесь

$$\gamma(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\varepsilon''(\omega, \mathbf{k})\operatorname{sgn}\omega}{|\partial\varepsilon'(\omega, \mathbf{k})/\partial\omega|},$$

$$S(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}', -\omega'', -\mathbf{k}'') = \frac{2(2\pi)^{3/2}}{kk'k''}\{\mathbf{k}''\eta(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}') - \mathbf{k}'\eta(\omega, \mathbf{k}, \omega'', \mathbf{k}'')\} =$$

$$= \frac{(2\pi)^{3/2}}{kk'k''}\sum_{\alpha}\frac{e_\alpha^3}{m_\alpha^2}\int d\mathbf{p}_\alpha n_\alpha f_\alpha\left\{\frac{(k'')^4}{(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha)(\omega'-\mathbf{k}'\mathbf{v}_\alpha)(\omega''-\mathbf{k}''\mathbf{v}_\alpha)^2} - \right.$$

$$- \frac{(k')^4}{(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha)(\omega'-\mathbf{k}'\mathbf{v}_\alpha)^2(\omega''-\mathbf{k}''\mathbf{v}_\alpha)} - \frac{k^4}{(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha)^2(\omega'-\mathbf{k}'\mathbf{v}_\alpha)(\omega''-\mathbf{k}''\mathbf{v}_\alpha)} + \tag{2.4}$$

$$\left. + \frac{k^2(k'')^2}{(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha)^2(\omega''-\mathbf{k}''\mathbf{v}_\alpha)^2} + \frac{k^2(k')^2}{(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha)^2(\omega'-\mathbf{k}'\mathbf{v}_\alpha)^2} + \frac{(k'k'')^2}{(\omega'-\mathbf{k}'\mathbf{v}_\alpha)^2(\omega''-\mathbf{k}''\mathbf{v}_\alpha)^2}\right\}$$

Уравнение (2.3) не учитывает влияния линейных относительно w членов правой части уравнений (1.6). Учет таких членов часто оказывается возможным провести другим путем. Можно воспользоваться кинетическим уравнением для частиц плазмы, учитывающим столкновения, и вычислить при помощи такого уравнения вклад в мнимую часть диэлектрической проницаемости, обусловленный соударениями. Тем самым можно определить и вклад соударений в декремент затухания $\gamma(\omega, \mathbf{k})$. В принципе, могут оказаться возможными и такие случаи, когда такой путь не позволит с достаточной точностью учесть вклад линейных членов правой части уравнения (1.6). Однако пока такие случаи не рассматривались.

3. Уравнение (2.3) описывает изменение во времени интенсивности плазменного колебания, обусловленное нелинейным взаимодействием колебаний (правая часть уравнения), черенковским испусканием волн частицами плазмы (последнее слагаемое левой части) и черенковской диссипацией (второе слагаемое). Как сказано выше, для учета диссипации волн, обусловленной столкновениями между частицами плазмы (или, что во многом эквивалентно, обусловленной рассеянием волн на частицах), достаточно в качестве $\gamma(\omega, \mathbf{k})$ рассматривать декремент затухания волн, обусловленный не только обратным эффектом Черенкова, но также и столкновениями частиц.

Для прояснения физического смысла учитываемых уравнением (2.3) нелинейных взаимодействий колебаний рассмотрим некоторые частные возможности. Это особенно необходимо потому, что уравнение (2.3) по форме существенно отличается от кинетических уравнений для колебаний, используемых в теории твердого тела [13].

Простой физический смысл имеет вклад точек, в которых обращается в нуль диэлектрическая проницаемость, стоящая в знаменателе подынтегрального выражения правой части уравнения (2.3). При этом следует считать, что в окрестности такой точки мнимая часть диэлектрической проницаемости мала по сравнению с действительной, поскольку только тогда можно говорить о колебаниях плазмы. Пренебрегая мнимой частью S и учитывая лишь интеграл правой части (2.4), берущийся в смысле главного значения (который обозначен S_0), можно записать следующее выражение для такого вклада от точек прозрачности

$$-2\pi\int\frac{d\mathbf{k}'d\mathbf{k}''}{(2\pi)^3}d\omega' d\omega''\,\delta(\omega+\omega'-\omega'')\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'-\mathbf{k}'')\times$$

$$\times S_0^2(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}', -\omega'', -\mathbf{k}'')\times \tag{3.1}$$

$$\times\{\operatorname{sgn}\omega\, w(\omega, \mathbf{k})\, w(\omega', \mathbf{k}')\operatorname{sgn}\omega''\delta[\varepsilon'(\omega'', \mathbf{k}'')] -$$

$$-\operatorname{sgn}\omega\, w(\omega, \mathbf{k})\, w(\omega'', \mathbf{k}'')\operatorname{sgn}\omega'\delta[\varepsilon'(\omega', \mathbf{k}')] - w(\omega', \mathbf{k}')\, w(\omega'', \mathbf{k}'')\}$$

Это выражение, очевидно, определяет превращение одного плазменного колебания в два (и соответствующие обратные процессы), разрешенное условиями распада

$$\omega(\mathbf{k}'') = \omega(\mathbf{k}) + \omega(\mathbf{k}') \qquad (\mathbf{k}'' = \mathbf{k} + \mathbf{k}') \tag{3.2}$$

где $\omega(\mathbf{k})$ будет решением уравнения $\varepsilon'(\omega, \mathbf{k}) = 0$. Именно такие процессы Камак, Кантровитц, Литвак, Патрик и Петчек предложили в работе [7] (см. также [12]) использовать как диссипативные процессы, определяющие структуру ударных волн. Заметим, что обычно (см., например, [13]), выражение (3.2) записывается так, что интегрирование ведется лишь по положительным частотам. Легко убедиться, что в этом случае формула (3.1) может быть записана в виде

$$
\begin{gathered}
2\pi \int \frac{d\mathbf{k}'\, d\mathbf{k}''}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\omega' \int_0^\infty d\omega'' S_0^2 (\omega'', \mathbf{k}, \omega'' - \omega, \mathbf{k}'' - \mathbf{k}, -\omega'', -\mathbf{k}'') \times \\
\times [\delta (\omega - \omega' - \omega'')\, \delta (\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'')] \times \\
\times \{\delta [\varepsilon' (\omega, \mathbf{k})]\, w (\omega', \mathbf{k}')\, w (\omega'', \mathbf{k}'') - \delta [\varepsilon' (\omega', \mathbf{k}')]\, w (\omega, \mathbf{k})\, w (\omega'', \mathbf{k}'') - \\
- \delta[\varepsilon' (\omega'', \mathbf{k}'')]\, w (\omega, \mathbf{k})\, w (\omega', \mathbf{k}')\} + \\
+ 2\{\delta [\varepsilon' (\omega, \mathbf{k})]\, w (\omega', \mathbf{k}')\, w (\omega'', \mathbf{k}'') + \delta [\varepsilon' (\omega', \mathbf{k}')]\, w (\omega, \mathbf{k})\, w (\omega'', \mathbf{k}'') - \\
- \delta [\varepsilon' (\omega'', \mathbf{k}'')]\, w (\omega, \mathbf{k})\, w (\omega', \mathbf{k}')\} \times \\
\times \delta (\omega + \omega' - \omega'')\, \delta (\mathbf{k} + \mathbf{k}' - \mathbf{k}'')]
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

Из (2.3) следует, что кроме распадного диссипативного процесса имеются также другие. Рассмотрим, например, случай высокочастотных электронных ленгмюровских колебаний ($\omega^2 = 4\pi e^2 N_e / m + 3k^2 \varkappa T / m$) и соответствующий им диссипативный процесс, описываемый членами порядка e^4 правой части формулы (2.3). Функция $w (\omega, \mathbf{k})$ отлична от нуля вблизи $\omega \approx \pm \sqrt{4\pi e^2 N_e / m}$, поэтому наибольший вклад возникает от $\omega' \approx -\omega$. Соответствующий вклад в правую часть формулы (2.3) может быть представлен в виде

$$
\begin{gathered}
2\pi w (\omega, \mathbf{k}) \operatorname{sgn} \omega \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \int d\omega' w (\omega', \mathbf{k}') \left(\frac{4\pi e^2}{m} \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}'}{kk'}\right)^2 n_e \times \\
\times \int d\mathbf{p}\, \frac{\delta (\omega + \omega' - (\mathbf{k} + \mathbf{k}', \mathbf{v}))}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2 (\omega' - \mathbf{k}'\mathbf{v})^2} \left(\mathbf{k} + \mathbf{k}', \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{p}}\right)
\end{gathered}
\tag{3.4}
$$

Здесь учтен тот факт, что взаимодействие высокочастотных колебаний с электронами существенно превышает взаимодействие с ионами.

Выражение (3.4) описывает индуцированное рассеяние плазменных волн на электронах. Если в знаменателе подынтегрального выражения правой части формулы (3.4) принять $\mathbf{kv}$ малым по сравнению с ω, а также перейти к положительным частотам, то, пренебрегая слагаемым, содержащим $\delta\ (\omega + \omega' - (\mathbf{k} + \mathbf{k}', \mathbf{v}))$, имеем

$$
\begin{gathered}
2\pi w (\omega, \mathbf{k}) \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\omega' w (\omega', \mathbf{k}') \left(\frac{4\pi e^2}{m\omega\omega'} \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}'}{kk'}\right)^2 n_e \\
\int d\mathbf{p} \delta (\omega - \omega' - (\mathbf{k} - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v})) \left(\mathbf{k} - \mathbf{k}' \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{p}}\right) \left(1 + 4 \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}''}{k''^2} \frac{\omega''}{\omega} + \right. \\
\left. + 10 \left[\left(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}''}{\mathbf{k}''^2} \frac{\omega''}{\omega}\right)^2 + \frac{\varkappa T}{m} \frac{[\mathbf{k}\mathbf{k}']^2}{k''^2 \omega^2}\right] + 60 \frac{\varkappa T}{m} \frac{\omega''}{\omega^3} \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}''}{k''^4} [\mathbf{k}\mathbf{k}']^2\right)
\end{gathered}
\tag{3.5}
$$

$$(\omega'' = \omega - \omega',\ \mathbf{k}'' = \mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

Выражение (3.5) без малых членов в последнем множителе может быть получена из кинетического уравнения работы Матцуура и Огава [8], использовавших в качестве основы своего рассмотрения гамильтониан плазменных колебаний, полученный Бомом и Пайнсом в [14]. Выражение (3.5) является единственным нелинейным взаимодействием плазменных колебаний, которое возникает из результатов работы [8]. Это обусловлено тем, что работа [8] ограничивается рассмотрением лишь высокочастотных ленгмюровских электронных колебаний плазмы, а также приближением порядка e^4 по степеням заряда электрона.

Электронные ленгмюровские колебания не могут удовлетворять условиям распада (3.2). Однако это не означает, что члены e^6 всегда несущественны для нелинейного описания ленгмюровских колебаний. Напротив, как будет показано, можно сделать обратное утверждение. Действительно, для электронной плазмы (ниже вкладом ионов пренебрегаем), учитывая тот факт, что фазовая скорость ленгмюровских волн велика по сравнению с тепловой скоростью электронов, можно записать следующее приближенное выражение для членов порядка e^6 правой части уравнения (2.3)

$$2\pi w(\omega, \mathbf{k}) \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\omega' w(\omega', \mathbf{k}') \left\{ -1 + \frac{1}{[\varepsilon'(\omega-\omega', \mathbf{k}-\mathbf{k}')]^2} \times \right. \tag{3.6}$$

$$\times \left[\frac{\mathbf{k}^2\mathbf{k}'^2 - 2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')^2}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}'(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2} + 3\frac{[\mathbf{k}\mathbf{k}']^2}{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^4}\right]^2\Bigg\}\Bigg\{1 + 2\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}-\mathbf{k}'}{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2}\frac{\omega-\omega'}{\omega} + 3\left(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}-\mathbf{k}'}{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2}\frac{\omega-\omega'}{\omega}\right)^2 +$$

$$+ 3\frac{\varkappa T}{m}\frac{[\mathbf{k}\mathbf{k}']^2}{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2\omega^2} + 12\frac{\varkappa T}{m}\frac{\omega-\omega'}{\omega^3}\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}-\mathbf{k}'}{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^4}[\mathbf{k}\mathbf{k}']^2\Bigg\}^2 \times$$

$$\times \left(\frac{4\pi e^2}{m\omega\omega'}\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}'}{kk'}\right)^2 n_e \int d\mathbf{p}\,\delta(\omega - \omega' - (\mathbf{k}-\mathbf{k}'\cdot\mathbf{v}))\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}'\cdot\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{p}}\right)$$

Здесь принято, что $|\varepsilon''(\omega-\omega', \mathbf{k}-\mathbf{k}')| \ll |\varepsilon'(\omega-\omega', \mathbf{k}-\mathbf{k}')|$ Это неравенство выполняется при [15]

$$r_{De}^2(k^2-k'^2)^2 \gg (\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2, \text{ или } r_{De}^2(k^2-k'^2)^2 \ll (\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2 \tag{3.7}$$

где r_{De} — дебаевский радиус электронов.

Так как, например, в условиях легко выполнимого второго неравенства (3.7) диэлектрическая проницаемость $\varepsilon({}^3/_2\varkappa T(k^2-k'^2)/m\omega_L, \mathbf{k}-\mathbf{k}')$ по абсолютной величине значительно превышает единицу, то сумма выражений (3.5) и (3.6) оказывается существенно меньше того нелинейного взаимодействия, которое получилось без учета членов порядка e^6. Заметим, что после устранения опечаток и доопределения мнимых частей, из формул работы [9] можно получить распадное взаимодействие плазменных волн (3.3), однако выражение (3.6) быть получено не может, вследствие пренебрежения конечной мнимой частью диэлектрической проницаемости при описании нелинейных эффектов, так как в работе [9] при этом используется величина ε_1, где под ε_1 понимается $\operatorname{Re}\varepsilon$, к которой добавлена бесконечно малая мнимая константа, учитывающая затухание колебаний.

4. *Приложение.* Воспользуемся приближением, пренебрегающим четырехчастичными корреляциями; тогда кулоновская теория возмущений для коррелятивных функций [6] приводит к следующему уравнению для трехчастичной коррелятивной функции

$$D_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', -\mathbf{k}-\mathbf{k}') + \frac{1}{(\mathbf{k}+\mathbf{k}', \mathbf{v}_\alpha) - \mathbf{k}'\mathbf{v}_\beta - \mathbf{k}\mathbf{v}_\gamma - i0}\left\{\frac{4\pi e_\gamma}{k^2}\left(\mathbf{k}\frac{\partial f_\gamma}{\partial \mathbf{p}_\gamma}\right) \times \right.$$

$$\times D_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', -\mathbf{k}-\mathbf{k}') +$$

$$+ \frac{4\pi e_\beta}{(k')^2}\left(\mathbf{k}'\frac{\partial f_\beta}{\partial \mathbf{p}_\beta}\right) D_{\alpha\gamma}(\mathbf{k}', \mathbf{k}, -\mathbf{k}-\mathbf{k}') - \frac{4\pi e_\alpha}{(\mathbf{k}+\mathbf{k}')^2}\left(\mathbf{k}+\mathbf{k}', \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha}\right) \times$$

$$\left. \times D_{\beta\gamma}(-\mathbf{k}-\mathbf{k}', \mathbf{k}, \mathbf{k}') - F_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', -\mathbf{k}-\mathbf{k}')\right\} = 0 \tag{4.1}$$

Отсюда имеем следующую цепочку уравнений

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', -\mathbf{k}-\mathbf{k}')\,\varepsilon((\mathbf{k}+\mathbf{k}'\cdot\mathbf{v}_\alpha) - \mathbf{k}'\mathbf{v}_\beta - i0, \mathbf{k}) +$$

$$+ \frac{4\pi e_\beta}{(k')^2}\mathbf{k}'\frac{\partial f_\beta}{\partial \mathbf{p}_\beta} D_\alpha(\mathbf{k}', \mathbf{k}, -\mathbf{k}-\mathbf{k}', (\mathbf{k}+\mathbf{k}'\cdot\mathbf{v}_\alpha) - \mathbf{k}'\mathbf{v}_\beta - i0) -$$

$$- \frac{4\pi e_\alpha}{(k+k')^2}\left(\mathbf{k}+\mathbf{k}'\cdot\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha}\right) D_\beta(-\mathbf{k}-\mathbf{k}', \mathbf{k}, \mathbf{k}', (\mathbf{k}+\mathbf{k}'\cdot\mathbf{v}_\alpha) - \mathbf{k}'\mathbf{v}_\beta - i0) =$$

$$= \sum_\gamma e_\gamma n_\gamma \int d\mathbf{p}_\gamma \frac{F_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', -\mathbf{k}-\mathbf{k}')}{(\mathbf{k}+\mathbf{k}', \mathbf{v}_\alpha) - \mathbf{k}'\mathbf{v}_\beta - \mathbf{k}\mathbf{v}_\gamma - i0} \tag{4.2}$$

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon(\omega - i0, \mathbf{k})\,[D_\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{k}', -\mathbf{k}-\mathbf{k}', -\omega - i0 + (\mathbf{k}+\mathbf{k}'\mathbf{v}_\alpha)) - \\
&\quad - D_\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{k}', -\mathbf{k}-\mathbf{k}', -\omega + i0 + (\mathbf{k}+\mathbf{k}'\cdot\mathbf{v}_\alpha))] + \\
&\quad + D_\alpha(\mathbf{k}', \mathbf{k}, -\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega - i0) \\
&[\varepsilon(-\omega + (\mathbf{k}+\mathbf{k}'\cdot\mathbf{v}_\alpha) - i0, \mathbf{k}') - \varepsilon(-\omega + (\mathbf{k}+\mathbf{k}'\cdot\mathbf{v}_\alpha) + i0, \mathbf{k}')] - \\
&\quad - \frac{4\pi e_\alpha}{(\mathbf{k}+\mathbf{k}')^2}\left(\mathbf{k}+\mathbf{k}'\cdot\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha}\right)[D(-\mathbf{k}-\mathbf{k}', \mathbf{k}, \mathbf{k}', \omega - i0, -\omega - i0 + \\
&+ (\mathbf{k}+\mathbf{k}'\cdot\mathbf{v}_\alpha)) - D(-\mathbf{k}-\mathbf{k}', \mathbf{k}, \mathbf{k}', \omega - i0, -\omega + i0 + (\mathbf{k}+\mathbf{k}'\cdot\mathbf{v}_\alpha))] = \\
&\quad = \sum_\beta e_\beta n_\beta \int d\mathbf{p}_\beta \sum_\gamma e_\gamma n_\gamma \int d\mathbf{p}_\gamma \frac{F_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', -\mathbf{k}-\mathbf{k}')}{\omega - i0 - \mathbf{k}\mathbf{v}_\gamma}\, 2\pi i \times \\
&\quad\quad \times \delta(-\omega + (\mathbf{k}+\mathbf{k}'\cdot\mathbf{v}_\alpha) - \mathbf{k}'\mathbf{v}_\beta)
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon(\omega - i0, \mathbf{k})\,[D(\mathbf{k}, \mathbf{k}', -\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega' - i0, -\omega - \omega' - i0) - \\
&\quad - D(\mathbf{k}, \mathbf{k}', -\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega' + i0, -\omega - \omega' - i0) - \\
&\quad - D(\mathbf{k}, \mathbf{k}', -\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega' - i0, -\omega - \omega' + i0) + \\
&\quad + D(\mathbf{k}, \mathbf{k}', -\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega' + i0, -\omega - \omega' + i0)] + \\
&\quad + [\varepsilon(\omega' - i0, \mathbf{k}') - \varepsilon(\omega' + i0, \mathbf{k}')] \times \\
&\quad \times [D(\mathbf{k}', \mathbf{k}, -\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega - i0, -\omega - \omega' - i0) - \\
&\quad - D(\mathbf{k}', \mathbf{k}, -\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega - i0, -\omega - \omega' + i0)] + \\
&\quad + [\varepsilon(\omega + \omega' + i0, \mathbf{k}+\mathbf{k}') - \varepsilon(\omega + \omega' - i0, \mathbf{k}+\mathbf{k}')] \times \\
&\quad \times [D(-\mathbf{k}-\mathbf{k}', \mathbf{k}, \mathbf{k}', \omega - i0, \omega' - i0) - \\
&\quad - D(-\mathbf{k}-\mathbf{k}', \mathbf{k}, \mathbf{k}', \omega - i0, \omega' + i0)] = \\
&= \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \int d\mathbf{p}_\alpha \sum_\beta e_\beta n_\beta \int d\mathbf{p}_\beta \sum_\gamma e_\gamma n_\gamma \int d\mathbf{p}_\gamma F_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', -\mathbf{k}-\mathbf{k}') \times \\
&\quad \times \frac{1}{\omega - i0 - \mathbf{k}\mathbf{v}_\gamma}\, 2\pi i\delta(\omega' - \mathbf{k}'\mathbf{v}_\beta)\, 2\pi i\delta(\omega + \omega' - (\mathbf{k}+\mathbf{k}', \mathbf{v}_\alpha))
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

Здесь

$$
D(\mathbf{k}, \mathbf{k}', -\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega, \omega') = \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \int d\mathbf{p}_\alpha \frac{D_\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{k}', -\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega)}{\omega' + (\mathbf{k}+\mathbf{k}', \mathbf{v}_\alpha)}
$$

Из уравнений (4.1) — (4.4) очевидно, что для определения трехчастичной функции достаточно явно выразить D_α через D и $F_{\alpha\beta\gamma}$ и найти явное выражение D. Для этого прежде всего необходимо рассмотреть уравнение (4.3) и соответствующее ему второе уравнение, получаемое заменой переменных $\mathbf{k} \rightleftarrows \mathbf{k}'$ и $\omega \leftrightarrows -\omega + (\mathbf{k} + \mathbf{k}'\cdot\mathbf{v}_\alpha)$. Разность таких двух уравнений обладает такими аналитическими свойствами, что сразу удается исключить одну из функций D_α, а для второй после такого исключения при помощи формулы Сохоцкого — Племеля получаем

$$
\begin{aligned}
&\frac{D_\alpha(\mathbf{k}', \mathbf{k}, -\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega)}{\varepsilon(\omega, \mathbf{k})} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{d\omega'}{\omega - \omega'}\,\frac{1}{\varepsilon(-\omega' - i0 + (\mathbf{k}+\mathbf{k}'\cdot\mathbf{v}_\alpha), \mathbf{k}')} \times \\
&\times \left\{\frac{4\pi e_\alpha}{(\mathbf{k}+\mathbf{k}')^2}\left(\mathbf{k}+\mathbf{k}'\cdot\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha}\right)\left[\frac{D(-\mathbf{k}-\mathbf{k}', \mathbf{k}, \mathbf{k}', \omega' - i0, -\omega' - i0 + (\mathbf{k}+\mathbf{k}'\cdot\mathbf{v}_\alpha))}{\varepsilon(\omega' - i0, \mathbf{k})} - \right.\right. \\
&\left. - \frac{D(-\mathbf{k}-\mathbf{k}', \mathbf{k}, \mathbf{k}', \omega' + i0, -\omega' - i0 + (\mathbf{k}+\mathbf{k}'\cdot\mathbf{v}_\alpha))}{\varepsilon(\omega' + i0, \mathbf{k})}\right] + \sum_\beta e_\beta n_\beta \int d\mathbf{p}_\beta \sum_\gamma e_\gamma n_\gamma \int d\mathbf{p}_\gamma \\
&\left.\frac{F_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', -\mathbf{k}-\mathbf{k}')}{\omega' + i0 - (\mathbf{k}+\mathbf{k}'\cdot\mathbf{v}_\alpha) + \mathbf{k}'\mathbf{v}_\beta}\left[\frac{1}{\varepsilon(\omega' + i0, \mathbf{k})}\,\frac{1}{\omega' + i0 - \mathbf{k}\mathbf{v}_\gamma} - \frac{1}{\varepsilon(\omega' - i0, \mathbf{k})}\,\frac{1}{\omega' - i0 - \mathbf{k}\mathbf{v}_\gamma}\right]\right\}
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

Для получения явного выражения функции D необходимо рассмотреть уравнение (4.4). В это уравнение входят фактически три различные функции D. Соответствующие дополнительные два уравнения получаются из (4.4) заменой переменных. Рассматривая разности таких уравнений, используя аналитические свойства возникающих соотношений и исключая последовательно все функции D кроме одной, получаем для этой функции уравнение, представляющее собой скачок на действительной оси функции двух комплексных переменных. Поэтому окончательно

$$\frac{D(-\mathbf{k}-\mathbf{k}', \mathbf{k}, \mathbf{k}', \omega, \omega')}{\varepsilon(\omega, \mathbf{k})\,\varepsilon(\omega', \mathbf{k})} = -\frac{1}{(\pi)^2}\int\frac{d\Omega}{\Omega-\omega}\int\frac{d\Omega'}{\Omega'-\omega'}\,\frac{1}{\varepsilon(\Omega+\Omega'+i0, \mathbf{k}+\mathbf{k}')}\times$$

$$\times\sum_\alpha e_\alpha n_\alpha\int d\mathbf{p}_\alpha\sum_\beta e_\beta n_\beta\int d\mathbf{p}_\beta\sum_\gamma e_\gamma n_\gamma\int d\mathbf{p}_\gamma\,\frac{F_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', -\mathbf{k}-\mathbf{k}')}{\Omega+\Omega'+i0-(\mathbf{k}+\mathbf{k}', \mathbf{v}_\alpha)}\times$$

$$\times\operatorname{Im}\left[\frac{1}{\varepsilon(\Omega+i0, \mathbf{k})}\,\frac{1}{\Omega+i0-k\mathbf{v}_\gamma}\right]\operatorname{Im}\left[\frac{1}{\varepsilon(\Omega'+i0, \mathbf{k}')}\,\frac{1}{\Omega'+i0-\mathbf{k}'\mathbf{v}_\beta}\right] \quad (4.6)$$

Подставляя D, определенное формулой (4.6), в соотношение (4.5), получим выражение (1.3). Согласно соотношениям (4.2) и (4.1) при этом, очевидно, получено и явное определение трехчастичной коррелятивной функции.

Поступила 7 VI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Силин В. П., Горбунов Л. М. К кинетике неизотермической плазмы. Докл. АН СССР, 1962, т. 145, № 6.
2. Рамазашвили Р. Р., Рухадзе А. А., Силин В. П. О скорости выравнивания температуры заряженных частиц в плазме. Ж. эксперим. и теор. физ., 1962, 43, вып. 4 (10).
3. Силин В. П. К теории процессов переноса в плазме поперек магнитного поля. Ядерный синтез, 1962, 2, № 3—4.
4. Горбунов Л. М., Силин В. П., Теория явлений переноса в неизотермической полностью ионизированной плазме. ЖТФ, 1963, т. 34, № 3.
5. Веденов А. А. Квазилинейная теория плазмы (теория слаботурбулентной плазмы). Атомная энергия, 1962, 13, 5.
6. Климонтович Ю. Л. К статистической теории турбулентности в плазме. ПМТФ, 1962, № 1.
7. Camac M., Kantrowitz A. R., Litvak M. M., Patrick R. M., Petschek H. E. Shock waves in collision free plasmas. Докл. на Конф. по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу, № 132, Зальцбург, 1961; Nuclear Fusion, 1962, Supplement, part 2, p. 423.
8. Matsuura K., Ogawa K. On the mode-coupling damping of plasma oscillation. Progr. Theor. Phys., 1962, 28, 946.
9. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. Слабо турбулентная плазма в магнитном поле. Ж. эксперим. и теор. физ., 1962, 43, № 6
10. Силин В. П. Об интеграле столкновений для заряженных частиц. Ж. эксперим. и теор. физ., 1961, т. 40, № 6.
11. Силин В. П. Интеграл столкновений системы частиц с кулоновским взаимодействием. Физ. металлов и металловед., 1962, т. 13, № 2.
12. Галеев А. А., Карпман В. И. Турбулентная теория слабонеравновесной разреженной плазмы и структура ударных волн. Ж. эксперим. и теор. физ., 1963, т. 44, № 2.
13. Пайерлс Р. Квантовая теория твердых тел. ИЛ, 1956.
14. Bohm D., Pines D. A collective description of electron interaction, III. Coulomb interactions in a degenerate electron gas. Phys. Rev., 1953, vol. 92, 609.
15. Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. Атомиздат, 1961.
16. Боголюбов Н. Н. Динамические проблемы в статистической физике. ОГИЗ, 1946.